Capítulo I

El Espacio Proyectivo

En este cap¡tulo todos los espacios vectoriales considerados se supondrán de dimensión finita sobre un cuerpo conmutativo k, y E será uno de tales espacios.

1 Espacio Proyectivo y Subvariedades Lineales

Si denotamos por $\mathbb{P}(E)$ el conjunto de todos los subespacios vectoriales de dimensión 1 de E, entonces tenemos definida la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \pi : E - \{0\} & \to & \mathbb{P}(E) \\ e & \mapsto & \pi(e) = \langle e \rangle \,, \end{array}$$

que asigna a cada vector no nulo la recta vectorial que genera.

Otra forma de construir el par $(\mathbb{P}(E), \pi)$ asociado a E es la siguiente: si consideramos en $E - \{0\}$ la relación de equivalencia

$$e \sim e' \quad \Longleftrightarrow \quad \text{existe } \lambda \in k \text{ tal que } e = \lambda e' \quad \Longleftrightarrow \quad e \text{ y } e' \text{ son proporcionales}\,,$$

entonces $\mathbb{P}(E)$ es el conjunto cociente, $\mathbb{P}(E) = \big(E - \{0\}\big)/\!\sim$, y la aplicación π es el morfismo de paso al cociente.

Definición 1.1 Llamaremos *espacio proyectivo* asociado a E al par $(\mathbb{P}(E), \pi)$, donde $\mathbb{P}(E)$ es el conjunto de las rectas vectoriales de E, y $\pi : E - \{0\} \to \mathbb{P}(E)$ es la aplicación que asigna a cada vector no nulo la recta vectorial que genera. Dado $P \in \mathbb{P}(E)$, si $e \in E$ es tal que $\pi(e) = P$ diremos que el vector e *representa* a P; por definición, el representante de P está determinado salvo un factor de proporcionalidad.

Observación **1.2** Aunque la aplicación π está definida en $E - \{0\}$, en todo lo que sigue, por comodidad en la notación, escribiremos $\pi : E \to \mathbb{P}(E)$. Por el mismo motivo usaremos $\mathbb{P}(E)$ para denotar al espacio proyectivo $(\mathbb{P}(E), \pi)$, sin olvidar en ningún momento que $\mathbb{P}(E)$ está dotado de la aplicación π.

El espacio proyectivo no es simplemente un conjunto, ya que la aplicación π hace que en $\mathbb{P}(E)$ haya ciertos subconjuntos distinguidos: las subvariedades lineales.

Definición 1.3 Llamaremos *subvariedad lineal* del espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$ a todo subconjunto suyo que sea imagen por π de algún subespacio vectorial de E; es decir, las subvariedades lineales de $\mathbb{P}(E)$ son los subconjuntos de la forma $\pi(V) = \{\pi(e) : e \in V\}$, donde V es un subespacio vectorial de E (nótese que el vacío de $\mathbb{P}(E)$ es una subvariedad lineal porque es la imagen de 0 por π). Dado un subespacio vectorial V de E, diremos que la subvariedad lineal $X = \pi(V)$ es la *proyectivización* de V.

1.4 El conjunto de las subvariedades lineales de $\mathbb{P}(E)$ está dotado de un orden natural: el orden que define la relación de inclusión. Veremos seguidamente que dicho orden, que será el que consideremos siempre en el conjunto de las subvariedades lineales de $\mathbb{P}(E)$, dota a este conjunto de estructura de *retículo*.

Recordemos que un retículo es un conjunto ordenado en el que todo subconjunto finito y no vacío tiene supremo e ínfimo. Dados elementos $a_1, \dots, a_n$ de un retículo $\mathcal{R}$, el ínfimo y el supremo del conjunto $\{a_1, \dots, a_n\}$ los denotaremos $a_1 \cap \cdots \cap a_n$ y $a_1 + \cdots + a_n$, respectivamente. Dados retículos $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$, una aplicación $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$ es un morfismo de retículos si satisface $f(a \cap b) = f(a) \cap f(b)$ y $f(a + b) = f(a) + f(b)$ para cualesquiera $a, b \in \mathcal{R}$. Un morfismo de retículos $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$ es un isomorfismo si posee inversa f^{-1} que es también morfismo de retículos.

Recordemos también que el conjunto de los subespacios vectoriales de E, dotado del orden que define la relación de inclusión, es un retículo donde el supremo de dos subespacios vectoriales es su suma y el ínfimo es su intersección.

Teorema 1.5 *Las subvariedades lineales de $\mathbb{P}(E)$ forman un retículo que es isomorfo, vía π, al retículo de los subespacios vectoriales de E.*

Demostración. Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{c} \text{subespacios vec-} \\ \text{toriales de } E \end{array}\right] & \longrightarrow & \left[\begin{array}{c} \text{subvariedades} \\ \text{lineales de } \mathbb{P}(E) \end{array}\right] \\ V & \longmapsto & \pi(V) \end{array} . \tag{1.1}$$

Teniendo en cuenta que cada subespacio vectorial de E coincide con la unión de los subespacios vectoriales de dimensión uno que contiene, es fácil obtener que para todo par de subespacios V_1 y V_2 de E se cumple:

(a) $V_1 \subseteq V_2 \iff \pi(V_1) \subseteq \pi(V_2)$, y como consecuencia

(b) $V_1 = V_2 \iff \pi(V_1) = \pi(V_2)$.

La propiedad (b) significa que la aplicación (1.1) es biyectiva, y la (a) prueba que la relación de inclusión en el conjunto de los subespacios vectoriales de E coincide con la relación de inclusión en el conjunto de las subvariedades lineales de $\mathbb{P}(E)$; por lo tanto, si el primero de los conjuntos ordenados es un retículo, entonces el segundo también es un retículo y (1.1) es un isomorfismo de retículos. ∎

Corolario 1.6 *En el retículo de las subvariedades lineales de $\mathbb{P}(E)$ tenemos: el primer elemento es $\pi(0) = \emptyset$, el último elemento es $\pi(E) = \mathbb{P}(E)$, y dadas dos subvariedades lineales $\pi(V_1)$ y $\pi(V_2)$, su supremo es $\pi(V_1 + V_2)$, que lo denotamos $\pi(V_1) + \pi(V_2)$, y su ínfimo es*

$\pi(V_1 \cap V_2)$, que coincide con la intersección conjuntista $\pi(V_1) \cap \pi(V_2)$ (es decir, $\pi(V_1) \cap \pi(V_2)$ es la mayor subvariedad lineal contenida en $\pi(V_1)$ y en $\pi(V_2)$, y $\pi(V_1) + \pi(V_2)$ es la menor subvariedad lineal que contiene a $\pi(V_1)$ y a $\pi(V_2)$).

Definiciones 1.7 Llamaremos *dimensión* de una subvariedad lineal $X = \pi(V)$ de $\mathbb{P}(E)$ al número entero

$$\dim X = \dim V - 1\,,$$

siendo $\dim V$ la dimensión de V como espacio vectorial.

Nótese que $\dim \emptyset = -1$, y si $\dim E = n + 1$ entonces $\dim \mathbb{P}(E) = n$. Es usual denotar por $\mathbb{P}_n$ al espacio proyectivo de dimensión n, omitiendo el espacio vectorial al que está asociado.

Llamaremos *puntos* a las subvariedades lineales de $\mathbb{P}_n$ de dimensión 0, *rectas* a las de dimensión 1, *planos* a las de dimensión 2, e *hiperplanos* a las de dimensión $n - 1$.

Es usual llamar *incidencia* a la relación de orden del retículo de las subvariedades lineales de $\mathbb{P}_n$, de modo que dos subvariedades X e Y de $\mathbb{P}_n$ se dicen que son incidentes si una de ellas está contenida en la otra.

1.8 De la definición de dimensión dada en 1.7 se obtienen inmediatamente las siguientes propiedades elementales que usaremos con frecuencia (y cuyas demostraciones se dejan como ejercicio):

(a) Si X e Y son subvariedades lineales de $\mathbb{P}(E)$ que son incidentes, entonces $X = Y$ si y sólo si $\dim X = \dim Y$.

(b) Si X es una subvariedad lineal de $\mathbb{P}(E)$ y $P \in \mathbb{P}(E)$, entonces $\dim(P + X) \leq \dim X + 1$. Cuál es la condición necesaria y suficiente para que la anterior desigualdad sea una igualdad?

(c) Dados $n + 1$ puntos $P_0, P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{P}(E)$ tenemos $\dim(P_0 + P_1 + \cdots + P_n) \leq n$.

Proposición 1.9 (Fórmula de la dimensión) *Para cualesquiera subvariedades lineales X_1 y X_2 de $\mathbb{P}(E)$ se satisface*

$$\dim(X_1 + X_2) = \dim X_1 + \dim X_2 - \dim(X_1 \cap X_2)\,. \tag{1.2}$$

Demostración. Se deduce inmediatamente de la siguiente conocida fórmula para la dimensión de los subespacios vectoriales de E:

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)\,. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 1.10 Con la ayuda de la fórmula de la dimensión (1.2), pruébense las siguientes relaciones de incidencia en el espacio proyectivo:

(a) Por dos puntos distintos pasa una única recta.
(b) Dos rectas coplanarias y distintas se cortan en un único punto.
(c) Un hiperplano y una recta no incidentes se cortan en un único punto.
(d) Por tres puntos no alineados pasa un único plano.
(e) Dos rectas tienen intersección no vacía si y sólo si son coplanarias.
(f) En $\mathbb{P}_3$, dos planos distintos se cortan en una única recta.
(g) En $\mathbb{P}_3$, tres planos distintos siempre tienen algún punto en común.

1.11 Veamos cómo se interpreta el espacio proyectivo. Supongamos en primer lugar que $\dim E = 2$ y fijemos una base $\{e_1, e_2\}$ en E. Sea P_0 un vector no nulo de $\langle e_2\rangle$ y consideremos la recta afín $r_0 = P_0 + \langle e_1\rangle$ (véase la figura 1.1). En estas condiciones, una recta vectorial $\langle e\rangle$ de E cortará a r_0 en un (único) punto P si y sólo si $\langle e\rangle \neq \langle e_1\rangle$; es decir, el conjunto $\mathbb{P}(E) - \pi(e_1)$

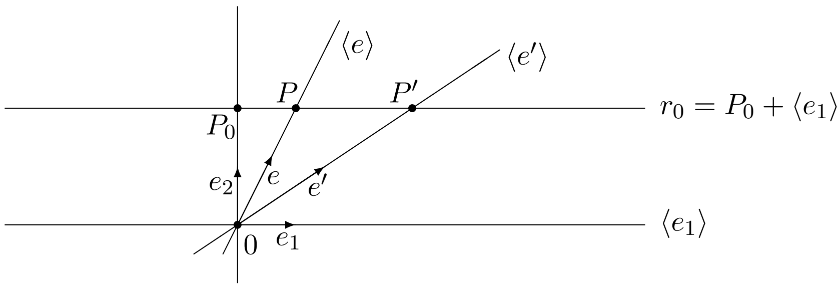

Figura 1.1

está en correspondencia biunívoca con la recta r_0, o lo que es lo mismo, $\mathbb{P}(E) = r_0 \sqcup \pi(e_1)$ (el símbolo $\sqcup$ significa "unión disjunta"); la anterior igualdad se interpreta diciendo que "la recta proyectiva se obtiene aadiendo a la recta afín un punto", el cual se denomina "punto del infinito de la recta afín"; con nuestra notación dicho punto es la proyectivización de la recta vectorial $\langle e_1\rangle$.

Supongamos ahora que $\dim E = 3$ y sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de E. Sea P_0 un vector no nulo de $\langle e_3\rangle$ y consideremos el plano afín $H_0 = P_0 + V_0$, donde $V_0 = \langle e_1, e_2\rangle$. Una recta vectorial $\langle e\rangle$ de E cortará a H_0 en un (único) punto P si y sólo si $e \notin V_0$ (véase la figura 1.2); es decir, el conjunto $\mathbb{P}(E) - \pi(V_0)$ está en correspondencia biunívoca con el plano afín H_0, o lo que es lo mismo, $\mathbb{P}(E) = H_0 \sqcup \pi(V_0)$. Según la anterior igualdad, "el plano proyectivo se obtiene aadiendo al plano afín una recta proyectiva" ($\pi(V_0)$ es una recta porque V_0 tiene dimensión 2);

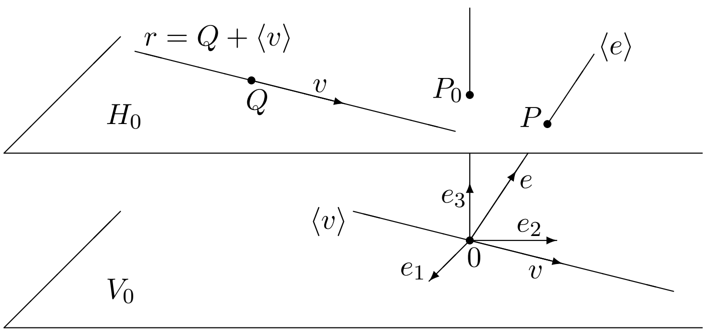

Figura 1.2

la recta proyectiva $\pi(V_0)$ se denomina "recta del infinito del plano afín", ya que se corresponde con las direcciones de H_0: toda recta afín de H_0 es de la forma $r = Q + \langle v\rangle$, con $Q \in H_0$ y $v \in V_0 - \{0\}$, por lo tanto $P_\infty = \pi(v)$ define un punto del espacio proyectivo que no está en H_0 y está en $\pi(V_0)$; se dice que P_∞ es el punto del infinito de la recta r. Si $r' = Q' + \langle v'\rangle$

es otra recta afín de H_0, entonces r y r' son paralelas si y sólo si tienen la misma dirección (esto es, si y sólo si $\langle v\rangle = \langle v'\rangle$); es decir, "$r$ y r' son paralelas si y sólo si se cortan en el infinito". (Teniendo en cuenta que dos rectas de un plano afín, ó se cortan ó son paralelas, hemos probado el enunciado 1.10 (b): en un plano proyectivo, dos rectas siempre se cortan.)

En general, si $\dim E = n+1$, veremos en el capítulo III que entonces el espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$ podemos entenderlo como un espacio afín de dimensión n al que se le ha aadido un hiperplano en el infinito (el hiperplano de todas sus direcciones).

Ejercicio 1.12 Sean $a,b,c \in E$ representantes de tres puntos distintos $A,B,C \in \mathbb{P}(E)$. Pruébese que la condición necesaria y suficiente para que A, B y C estén alineados es que a, b y c sean linealmente dependientes. Además, fijado c, si los tres puntos están alineados, entonces pueden elegirse los representantes a y b de modo que $c = a+b$.

Definición 1.13 Dada una subvariedad lineal X de $\mathbb{P}(E)$ de dimensión d, llamaremos *radiación* de base X al conjunto de las subvariedades lineales de dimensión $d+1$ que pasan por X, y lo denotaremos $\mathbb{P}(E)/X$.

Proposición 1.14 *Dado un subespacio vectorial V de E, si $X = \pi(V)$, entonces la radiación de base X se corresponde de modo natural con el espacio proyectivo $\mathbb{P}(E/V)$.*

Demostración. Supuesto que $\dim X = d$, debe ser $\dim V = d+1$. La proyección canónica de paso al cociente $E \to E/V$ define una biyección entre los subespacios vectoriales de E/V y los subespacios vectoriales de E que contienen a V, de la que se sigue la igualdad de retículos

$$\left[\begin{array}{c}\text{subespacios vectoriales}\\ \text{de dimensión 1 de } E/V\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\text{subespacios vectoriales de}\\ \text{dimensión } d+2 \text{ de } E \text{ que} \supseteq V\end{array}\right];$$

para concluir basta tener en cuenta que, según 1.5, tenemos la igualdad de retículos

$$\left[\begin{array}{c}\text{subespacios vectoriales de}\\ \text{dimensión } d+2 \text{ de } E \text{ que} \supseteq V\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\text{subvariedades lineales de}\\ \text{dimensión } d+1 \text{ de } \mathbb{P}(E) \text{ que} \supseteq X\end{array}\right]. \quad \blacksquare$$

Ejemplos 1.15 Las rectas de $\mathbb{P}_3$ que pasan por un punto dado forman un plano proyectivo; los planos de $\mathbb{P}_3$ que pasan por una recta dada forman una recta proyectiva; las rectas de $\mathbb{P}_2$ que pasan por un punto dado forman una recta proyectiva.

2 Proyectividades

Si $T : E \to E'$ es una aplicación lineal, entonces la imagen por T de una recta vectorial de E que no esté contenida en el núcleo de T es una recta vectorial de E', de modo que T define la siguiente aplicación (denominada *proyectivización* de T):

$$\begin{array}{rcl}\widetilde{T} : \mathbb{P}(E) - \pi(\operatorname{Ker} T) & \longrightarrow & \mathbb{P}(E') \\ \langle e\rangle \qquad & \longmapsto & \widetilde{T}(\langle e\rangle) = \langle T(e)\rangle\,;\end{array}$$

claramente, si T es un isomorfismo, entonces $\widetilde{T} : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E')$ es una biyección.

Definición 2.1 Llamaremos *proyectividades* a las proyectivizaciones de los isomorfismos lineales. Por definición, la proyectividad asociada a un isomorfismo lineal $T : E \to E'$ hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & E' \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ \mathbb{P}(E) & \xrightarrow{\widetilde{T}} & \mathbb{P}(E')\,, \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} e & \to & T(e) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \langle e\rangle & \to & \langle T(e)\rangle\,. \end{array}$$

Además, si $X = \pi(V)$ es una subvariedad lineal de $\mathbb{P}(E)$ entonces $\widetilde{T}(X) = \pi(T(V))$ es una subvariedad lineal de $\mathbb{P}(E')$, de modo que tenemos definida una aplicación

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{c}\text{subvariedades}\\ \text{lineales de } \mathbb{P}(E)\end{array}\right] & \longrightarrow & \left[\begin{array}{c}\text{subvariedades}\\ \text{lineales de } \mathbb{P}(E')\end{array}\right] \\ X & \longmapsto & \widetilde{T}(X) \end{array}$$

que es un isomorfismo de retículos (compruébese como ejercicio).

Si $\varphi : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E)$ es una proyectividad y $T : E \to E'$ es un isomorfismo tal que $\widetilde{T} = \varphi$, entonces diremos que T es un *representante lineal* de φ.

Lema 2.2 (i) *La proyectivización del isomorfismo identidad de E es la proyectividad identidad de $\mathbb{P}(E)$.*

(ii) *Dados isomorfismos $E \xrightarrow{T_1} E' \xrightarrow{T_2} E''$ tenemos $(T_2 \circ T_1)^{\sim} = \widetilde{T}_2 \circ \widetilde{T}_1$.*

(iii) *De* (i) *y* (ii) *se sigue $(T^{-1})^{\sim} = \widetilde{T}^{-1}$ para todo isomorfismo $T : E \to E'$. Como consecuencia, la aplicación inversa de una proyectividad es también una proyectividad.*

Demostración. Es sencilla y se deja como ejercicio. ∎

2.3 Según el lema 2.2, las proyectividades del espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$ en sí mismo dotado con la operación "composición de aplicaciones" forman un grupo, el cual se denota $\mathrm{PGL}(E)$ y se denomina *grupo lineal proyectivo* de E. También prueba 2.2 que si $\mathrm{GL}(E)$ es el *grupo lineal* de E (el grupo de los automorfismos de E), entonces la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(E) & \to & \mathrm{PGL}(E) \\ T & \mapsto & \widetilde{T} \end{array}$$

es un morfismo de grupos (que es epiyectivo, por definición de proyectividad). Además, si k^* es el grupo multiplicativo de los elementos no nulos del cuerpo k, y $k^* \to \mathrm{GL}(E)$ es el morfismo de grupos que a cada $\lambda \in k^*$ le asocia la homotecia de razón λ, entonces tenemos la siguiente sucesión de morfismos de grupos:

$$0 \to k^* \to \mathrm{GL}(E) \to \mathrm{PGL}(E) \to 0\,. \tag{2.1}$$

Como es claro que el morfismo $k^* \to \mathrm{GL}(E)$ es inyectivo e identifica k^* con el subgrupo de $\mathrm{GL}(E)$ formado por todas las homotecias de E, para ver que la sucesión (2.1) es exacta basta probar el siguiente lema:

Lema 2.4 *El núcleo del morfismo de grupos* $\mathrm{GL}(E) \to \mathrm{PGL}(E)$ *son las homotecias. Es decir, dado un automorfismo* $T : E \to E$, *la proyectividad* $\widetilde{T} : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E)$ *es la identidad si y sólo si* T *es una homotecia.*

Demostración. Si T es la homotecia de E de razón $\lambda \in k^*$, entonces para todo vector no nulo $e \in E$ se tiene $\widetilde{T}(\langle e \rangle) = \langle T(e) \rangle = \langle \lambda e \rangle = \langle e \rangle$, es decir, $\widetilde{T}$ es la identidad.

Recíprocamente, sea $T : E \to E$ un automorfismo tal que $\widetilde{T}$ es la identidad de $\mathbb{P}(E)$. Fijemos una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ en E y sea $e = e_1 + \cdots + e_n$; por hipótesis existen escalares $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in k^*$ tales que $T(e) = \lambda e$ y $T(e_i) = \lambda_i e_i$ para todo i, de lo que se sigue

$$\lambda \left(\sum_{i=1}^{n} e_i \right) = T \left(\sum_{i=1}^{n} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} T(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \, ;$$

por lo tanto debe ser $\lambda_i = \lambda$ para todo i y concluimos que T es la homotecia de razón λ. ∎

Corolario 2.5 *El representante lineal de una proyectividad está determinado salvo un factor de proporcionalidad. Es decir, dados isomorfismos* $T_1, T_2 : E \to E'$ *tenemos:* $\widetilde{T}_1 = \widetilde{T}_2$ *si y sólo si existe* $\lambda \in k^*$ *tal que* $T_1 = \lambda T_2$.

Ejercicio 2.6 (a) Pruébese que toda recta proyectiva tiene al menos tres puntos distintos.

(b) Sean A, B, C tres puntos distintos de una recta proyectiva $\mathbb{P}_1$, y sean A', B', C' tres puntos distintos de otra recta proyectiva $\mathbb{P}'_1$. Existe una única proyectividad de $\mathbb{P}_1$ en $\mathbb{P}'_1$ que transforma A en A', B en B' y C en C'. (Para probar la existencia úsese el ejercicio 1.12; la unicidad se sigue de 2.5.)

Ejemplos 2.7 Veamos a continuación varios ejemplos fundamentales de proyectivización de aplicaciones lineales. Sean $X = \pi(F)$ e $Y = \pi(V)$ subvariedades lineales de $\mathbb{P}(E)$.

(a) Si $X \subseteq Y$, entonces la inclusión natural $\mathbb{P}(F) = X \hookrightarrow Y = \mathbb{P}(V)$ es la proyectivización de la inclusión $F \hookrightarrow V$.

(b) Se llama *proyección desde* Y a la aplicación $\mathbb{P}(E) - Y \to \mathbb{P}(E)/Y = \mathbb{P}(E/V)$ que asigna a cada punto $P \in \mathbb{P}(E) - Y$ la subvariedad $P + Y$ de la radiación de base Y. Dicha proyección es la proyectivización de la proyección canónica $E \to E/V$. Si $X \cap Y = \emptyset$ (es decir, si $X \subseteq \mathbb{P}(E) - Y$), entonces podemos restringir a X la aplicación $\mathbb{P}(E) - Y \to \mathbb{P}(E)/Y$ y obtenemos la aplicación inyectiva $X \hookrightarrow \mathbb{P}(E)/Y$, $P \mapsto P + Y$, la cual se denomina *proyección de* X *desde* Y (figura 2.1); esta última aplicación es la proyectivización de la composición $F \hookrightarrow E \to E/V$ (que es inyectiva porque $F \cap V = 0$).

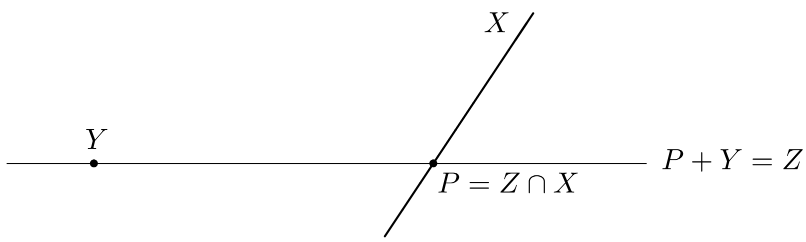

Figura 2.1

(c) Supongamos ahora que $X+Y=\mathbb{P}(E)$ y $X\cap Y=\emptyset$, es decir, $E=F\oplus V$. Entonces la composición $F\hookrightarrow E\to E/V$ es un isomorfismo (porque $\dim(E/V)=\dim F$) y por lo tanto la proyección de X desde Y es una proyectividad; su aplicación inversa es la proyectividad $\mathbb{P}(E)/Y\to X$, $Z\mapsto Z\cap X$, la cual se denominada *sección con X de la radiación de base Y* (de nuevo figura 2.1). Tal sección es la proyectivización del isomorfismo natural $E/V\to F$ que a cada clase del cociente E/V le asigna el único representante que dicha clase tiene en F.

Definición 2.8 Sean Y, X_1, X_2 subvariedades lineales de $\mathbb{P}(E)$ tales que

$$X_1\cap Y=X_2\cap Y=\emptyset\,,\qquad X_1+Y=X_2+Y$$

(y por tanto $\dim X_1=\dim X_2$). Llamaremos *perspectividad* de X_1 a X_2 con *vértice* (ó *centro*) en Y, a la aplicación $\varphi:X_1\to X_2$ definida por la fórmula

$$\varphi(P)=(P+Y)\cap X_2\qquad (P\in X)\,.$$

Nótese que la aplicación φ está bien definida, es decir, dado $P\in X_1$ la subvariedad lineal $(P+Y)\cap X_2$ es punto. En efecto, de las condiciones impuestas en la definición se siguen las igualdades $P+X_2+Y=P+X_1+Y=X_1+Y=X_2+Y$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}\dim\Big[(P+Y)\cap X_2\Big]&=\dim(P+Y)+\dim X_2-\dim(P+X_2+Y)\\&=\dim(P+Y)+\dim X_2-\dim(X_2+Y)\\&=\dim P+\dim Y-1+\dim X_2-(\dim X_2+\dim Y-1)=\dim P\,.\end{aligned}$$

Es claro que $\varphi^{-1}:X_2\to X_1$ es la perspectividad de X_2 a X_1 con vértice en Y.

Proposición 2.9 *Toda perspectividad es una proyectividad.*

Demostración. Sean Y, X_1, X_2 y φ como en 2.8, y sean V, F_1 y F_2 los subespacios vectoriales de E tales que $Y=\pi(V)$, $X_1=\pi(F_1)$ y $X_2=\pi(F_2)$.

Supongamos en primer lugar que $F_1+V=E$, en cuyo caso $F_1\oplus V=E=F_2\oplus V$. Es claro que en este supuesto la perspectividad $\varphi:X_1\to X_2$ es la composición de la proyección $X_1\to\mathbb{P}(E)/Y$ y la sección $\mathbb{P}(E)/Y\to X_2$ (véase 2.7 y la figura 2.2), con lo que concluimos.

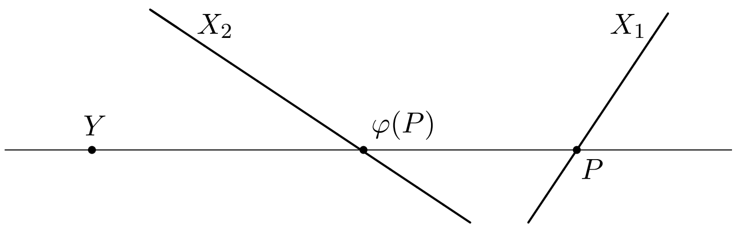

Figura 2.2

En general, si nos restringimos al subespacio vectorial $F=F_1+V=F_2+V$, es decir, consideramos Y, X_1 y X_2 como subvariedades lineales de $\pi(F)=\mathbb{P}(F)$, entonces tenemos que φ es la composición de las proyectividades $X_1\to\mathbb{P}(F)/Y\to X_2$. ∎

Ejercicio 2.10 Siguiendo con la notación de la proposición anterior, pruébese que un representante lineal de la perspectividad φ lo podemos obtener del siguiente modo: si $T_1 : F_1 \hookrightarrow F_1 \oplus V$ es la inclusión natural y $T_2 : F_2 \oplus V = F_2 \times V \to F_2$ es la proyección sobre el primer factor, entonces $T = T_2 \circ T_1$ es un isomorfismo tal que $\widetilde{T} = \varphi$ (nótese que $F_1 \oplus V = F_2 \oplus V$).

3 Principio de Dualidad

Sea E^* el espacio vectorial dual de E. Recordemos que cada subespacio vectorial V de E tiene asociado en E^* su *incidente* $V^\circ = \{\omega \in E^* : \omega(V) = 0\}$, de modo que mediante la identificación canónica $E = (E^*)^*$ se satisface $(V^\circ)^\circ = V$.

Definición 3.1 Llamaremos *espacio proyectivo dual* de $\mathbb{P}(E)$ al espacio proyectivo $\mathbb{P}(E^*)$. De la igualdad $E = E^{**}$ se sigue que cada espacio proyectivo se corresponde canónicamente con el espacio proyectivo dual de su espacio proyectivo dual.

Dada una subvariedad lineal $X = \pi(V)$ en $\mathbb{P}(E)$, diremos que $X^\circ = \pi(V^\circ)$ es la subvariedad *incidente* de X; de la conocida fórmula $\dim V^\circ = \dim E - \dim V$ para la dimensión del subespacio incidente obtenemos $\dim X^\circ = \dim \mathbb{P}(E) - \dim X - 1$.

3.2 La operación de "pasar a la subvariedad incidente" establece una correspondencia natural de los puntos de $\mathbb{P}(E^*)$ con los hiperplanos de $\mathbb{P}(E)$ (porque las rectas vectoriales de E^* se corresponden por incidencia con los hiperplanos vectoriales de E). En particular, dada una subvariedad lineal $X = \pi(V)$ de E, los puntos de X° se entienden como los hiperplanos de $\mathbb{P}(E)$ que pasan por X.

Definición 3.3 Llamaremos *retículo dual* de un retículo $\mathcal{R}$, y lo denotaremos $\mathcal{R}^*$, al retículo obtenido al invertir en $\mathcal{R}$ la relación de orden.

Teorema 3.4 *Sea $\mathcal{R}$ el retículo de las subvariedades lineales de un espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$. El retículo dual $\mathcal{R}^*$ es canónicamente isomorfo al retículo de las subvariedades lineales de $\mathbb{P}(E^*)$.*

Demostración. Es consecuencia directa de 1.5 y de que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{c}\text{subespacios vec-}\\ \text{toriales de } E\end{array}\right] & \longrightarrow & \left[\begin{array}{c}\text{subespacios vec-}\\ \text{toriales de } E^*\end{array}\right] \\ V & \longmapsto & V^\circ \end{array}$$

es un isomorfismo del retículo (dualizado) de los subespacios vectoriales de E en el retículo de los subespacios vectoriales de E^*: dicha aplicación es biyectiva, y dados subespacios vectoriales V_1 y V_2 de E tenemos $(V_1 + V_2)^\circ = V_1^\circ \cap V_2^\circ$ y $(V_1 \cap V_2)^\circ = V_1^\circ + V_2^\circ$. ∎

3.5 (Principio de dualidad) Consideremos una proposición relativa a los conjuntos ordenados, con independencia de que sea verdadera o falsa. Por ejemplo, el Lema de Zorn: "Si todo subconjunto totalmente ordenado de un conjunto ordenado $(X, \leq)$ está acotado superiormente, entonces existen elementos maximales en $(X, \leq)$". En una proposición de este tipo, si invertimos la relación de orden en cada concepto o propiedad que aparezca en el enunciado de la sentencia, obtendremos una nueva proposición; a esta proposición se le llamará *proposición dual* de la dada inicialmente. Así, por ejemplo, la proposición dual del Lema de Zorn dice: "Si todo subconjunto totalmente ordenado de un conjunto ordenado $(X, \leq)$ está acotado inferiormente, entonces existen elementos minimales en $(X, \leq)$". Se cumple evidentemente que la proposición dual es verdadera si y sólo si lo es la proposición inicial. A esta equivalencia la llamaremos *principio de dualidad*.

Las proposiciones que aquí nos interesan, las propias de la Geometría Proyectiva, son aquellas que se refieren a los retículos de subvariedades lineales de los espacios proyectivos. Al dualizar uno de tales retículos invirtiendo la relación de orden, se obtiene un retículo que, según 3.4, vuelve a ser el retículo de subvariedades lineales de un espacio proyectivo. Como consecuencia, la proposición dual de una proposición de la Geometría Proyectiva es también una proposición de la Geometría Proyectiva. En este contexto, el "principio de dualidad" afirma que una proposición de la Geometría Proyectiva es verdadera si y sólo si lo es la proposición dual. Dada una proposición de la Geometría Proyectiva, la proposición dual se obtendrá intercambiando los pares de términos: suma e intersección, inclusión y contención, punto e hiperplano, etc.

Ejemplos 3.6 (a) Del enunciado "por dos puntos distintos de un plano pasa una única recta", resulta por dualidad el enunciado "dos rectas distintas de un plano se cortan en un único punto". El enunciado dual de "por dos puntos distintos de $\mathbb{P}_3$ pasa una única recta" es "dos planos distintos de $\mathbb{P}_3$ se cortan en una única recta".

(b) En un espacio proyectivo un *triángulo* es, por definición, la figura determinada por tres puntos no alineados (sus *vértices*), y se denominan *lados* del triángulo a las rectas que pasan por cada dos de sus vértices. En el plano proyectivo el triángulo es una figura *autodual* en el sentido de que dar tres puntos no alineados (los vértices) es equivalente a dar tres rectas que no pasen por un mismo punto (los lados). También es una figura autodual una recta en el espacio proyectivo $\mathbb{P}_3$. En $\mathbb{P}_3$, cuál es la figura dual de un triángulo?

(c) **Teorema de Desargues.** Este teorema afirma que si dos triángulos de un plano se corresponden de manera que las rectas que unen vértices correspondientes concurren en un punto, entonces los lados correspondientes se cortan en puntos que yacen sobre una misma recta (es decir, afirma que los puntos L, M y N de la figura 3.1 están alineados).

El enunciado dual de este teorema es el siguiente: "si dos triángulos de un plano se corresponden de manera que los lados correspondientes se cortan en puntos alineados, entonces las rectas que unen vértices correspondientes concurren en un punto". Es decir, el enunciado dual del teorema de Desargues es precisamente el teorema recíproco, de modo que, en virtud del principio de dualidad, si se prueba el directo queda probado el recíproco.

Probemos el enunciado dual, esto es, siguiendo la notación de la figura 3.1, pongamos $P = (A + A') \cap (B + B')$, supongamos que los puntos L, M y N están alineados, y probemos que entonces la recta $C + C'$ también pasa por P. Según el ejercicio 1.12, fijado un vector l representante del punto L, existen vectores a, b, a', b', m y n representantes de los puntos A, B, A', B', M y N, respectivamente, tales que

$$l = a + b = a' + b' = m + n\,. \tag{3.1}$$

Como el vector $a - a'$ representa a un punto de la recta $\pi(\langle a, a' \rangle) = A + A'$, y el vector $b' - b$ representa a un punto de la recta $B + B'$, de (3.1) se sigue que el vector $p := a - a' = b' - b$

representa al punto $(A+A')\cap(B+B')=P$. Del mismo modo, $c:=a-n=m-b$ representa a $(A+N)\cap(B+M)=C$ y $c':=n-a'=b'-m$ representa a $(N+A')\cap(M+B')=C'$. De la igualdad $c+c'-p=0$ concluimos que C, C' y P están alineados.

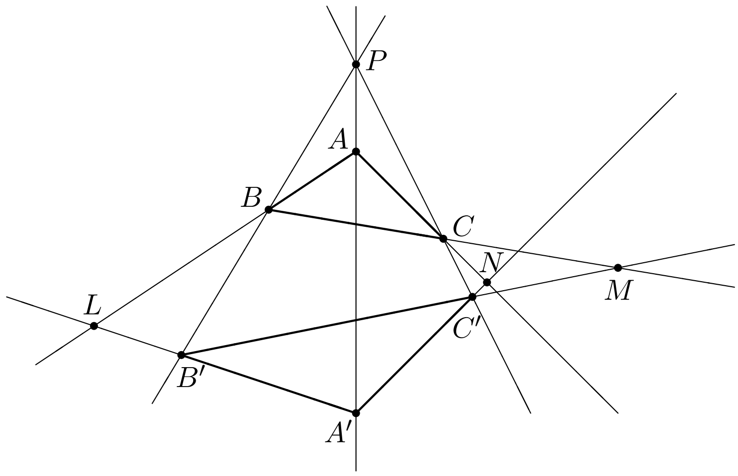

Figura 3.1

4 Problemas

4.1 Sean r y r' dos rectas distintas de un plano proyectivo y denotemos $P=r\cap r'$. Dada una proyectividad $\tau:r\to r'$, si $\tau(P)=P$ entonces τ es una perspectividad, y si $\tau(P)\neq P$ entonces τ puede ponerse como producto de dos perspectividades.

4.2 Se denomina *homografía* a toda proyectividad de una recta proyectiva en sí misma. Una homografía distinta de la identidad tiene a lo sumo dos puntos fijos (ó dobles, ó invariantes).

Sea r una recta de un plano proyectivo y sea τ una homografía suya. Si τ tiene algún punto fijo entonces es producto de dos perspectividades, y si τ no tiene puntos fijos entonces es producto de tres perspectividaddes.

4.3 Cuál es la noción dual de "perspectividad de vértice un punto entre dos rectas distintas de un plano proyectivo"? Establézcanse los enunciados duales de los problemas 4.1 y 4.2.

4.4 Llamaremos *involución* a toda proyectividad de un espacio proyectivo en sí mismo que coincida con su inversa.

Sea τ una homografía de una recta proyectiva $\mathbb{P}(E)$ y sea $T:E\to E$ un representante lineal de suyo. Pruébese que τ es una involución si y sólo si $\operatorname{tra} T=0$.[1]

[1] Recordemos que la *traza* de un endomorfismo $f:F\to F$ de un espacio vectorial de dimensión finita, que denotaremos $\operatorname{tra} f$, es un escalar invariante de f que se obtiene sumando los elementos de la diagonal de la expresión matricial de f en una base cualquiera de F.

4.5 Si τ es una homografía tal que τ^2 tiene más puntos dobles que τ, entonces es una involución. Dedúzcase de lo anterior que para que τ sea una involución basta con que tenga un par de puntos distintos en involución ($A \neq B$ tales que $\tau(A) = B$ y $\tau(B) = A$).

4.6 Se denomina *homología* a toda autoproyectividad (distinta de la identidad) de un espacio proyectivo de dimensión $n \geq 2$ que tenga un hiperplano de puntos fijos, llamado *eje* de la homología. Dada una homología $\varphi : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ cuyo eje es el hiperplano H, tenemos:

(a) Si conocemos H y las imágenes de dos puntos distintos $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_n$ que no están en H, entonces tenemos totalmente determinada la homología φ. Como consecuencia se sigue que φ tiene fuera de H a lo sumo un punto fijo. (Si no tiene ninguno se dice que φ es una *homología especial*, y si tiene uno se dice que es una *homología no especial*.)

(b) Existe un único punto $P_0 \in \mathbb{P}_n$ para el que se satisfacen las propiedades equivalentes: (i) si $P \in \mathbb{P}_n$ es un punto no invariante por φ entonces la recta $P + \varphi(P)$ pasa por P_0; (ii) toda recta que pasa por P_0 es invariante por φ. Dicho punto P_0, que es fijo para φ, se denomina *vértice* de la homología φ. Si φ es especial entonces $P_0 \in H$, y cuando φ es no especial P_0 es el único punto fijo que φ tiene fuera de H.

4.7 Teorema de Pappus: En un plano, si A_1, A_2, A_3 y B_1, B_2, B_3 son dos ternas de puntos alineados y distintos, situadas en rectas no coincidentes, entonces los tres puntos $(A_i + B_j) \cap (A_j + B_i)$, $i \neq j$, están alineados. (Véase la figura 4.1.)

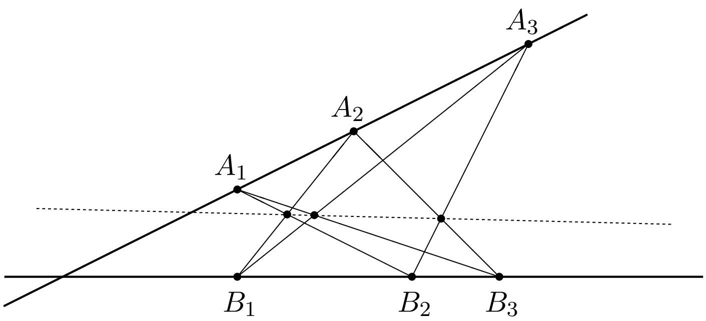

Figura 4.1

4.8 Teorema del eje transversal: Sea $\sigma : r \to s$ una proyectividad entre dos rectas distintas de un plano proyectivo. Dados dos puntos distintos A y B sobre la recta r, sea P el punto de intersección de las rectas $A + \sigma(B)$ y $B + \sigma(A)$. Cuando A y B recorren la recta r, el punto P describe una recta fija llamada *eje transversal* de la proyectividad σ. Cuándo pasará el eje transversal por el punto de corte de las rectas r y s? [Indicación: Utilícese el teorema de Pappus.]

4.9 Dedúzcase del teorema del eje transversal un método para construir gráficamente (esto es, utilizando sólo una regla) la imagen de un punto cualquiera en una proyectividad entre dos rectas distintas de $\mathbb{P}_2$ de la que se conocen las imágenes de tres puntos distintos. Es posible dar una construcción análoga en el caso de una homografía de una recta de $\mathbb{P}_2$?

4.10 Si X es una subvariedad lineal de dimensión $n-2$ de un espacio proyectivo $\mathbb{P}_n$ (por ejemplo, X es un punto de un plano proyectivo), entonces $\mathbb{P}_n/X$ y X° son rectas proyectivas y la aplicación $\mathbb{P}_n/X \to X^\circ$, $H \mapsto H^\circ$, es una proyectividad.

4.11 En un plano proyectivo, dados dos puntos distintos A, B y una recta r que no pasa por ellos, determínese el punto $P = (A+B) \cap r$ sin trazar la recta $A+B$.

4.12 En un plano proyectivo, sean r y s dos rectas fijas y distintas, y sean L, M y N tres puntos alineados, fijos y distintos, ninguno de ellos pertenecientes a $r \cup s$.

Dos vértices A y B de un triángulo A, B, C se deslizan respectivamente sobre las rectas r y s, en tanto que los tres lados a, b y c pasan respectivamente por los puntos L, M y N. Hállese el lugar geométrico del vértice C. Enúnciese el problema dual.

4.13 Sean r y r' dos rectas distintas de un plano proyectivo real, $\tau : r \to r'$ una proyectividad, y P un punto del eje transversal de τ. Si φ denota la perspectividad de r' en r con vértice en P, entonces $\varphi\tau : r \to r$ es una involución que tiene dos puntos dobles cuando τ es una perspectividad.

4.14 Sea $\tau : r \to r'$ una proyectividad entre dos rectas distintas del plano proyectivo $\mathbb{P}_2$. Dado un punto $P \in \mathbb{P}_2$ que no está en $r \cup r'$, seccionando la radiación $\mathbb{P}_2/P$ con r, aplicando después τ, y proyectanto por último r' desde P, tenemos definida una homografía de la recta proyectiva $\mathbb{P}_2/P$. Calcúlese el lugar geométrico de los puntos P para los que dicha homografía es involutiva.

4.15 Sea $\varphi : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E)$ una autoproyectividad. Una subvariedad lineal X de $\mathbb{P}(E)$ es *invariante* por φ si $\varphi(X) = X$. Si X es una subvariedad de puntos fijos (todo punto suyo es invariante), entonces X es invariante. Se comprueba con ejemplos sencillos que el recíproco de la anterior afirmación es falso.

El estudio de los puntos fijos de una proyectividad es equivalente al estudio de los hiperplanos invariantes por la misma proyectividad en el siguiente sentido: la “cantidad” de puntos fijos de φ es igual a la “cantidad” de hiperplanos invariantes por φ. Por ejemplo: φ carece de puntos fijos si y sólo si φ carece de hiperplanos invariantes; φ tiene un único punto fijo si y sólo si φ tiene un único hiperplano invariante; φ tiene un hiperplano de puntos fijos si y sólo si existe un punto tal que todo hiperplano que pasa por él es invariante por φ (caso de las homologías); en dimensión 2, φ tiene 3 puntos no alineados fijos si y sólo si hay tres rectas no concurrentes que son invariantes por φ; en dimensión 2, los puntos fijos por φ son todos los de una recta y otro que no está en esa recta si y sólo si las rectas invariantes por φ son todas las que pasan por un punto y otra que no pasa por ese punto; en dimensión 3, hay una recta cuyos puntos son fijos por φ si y sólo si hay una recta tal que todos los planos que pasan por ella son invariantes por φ; en dimensión 3, φ tiene tres puntos no alineados fijos si y sólo si hay tres planos que no se cortan en una recta que son invariantes por φ; etc.

Dado un representante lineal $T : E \to E$ de φ, es claro que el estudio de las “subvariedades de puntos fijos” para la proyectividad φ se corresponde con el estudio de los “subespacios de vectores propios” de T. Como consecuencia, la afirmación hecha en el párrafo anterior se sigue de las siguientes propiedades:

(a) Los hiperplanos vectoriales de E que son invariantes por T están en correspondencia biunívoca (tomando incidentes) con las rectas vectoriales de E^* que son invariantes por el automorfismo dual $T^* : E^* \to E^*$. Concrétamente, para cada forma lineal no nula ω sobre E tenemos:

$$T(\operatorname{Ker}\omega) = \operatorname{Ker}\omega \qquad \iff \qquad \langle T^*(\omega)\rangle = \langle\omega\rangle\,.$$

(b) Es conocido que T y T^* tienen los mismos valores propios (porque tienen el mismo polinomio característico). Si $\lambda \in k^*$ es un valor propio para T y T^*, entonces el subespacio propio de T asociado a λ y el subespacio propio de T^* asociado a λ tienen la misma dimensión:

$$\dim(\operatorname{Ker}(T-\lambda)) = \dim(\operatorname{Ker}(T^*-\lambda))\,.$$