Capítulo V

Métricas

En este capítulo y en los siguientes, el cuerpo base de los espacios vectoriales que se consideren será de característica distinta de 2.

Empecemos recordando las nociones básicas que supondremos conocidas relativas a las métricas. Una *métrica* (*tensor covariante de orden* 2) sobre un k-espacio vectorial E es una aplicación $T_2 : E \times E \to k$ que es bilineal. Una métrica T_2 sobre E se dice que es *simétrica* si cumple $T_2(e, e') = T_2(e', e)$ para cualesquiera $e, e' \in E$, y se dice que es *hemisimétrica* si $T_2(e, e) = 0$ para todo $e \in E$. Tenemos la implicación "T_2 hemisimétrica $\Rightarrow$ $T_2(e, e') = -T_2(e', e)$ cualesquiera que sean $e, e' \in E$"; además, por ser k de característica distinta de 2, la anterior implicación es una equivalencia.

Supongamos fijada una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ en E. Dada una métrica T_2 sobre E, la matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$ definida por las igualdades

$$a_{ij} = T_2(e_i, e_j)\,, \qquad i, j \in \{1, \dots, n\}\,,$$

se conoce como *matriz de la métrica* T_2 *en la base* $\{e_1, \dots, e_n\}$ y se utiliza como sigue: dados $e, e' \in E$, si $e = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$ y $e' = \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n$ entonces

$$T_2(e, e') = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\, A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Si $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ es otra base de E y $A' \in M_n(k)$ es la matriz de T_2 en ella, entonces se cumple la fórmula de cambio de base

$$A' = C^t A C\,,$$

siendo C la matriz de cambio de la base $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ a la base $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Por último, si $T_2(E)$ denota el espacio vectorial de las métricas sobre E, entonces la aplicación $\phi : T_2(E) \to M_n(k)$ que asigna a cada métrica sobre E su matriz en la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ es un isomorfismo de k-espacios vectoriales. Además, una métrica T_2 sobre E es simétrica si y sólo la matriz $\phi(T_2)$ es simétrica (esto es, $\phi(T_2)$ concide con su traspuesta: $\phi(T_2) = \phi(T_2)^t$), y es hemisimétrica si y sólo si $\phi(T_2)$ es antisimétrica (esto es, $\phi(T_2)$ concide con la opuesta de su traspuesta: $\phi(T_2) = -\phi(T_2)^t$).

En general, una métrica puede no ser simétrica ni hemisimétrica, pero en lo que sigue SÓLO consideraremos métricas que sean simétricas ó hemisimétricas.

1 Restricción y Proyección de Métricas

Definiciones 1.1 Consideremos un espacio vectorial E dotado de una métrica T_2.

La restricción de T_2 a un subespacio vectorial E' de E define la métrica T_2' sobre E' dada por la igualdad $T_2'(e_1,e_2) := T_2(e_1,e_2),\ e_1,e_2 \in E'$. Es claro que T_2' es del mismo tipo que T_2, es decir, T_2' es simétrica si T_2 sea simétrica, y T_2' es hemisimétrica si T_2 es hemisimétrica.

Dada una aplicación lineal y epiyectiva $\pi : E \to \bar{E}$, diremos que la métrica T_2 es *proyectable* por π si existe una métrica $\bar{T}_2$ sobre $\bar{E}$ satisfaciendo

$$T_2(e_1,e_2) = \bar{T}_2(\pi(e_1),\pi(e_2))\,, \qquad e_1,e_2 \in E\,.$$

Cuando T_2 es proyectable por π, la métrica $\bar{T}_2$ sobre $\bar{E}$ que cumple la anterior propiedad es única y se denomina *proyección* de T_2 por el epimorfismo π; $\bar{T}_2$ es del mismo tipo que T_2.

Se define el *radical* de la métrica T_2 como el siguiente subespacio vectorial de E:

$$\operatorname{rad} T_2 := \{e \in E : T_2(e,e') = 0 \quad \forall\, e' \in E\} = \{e \in E : T_2(e',e) = 0 \quad \forall\, e' \in E\}\,;$$

la comprobación de que $\operatorname{rad} T_2$ es un subespacio de E es muy sencilla.

Proposición 1.2 *Si T_2 es una métrica sobre un espacio vectorial E y $\pi : E \to \bar{E}$ es un epimorfismo, entonces T_2 es proyectable por π si y sólo si* $\operatorname{Ker}\pi \subseteq \operatorname{rad} T_2$.

Demostración. Supongamos en primer lugar que T_2 es proyectable por π y sea $\bar{T}_2$ su proyección. Dado $e \in \operatorname{Ker}\pi$, para todo vector $e' \in E$ tenemos $T_2(e,e') = \bar{T}_2(\pi(e),\pi(e')) = \bar{T}_2(0,\pi(e')) = 0$ y por lo tanto $e \in \operatorname{rad} T_2$.

Supongamos ahora que $\operatorname{Ker}\pi \subseteq \operatorname{rad} T_2$ y probemos que T_2 es proyectable por π. Definimos la aplicación $\bar{T}_2 : \bar{E} \times \bar{E} \to k$ del siguiente modo: dados vectores $\bar{e}_1, \bar{e}_2 \in \bar{E}$,

$$\bar{T}_2(\bar{e}_1,\bar{e}_2) := T_2(e_1,e_2)\,,$$

donde $e_1,e_2 \in E$ son tales que $\pi(e_1) = \bar{e}_1$ y $\pi(e_2) = \bar{e}_2$. Veamos que $\bar{T}_2$ está bien definida, es decir, que la anterior igualdad no depende de los vectores e_1 y e_2 elegidos: si $e_1', e_2' \in E$ son vectores tales que $\pi(e_1') = \bar{e}_1 = \pi(e_1)$ y $\pi(e_2') = \bar{e}_2 = \pi(e_2)$, entonces existen $e_1'', e_2'' \in \operatorname{Ker}\pi \subseteq \operatorname{rad} T_2$ satisfaciendo $e_1' = e_1 + e_1''$, $e_2' = e_2 + e_2''$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} T_2(e_1',e_2') &= T_2(e_1+e_1'', e_2+e_2'') = T_2(e_1,e_2) + T_2(e_1,e_2'') + T_2(e_1'',e_2) + T_2(e_1'',e_2'') \\ &= T_2(e_1,e_2) + 0 + 0 + 0 = T_2(e_1,e_2)\,. \end{aligned}$$

Hemos definido una aplicación $\bar{T}_2 : \bar{E} \times \bar{E} \to k$ que cumple $T_2(e_1,e_2) = \bar{T}_2(\pi(e_1),\pi(e_2))$ para cualesquiera $e_1,e_2 \in E$, y se comprueba fácilmente que dicha aplicación es una métrica (porque π es lineal y T_2 es bilineal); por lo tanto T_2 es proyectable por π. ∎

Definición 1.3 Diremos que una métrica T_2 sobre un espacio vectorial E es *no singular* si $\operatorname{rad} T_2 = 0$. Cuando $\operatorname{rad} T_2 \neq 0$ se dice que T_2 es singular.

Ejercicio 1.4 Si T_2 es una métrica sobre un espacio vectorial E que es singular, entonces podemos proyectarla para hacerla no singular de la siguiente manera: si consideramos el morfismo de paso al cociente $\pi : E \to E/(\operatorname{rad} T_2)$, entonces $\operatorname{Ker}\pi = \operatorname{rad} T_2$ y según 1.2 tenemos que T_2 es proyectable por π a una métrica $\bar{T}_2$ sobre $E/(\operatorname{rad} T_2)$; esta nueva métrica es no singular.

Definición 1.5 Sea T_2 una métrica sobre un espacio vectorial E. Un vector $e \in E$ se dice que es *isótropo* (para la métrica T_2) si $T_2(e,e) = 0$. Diremos que E es *totalmente isótropo* (para la métrica T_2) si $\operatorname{rad} T_2 = E$, es decir, si T_2 es la métrica identicamente nula sobre E.

Lema 1.6 *Para una métrica simétrica T_2 sobre un espacio vectorial E tenemos: E es totalmente isótropo si y sólo si todo vector de E es isótropo.*

Demostración. Es claro que todo vector de E es isótropo cuando E es totalmente isótropo. Para probar el recíproco basta tener en cuenta que dados $e_1, e_2 \in E$ tenemos la igualdad

$$T_2(e_1,e_2) = \frac{1}{2}\Big[T_2(e_1+e_2, e_1+e_2) - T_2(e_1,e_1) - T_2(e_2,e_2)\Big]$$

por ser T_2 simétrica. ▮

Observación **1.7** El lema 1.6 no es cierto para las métricas hemisimétricas (para una métrica hemisimétrica todo vector es isótropo).

1.8 Sea (E, T_2) un espacio vectorial dotado de una métrica. Dado un subespacio vectorial E' de E, en lo que sigue (y siempre que no haya motivo de confusión) el subespacio $\operatorname{rad} T_2'$ de E' lo denotaremos $\operatorname{rad} E'$ y lo llamaremos "radical de E'" (donde T_2' es la métrica de E restringida a E'), y diremos que E' es un "subespacio totalmente isótropo" de E cuando $\operatorname{rad} E' = E'$ (es decir, cuando la restricción de la métrica de E a E' sea la métrica nula). Por ejemplo, $\operatorname{rad} E$ es totalmente isótropo y por tanto $\operatorname{rad}(\operatorname{rad} E) = \operatorname{rad} E$.

Definiciones 1.9 Sea (E, T_2) un espacio vectorial dotado de una métrica. Dos vectores e_1, e_2 de E se dice que son *ortogonales* (para la métrica T_2) si $T_2(e_1, e_2) = 0$; nótese que los vectores isótropos son los ortogonales a sí mismos. Diremos que dos subespacios vectoriales F_1, F_2 de E son ortogonales si $T_2(e_1,e_2) = 0$ cualesquiera que sean $e_1 \in F_1$, $e_2 \in F_2$.

Para cada subespacio vectorial F de E, es fácil ver que el conjunto

$$F^\perp = \{e \in E \,:\, T_2(e,v) = 0 \text{ para todo } v \in F\} = \{e \in E \,:\, T_2(v,e) = 0 \text{ para todo } v \in F\}$$

es también un subespacio vectorial, el cual se conoce como *subespacio ortogonal* de F.

Diremos que dos subespacios vectoriales E' y E'' de E están en *suma ortogonal* si están en suma directa y son ortogonales, en cuyo caso su suma se denota $E' \perp E''$.

1.10 Sea (E, T_2) un espacio vectorial dotado de una métrica. Comentemos algunas propiedades sencillas que nos serán muy útiles en todo lo que sigue:

(i) Dados subespacios vectoriales F_1, F_2 de E es trivial la implicación: "$F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow F_2^\perp \subseteq F_1^\perp$". También es claro que F_1 y F_2 son ortogonales si y sólo si $F_1 \subseteq F_2^\perp$, y como la relación "ser ortogonales" es simétrica obtenemos: "$F_1 \subseteq F_2^\perp \;\Leftrightarrow\; F_2 \subseteq F_1^\perp$".

(ii) Consideremos una descomposición $E = F \perp G$. Si $\{e_1, \dots, e_r\}$ es una base de F y $\{v_1, \dots, v_s\}$ es una base de G, entonces $\{e_1, \dots, e_r, v_1, \dots, v_s\}$ es una base de E respecto de la cual la matriz de T_2 es

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

donde A_1 es la matriz en la base $\{e_1, \dots, e_r\}$ de la restricción de T_2 a F y A_2 es la matriz en la base $\{v_1, \dots, v_s\}$ de la restricción de T_2 a G (compruébese).

Es claro cómo generalizar lo dicho aquí cuando tenemos una descomposición de la forma $E = F_1 \perp \cdots \perp F_m$.

Proposición 1.11 *El radical de una suma ortogonal es igual a la suma ortogonal de los radicales. Es decir, si T_2 es una métrica sobre un espacio vectorial E, y E', E'' son subespacios vectoriales de E que están en suma ortogonal, entonces*

$$\operatorname{rad}(E' \perp E'') = \operatorname{rad} E' \perp \operatorname{rad} E''\,.$$

Demostración. Sean E' y E'' como en el enunciado. Es claro que $\operatorname{rad} E'$ y $\operatorname{rad} E''$ están en suma ortogonal (porque $\operatorname{rad} E' \subseteq E'$ y $\operatorname{rad} E'' \subseteq E''$).

Sea $e \in \operatorname{rad}(E' \perp E'') \subseteq E' \perp E''$ y sean $e' \in E'$, $e'' \in E''$ tales que $e = e' + e''$. Dado $e_1 \in E'$ tenemos $0 = T_2(e, e_1) = T_2(e', e_1) + T_2(e'', e_1) = T_2(e', e_1) + 0$ y por lo tanto $T_2(e', e_1) = 0$, es decir, $e' \in \operatorname{rad} E'$. Del mismo modo se prueba que $e'' \in \operatorname{rad} E''$, y por lo tanto debe ser $e \in \operatorname{rad} E' \perp \operatorname{rad} E''$.

Sea ahora $e \in \operatorname{rad} E' \perp \operatorname{rad} E''$ y sean $e' \in \operatorname{rad} E'$ y $e'' \in \operatorname{rad} E''$ tales que $e = e' + e''$. Si $\bar{e} \in E' \perp E''$, entonces existen $e_1 \in E'$ y $e_2 \in E''$ tales que $\bar{e} = e_1 + e_2$ y obtenemos

$$T_2(e, \bar{e}) = T_2(e', e_1) + T_2(e', e_2) + T_2(e'', e_1) + T_2(e'', e_2) = 0 + 0 + 0 + 0 = 0\,,$$

esto es, $e \in \operatorname{rad}(E' \perp E'')$. ∎

Definición 1.12 Una aplicación lineal $T : (E, T_2) \to (\bar{E}, \bar{T}_2)$ entre espacios vectoriales dotados de métricas se dice que es una *isometría*, si es un isomorfismo que satisface: $T_2(e_1, e_2) = \bar{T}_2(T(e_1), T(e_2))$ cualesquiera que sean $e_1, e_2 \in E$.

Dos espacios vectoriales dotados de métricas se dicen que son *isométricos* si existe entre ellos alguna isometría.

Ejercicio 1.13 Las isometrías conservan todas las propiedades definidas a partir de la métrica. Por ejemplo, si $T : (E, T_2) \to (\bar{E}, \bar{T}_2)$ es una isometría y F es un subespacio vectorial de E, entonces $T(F^\perp) = T(F)^\perp$, $T(\operatorname{rad} F) = \operatorname{rad} T(F)$, F es totalmente isótropo si y sólo si $T(F)$ es totalmente isótropo, e es un vector isótropo de E si y sólo si $T(e)$ es un vector isótropo de $\bar{E}$, si $F = F_1 \perp F_2$ entonces $T(F) = T(F_1) \perp T(F_2)$, etc.

1.14 Muy a menudo construiremos isometrías del siguiente modo. Dados espacios vectoriales dotados de sendas métricas, (E, T_2) y (E', T_2'), sean F, V subespacios vectoriales de E que están en suma ortogonal, y sean F', V' subespacios vectoriales de E' que están en suma ortogonal. Si $\sigma : F \to F'$ y $\tau : V \to V'$ son isometrías, entonces también es isometría la aplicación

$$\begin{aligned} \sigma \oplus \tau : F \perp V &\;\to\; F' \perp V' \\ e + v &\;\mapsto\; \sigma(e) + \tau(v) \end{aligned}$$

(donde cada subespacio vectorial se considera con la correspondiente métrica restringida).

Ejemplo 1.15 Sea T_2 una métrica no singular sobre un espacio vectorial E y sea F un subespacio vectorial de E. Supongamos que F es no singular, en cuyo caso tenemos $E = F \perp F^\perp$ (según probaremos en 2.3). Si $I_F : F \to F$ es el endomorfismo identidad de F e $I_{F^\perp} : F^\perp \to F^\perp$ denota el endomorfismo identidad de $F^\perp$, entonces se define la *simetría respecto de* F como la única aplicación $E = F \perp F^\perp \to F \perp F^\perp = E$ que sobre F coincide con I_F y sobre $F^\perp$ es igual a $-I_{F^\perp}$. Es inmediato comprobar que I_F y $-I_{F^\perp}$ son isometrías, así que la simetría respecto de F es también una isometría.

Teorema 1.16 *Todo espacio vectorial dotado de una métrica descompone de modo único (salvo isometrías) en suma ortogonal de un espacio totalmente isótropo y un espacio no singular. Concrétamente, dada una métrica T_2 sobre un espacio vectorial E, la parte totalmente isótropa es* $\operatorname{rad} E$ *y la parte no singular es isométrica al espacio vectorial* $E/(\operatorname{rad} T_2)$ *dotado de la métrica T_2 proyectada sobre él:*

$$E = \operatorname{rad} E \perp (E/\operatorname{rad} E)\,.$$

Demostración. Con la notación del enunciado, consideremos un subespacio vectorial E' de E que sea suplementario de $\operatorname{rad} E$, de modo que entonces es clara la igualdad $E = \operatorname{rad} E \perp E'$. Además E' es no singular, ya que por 1.11 tenemos

$$\operatorname{rad} E = \operatorname{rad}(\operatorname{rad} E \perp E') = \operatorname{rad}(\operatorname{rad} E) \perp \operatorname{rad} E' = \operatorname{rad} E \perp \operatorname{rad} E'$$

y por lo tanto $\operatorname{rad} E' \subseteq \operatorname{rad} E \cap E' = 0$.

Probemos la unicidad. Sean E_1 y E_2 subespacios vectoriales de E tales que $E = E_1 \perp E_2$, con E_1 totalmente isótropo y E_2 no singular. Por una parte, tomando radicales obtenemos $\operatorname{rad} E = E_1$. Por otra parte, si $\sigma : E_2 \to E/(\operatorname{rad} E)$ es la composición de la inclusión $i : E_2 \hookrightarrow E$ y el paso al cociente $\pi : E \to E/E_1 = E/(\operatorname{rad} E)$, entonces es claro que σ es un isomorfismo; además σ es una isometría, ya que dados $e_2, e_2' \in E_2$ tenemos

$$\bar{T}_2\Big(\sigma(e_2), \sigma(e_2')\Big) = \bar{T}_2\Big(\pi(i(e_2)), \pi(i(e_2'))\Big) = T_2\Big(i(e_2), i(e_2')\Big) = T_2(e_2, e_2')\,,$$

donde $\bar{T}_2$ es la métrica T_2 proyectada sobre $E/(\operatorname{rad} E)$. ∎

2 Polaridad Asociada a una Métrica

Definición 2.1 Sea (E, T_2) un espacio vectorial dotado de una métrica. Cada vector $e \in E$ define la forma lineal $\phi(e) : E \to k$, $v \mapsto \phi(e)(v) := T_2(e, v)$. De este modo tenemos la aplicación

$$\begin{aligned} \phi : E &\longrightarrow E^* \\ e &\longmapsto \phi(e) = T_2(e, \cdot\,)\,, \end{aligned}$$

que es lineal y se denomina *polaridad asociada* a la métrica T_2. La polaridad determina totalmente a la métrica, ya que dados $e_1, e_2 \in E$ se tiene $T_2(e_1, e_2) = \phi(e_1)(e_2)$.

Ejercicio 2.2 Con la notación de la definición 2.1 tenemos:

(a) $\operatorname{Ker} \phi = \operatorname{rad} T_2$ y como consecuencia

$$T_2 \text{ es no singular} \iff \phi \text{ es isomorfismo}\,.$$

(b) Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de E y $A = (T_2(e_i, e_j))$ es la matriz de T_2 en dicha base, entonces la matriz de ϕ en la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ y en su base dual es A^t; como consecuencia obtenemos

$$T_2 \text{ es no singular} \quad \Longleftrightarrow \quad |A| \neq 0\,.$$

(c) Para cada subespacio vectorial F de E se cumplen $F^\perp = \phi^{-1}(F^\circ)$ y $F \cap F^\perp = \operatorname{rad} F$; en particular $\operatorname{rad} E = E^\perp$.

Proposición 2.3 *Sea T_2 una métrica no singular sobre un espacio vectorial E. Para cada subespacio vectorial F de E tenemos:*

(i) $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$*;*

(ii) $(F^\perp)^\perp = F$*;*

(iii) *si F es también no singular (es decir, si* $\operatorname{rad} F = 0$*), entonces $E = F \perp F^\perp$.*

Demostración. Por ser T_2 no singular, su polaridad asociada es un isomorfismo y por lo tanto $\dim F^\perp = \dim F^\circ = \dim E - \dim F$ (véase 2.2 (c)), lo cual prueba (i).

Para demostrar (ii) basta tener en cuenta la inclusión $F \subseteq (F^\perp)^\perp$, ya que según (i) tenemos $\dim (F^\perp)^\perp = \dim E - \dim F^\perp = \dim F$.

Supongamos por último que F es no singular, en cuyo caso F y $F^\perp$ están en suma ortogonal porque están en suma directa ($F \cap F^\perp = \operatorname{rad} F = 0$ según 2.2 (c)); basta entonces tener en cuenta que $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ para obtener la igualdad $E = F \perp F^\perp$. ∎

Corolario 2.4 *Sea T_2 una métrica no singular sobre E. Si F y G son subespacios vectoriales de E tales que $E = F \perp G$, entonces F y G son no singulares y $F^\perp = G$ (y $G^\perp = F$).*

Demostración. Basta tomar radicales para lo primero y aplicar las propiedades de la dimensión para lo segundo. ∎

3 Teorema de Witt: Índice de una Métrica Simétrica

Definiciones 3.1 Sea (E, T_2) un espacio vectorial dotado de una métrica.

Diremos que E (dotado con la métrica T_2) es un *espacio elíptico* si carece de vectores isótropos no nulos, es decir, si se cumple la implicación: $e \in E\,,\ T_2(e,e) = 0 \ \Rightarrow\ e = 0\,.$ Claramente, si E es un espacio elíptico entonces T_2 es simétrica (para una métrica hemisimétrica todo vector es isótropo) y no singular ($e \in \operatorname{rad} E \ \Rightarrow\ e$ isótropo).

Diremos que E es un *plano hiperbólico* si es un espacio no singular y no elíptico de dimensión igual a 2.

Dados vectores $e, e' \in E$, diremos que (e, e') es un *par hiperbólico* si se cumplen:

$$T_2(e,e) = T_2(e',e') = 0\,, \qquad T_2(e,e') = 1\,.$$

Lema 3.2 *Si (E, T_2) es un espacio vectorial dotado de una métrica, entonces E es un plano hiperbólico si y sólo si tiene una base $\{e_1, e_2\}$ tal que (e_1, e_2) es un par hiperbólico.*

Demostración. Si $\{e_1, e_2\}$ es una base de E tal que (e_1, e_2) es un par hiperbólico, entonces la matriz de la métrica T_2 en esa base es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ si } T_2 \text{ es simétrica}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ si } T_2 \text{ es hemisimétrica}.$$

Es obvio entonces que E es no singular, no elíptico y de dimensión 2.

Supongamos ahora que E es un plano hiperbólico. Sea $e_1 \in E$ tal que e_1 es no nulo e isótropo, y consideremos otro vector $e \in E$ tal que $\{e_1, e\}$ es una base de E. Observemos que $T_2(e_1, e) \neq 0$, ya que si $T_2(e_1, e) = 0$ entonces $e_1 \in \operatorname{rad} E$, en contra de la hipótesis $\operatorname{rad} E = 0$. Busquemos un vector $e' \in E$ que sea linealmente independiente con e_1 y que satisfaga $T_2(e', e') = 0$. Si $T_2(e, e) = 0$ tomamos $e' = e$; si $T_2(e, e) \neq 0$, en cuyo caso T_2 debe ser simétrica, busquemos $e' = e_1 + \lambda e$ con $\lambda \neq 0$ y tal que $T_2(e', e') = 0$:

$$0 = T_2(e', e') = T_2(e_1 + \lambda e, e_1 + \lambda e) = \lambda\Big[2T_2(e_1, e) + \lambda T_2(e, e)\Big],$$

por lo tanto $\lambda = -2T_2(e_1, e)/T_2(e, e)$. Para terminar, como $\mu = T_2(e_1, e') \neq 0$, basta tomar $e_2 = \mu^{-1}e'$ para obtener que $\{e_1, e_2\}$ es una base de E tal que (e_1, e_2) es un par hiperbólico. ∎

Definición 3.3 Sea (E, T_2) un espacio vectorial dotado de una métrica. Diremos que E es un *espacio hiperbólico* si puede ponerse como suma ortogonal de planos hiperbólico, es decir, si existen vectores $e_1, \dots, e_n, e'_1, \dots, e'_n \in E$ tales que

$$E = \langle e_1, e'_1 \rangle \perp \cdots \perp \langle e_n, e'_n \rangle,$$

$$T_2(e_i, e_i) = T_2(e'_i, e'_i) = 0 \quad \text{y} \quad T_2(e_i, e'_i) = 1 \qquad (i = 1, \dots, n).$$

De la definición se sigue que todo espacio hiperbólico tiene dimensión par ($\dim E = 2n$) y es no singular (véase 1.11):

$$\operatorname{rad} E = \operatorname{rad}\Big(\langle e_1, e'_1 \rangle \perp \cdots \perp \langle e_n, e'_n \rangle\Big) = 0 \perp \cdots \perp 0 = 0.$$

Lema 3.4 *Sean (E, T_2) y $(\bar{E}, \bar{T}_2)$ espacios hiperbólicos con T_2 y $\bar{T}_2$ métricas del mismo tipo. La condición necesaria y suficiente para que E y $\bar{E}$ sean isométricos es que tengan la misma dimensión.*

Demostración. Supongamos que existe un entero positivo n tal que $\dim E = \dim \bar{E} = 2n$, y pongamos E y $\bar{E}$ como suma ortogonal de planos generados por pares hiperbólicos

$$E = \langle e_1, e'_1 \rangle \perp \cdots \perp \langle e_n, e'_n \rangle, \qquad \bar{E} = \langle \bar{e}_1, \bar{e}'_1 \rangle \perp \cdots \perp \langle \bar{e}_n, \bar{e}'_n \rangle.$$

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ tenemos que la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \sigma_i \ : & \langle e_i, e'_i \rangle & \longrightarrow & \langle \bar{e}_i, \bar{e}'_i \rangle \\ & \alpha e_i + \beta e'_i & \longmapsto & \alpha \bar{e}_i + \beta \bar{e}'_i \end{array}$$

es una isometría (compruébese), de modo que

$$E = \langle e_1, e'_1 \rangle \perp \cdots \perp \langle e_n, e'_n \rangle \xrightarrow{\sigma_1 \oplus \cdots \oplus \sigma_n} \langle \bar{e}_1, \bar{e}'_1 \rangle \perp \cdots \perp \langle \bar{e}_n, \bar{e}'_n \rangle = \bar{E}$$

es una isometría (véase 1.14). ∎

Lema 3.5 *Sea (E, T_2) un espacio vectorial dotado de una métrica no singular. Cada subespacio totalmente isótropo de E se sumerge en un subespacio hiperbólico de dimensión doble. Más concretamente, si F es un subespacio totalmente isótropo de E y $\{e_1, \dots, e_m\}$ es una base de F, entonces existen vectores $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ en E tales que cada par (e_i, e'_i) es hiperbólico y los subespacio $\langle e_1, e'_1\rangle, \dots, \langle e_m, e'_m\rangle$ están en suma ortogonal. En particular, si $H = \langle e_1, e'_1\rangle \perp \cdots \perp \langle e_m, e'_m\rangle$, entonces H es un subespacio hiperbólico de E tal que $F \subseteq H$ y $\dim H = 2 \cdot \dim F$.*

Demostración. Procedamos por inducción sobre $m = \dim F$. Si $m = 1$, como la métrica es no singular, existirá $v \in E$ satisfaciendo $T_2(e_1, v) \neq 0$, y por lo tanto $\langle e_1, v\rangle$ es un plano hiperbólico (compruébese). En este caso sabemos cómo construir una base $\{e_1, e'_1\}$ de $\langle e_1, v\rangle$ tal que (e_1, e'_1) es un par hiperbólico (véase el lema 3.2).

Sea ahora $m > 1$ y supongamos cierto el enunciado para subespacios totalmente isótropos de dimensión $m-1$. Según 2.3 (i) el subespacio $\langle e_1, \dots, e_m\rangle^\perp$ está estrictamente contenido en el subespacio $\langle e_2, \dots, e_m\rangle^\perp$, es decir, existe un vector v que es ortogonal a la familia de vectores $\{e_2, \dots, e_m\}$ y que no es ortogonal al vector e_1. Entonces $\langle e_1, v\rangle$ es un plano hiperbólico (compruébese) y $\langle e_2, \dots, e_m\rangle \subseteq \langle e_1, v\rangle^\perp$; sea e'_1 un vector tal que (e_1, e'_1) es un par hiperbólico y $\langle e_1, v\rangle = \langle e_1, e'_1\rangle$.

Si denotamos $E' = \langle e_1, e'_1\rangle^\perp$ y $F' = \langle e_2, \dots, e_m\rangle$, entonces E' es un espacio no singular y F' es un subespacio totalmente isótropo de E' tal que $\{e_2, \dots, e_m\}$ es una base de F'. Aplicando la hipótesis de inducción obtenemos que existen vectores $e'_2, \dots, e'_m \in E'$ tales que $(e_2, e'_2), \dots, (e_m, e'_m)$ son pares hiperbólicos y $H' = \langle e_2, e'_2\rangle \perp \cdots \perp \langle e_m, e'_m\rangle$ es un subespacio hiperbólico de E'; en particular H' y $\langle e_1, e'_1\rangle$ están en suma ortogonal y por lo tanto $F \subseteq \langle e_1, e'_1\rangle \perp H' = \langle e_1, e'_1\rangle \perp \cdots \perp \langle e_m, e'_m\rangle$. ∎

Teorema 3.6 (Teorema de Witt) *Sea (E, T_2) un espacio vectorial dotado de una métrica simétrica no singular. Toda isometría $\sigma : E_1 \to E_2$ entre subespacios de E puede extenderse a una isometría $\bar{\sigma} : E \to E$.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que E_1 es no singular y probemos el teorema por inducción sobre la dimensión de E_1.

Cuando $\dim E_1 = 1$ podemos poner $E_1 = \langle e_1\rangle$ y $E_2 = \langle e_2\rangle$, con $e_2 = \sigma(e_1)$ y e_1, e_2 no isótropos (generan subespacios no singulares). Si $E_1 = E_2$ terminamos fácilmente, ya que $E = E_1 \perp E_1^\perp$ y la isometría buscada es

$$E = E_1 \perp E_1^\perp \xrightarrow{\bar{\sigma} = \sigma \oplus I_{E_1^\perp}} E_1 \perp E_1^\perp = E\,,$$

donde $I_{E_1^\perp}$ es la identiad de $E_1^\perp$. Supongamos entonces que $E_1 \neq E_2$, en cuyo caso la dimensión del subespacio $F = \langle e_1, e_2\rangle$ es 2. Es claro que $\{e_1 - e_2, e_1 + e_2\}$ es una base de F formada por vectores ortogonales:

$$\begin{aligned} T_2(e_1 + e_2, e_1 - e_2) &= T_2(e_1, e_1) - T_2(e_1, e_2) + T_2(e_2, e_1) - T_2(e_2, e_2) \\ &= T_2(e_1, e_1) - T_2(\sigma(e_1), \sigma(e_1)) = 0 \end{aligned}$$

Si estos dos vectores fueran isótropos F sería totalmente isótropo, lo cual no puede ser porque en F hay vectores no isótropos. Supongamos por ejemplo que $e_1 - e_2$ no es isótropo; entonces tenemos la descomposición $E = \langle e_1 - e_2 \rangle \perp \langle e_1 - e_2 \rangle^{\perp}$ (porque el subespacio $\langle e_1 - e_2 \rangle$ es no singular), y la isometría buscada es la simetría respecto de $\langle e_1 - e_2 \rangle^{\perp}$ (véase 1.15):

$$\begin{array}{rcl} \bar{\sigma} : \langle e_1 - e_2 \rangle \perp \langle e_1 - e_2 \rangle^{\perp} & \longrightarrow & \langle e_1 - e_2 \rangle \perp \langle e_1 - e_2 \rangle^{\perp} \\ e + e' & \longmapsto & -e + e' \end{array} .$$

La isometría $\bar{\sigma}$ extiende a σ porque transforma e_1 en e_2:

$$e_1 = \frac{e_1 - e_2}{2} + \frac{e_1 + e_2}{2}, \qquad \bar{\sigma}(e_1) = \frac{-(e_1 - e_2)}{2} + \frac{e_1 + e_2}{2} = e_2 .$$

Si el vector $e_1 + e_2$ es no isótropo, entonces la simetría respecto de $\langle e_1 + e_2 \rangle$ es una isometría que extiende a σ.

Supongamos ahora que $\dim E_1 \geq 2$ y que el teorema es cierto para dimensiones menores que la de E_1. Descomponemos E_1 en suma ortogonal de dos subespacios no singulares, $E_1 = F_1 \perp G_1$, tales que $1 \leq \dim F_1 < \dim E_1$ (y por lo tanto $1 \leq \dim G_1 < \dim E_1$; compruébese que dicha descomposición puede hacerse); como $\sigma : E_1 \to E_2$ es una isometría, tendremos $E_2 = F_2 \perp G_2$, donde $F_2 = \sigma(F_1)$ y $G_2 = \sigma(G_1)$. Aplicando la hipótesis de inducción al subespacio no singular F_1 obtenemos que existe una isometría $\varphi : E \to E$ que extiende a $\sigma_{|_{F_1}} : F_1 \to F_2$; en particular, φ transforma $F_1^{\perp}$ en $F_2^{\perp}$ y por lo tanto tenemos una isometría $\varphi_{|_{F_1^{\perp}}} : F_1^{\perp} \to F_2^{\perp}$. Por una parte, como G_1 está dentro de $F_1^{\perp}$ tenemos la isometría $\varphi_{|_{G_1}} : G_1 \to \widetilde{G}$, donde $\widetilde{G} = \varphi(G_1)$ es un subespacio de $F_2^{\perp}$; por otra parte, $\sigma_{|_{G_1}} : G_1 \to G_2$ es también una isometría. Entonces $\sigma_{|_{G_1}} \circ (\varphi_{|_{G_1}})^{-1} : \widetilde{G} \to G_2$ es una isometría entre dos subespacios no singulares de $F_2^{\perp}$ tales que $\dim \widetilde{G} = \dim G_2 < \dim E_1$, y aplicando la hipótesis de inducción obtenemos que existe una isometría $\sigma' : F_2^{\perp} \to F_2^{\perp}$ que extiende a $\sigma_{|_{G_1}} \circ (\varphi_{|_{G_1}})^{-1}$. La isometría $\bar{\sigma} : E \to E$ buscada es:

$$\bar{\sigma}_{|_{F_1}} = \sigma_{|_{F_1}} , \qquad \bar{\sigma}_{|_{F_1^{\perp}}} = \sigma' \circ \varphi_{|_{F_1^{\perp}}} .$$

Veamos el caso general. Sea $E_1 = F_1 \perp G_1$ tal que $F_1 = \operatorname{rad} E_1$ y G_1 es no singular, en cuyo caso $F_2 = \sigma(F_1) = \operatorname{rad} E_2$, $G_2 = \sigma(G_1)$ y $E_2 = F_2 \perp G_2$. Sea $\{e_1, \dots, e_m\}$ una base de F_1 y sean $v_i = \sigma(e_i)$, $i = 1, \dots, m$, con lo que $\{v_1, \dots, v_m\}$ es una base de F_2. Como $F_1 \subseteq G_1^{\perp}$ (= ortogonal de G_1 dentro de E) y $G_1^{\perp}$ es no singular, del lema 3.5 se sigue que existen vectores $e'_1, \dots, e'_m$ en $G_1^{\perp}$ tales que cada par (e_i, e'_i) es hiperbólico y el subespacio $H_1 = \langle e_1, e'_1 \rangle \perp \cdots \perp \langle e_m, e'_m \rangle$ es hiperbólico. Análogamente, existen vectores $v'_1, \dots, v'_m$ en $G_2^{\perp}$ tales que cada par (v_i, v'_i) es hiperbólico y el subespacio $H_2 = \langle v_1, v'_1 \rangle \perp \cdots \perp \langle v_m, v'_m \rangle$ es hiperbólico. Tenemos las inclusiones $F_1 \subseteq H_1 \subseteq G_1^{\perp}$ y $F_2 \subseteq H_2 \subseteq G_2^{\perp}$, por lo que podemos considerar los espacios $E'_1 = H_1 \perp G_1$ ($\supseteq E_1$) y $E'_2 = H_2 \perp G_2$ ($\supseteq E_2$). La aplicación lineal $\sigma' : E'_1 \to E'_2$, que sobre G_1 coincide con σ y sobre H_1 manda cada e_i a v_i y cada e'_i a v'_i, es una isometría que extiende a σ. Para terminar basta tener en cuenta que E'_1 es no singular y por lo tanto (primera parte de la demostración) podemos extender σ' a una isometría $\bar{\sigma} : E \to E$. ▮

Corolario 3.7 (Teorema de cancelación) *Sea (E, T_2) un espacio vectorial dotado de una métrica simétrica no singular, y sean $E = E_1 \perp E_2 = F_1 \perp F_2$ dos descomposiciones de E en suma ortogonal de subespacios. Si E_1 y F_1 son isométricos, entonces E_2 y F_2 también son isométricos.*

Demostración. Sea $\sigma : E_1 \to F_1$ una isometría. Según el teorema 3.6 existe una isometría $\bar{\sigma} : E \to E$ que extiende a σ; como $\bar{\sigma}$ transforma E_1 en F_1, transformará el ortogonal de E_1 en el ortogonal de F_1 y por lo tanto tenemos una isometría $\bar{\sigma} : E_1^\perp \to F_1^\perp$; para concluir basta tener en cuenta que $E_1^\perp = E_2$ y $F_1^\perp = F_2$ (véase el corolario 2.4). ∎

Definición 3.8 Sea (E, T_2) un espacio vectorial dotado de una métrica. Diremos que un subespacio vectorial F de E es un *subespacio totalmente isótropo maximal*, si F es totalmente isótropo y no está contenido estrictamente en otro subespacio totalmente isótropo de E.

Corolario 3.9 *Sea (E, T_2) un espacio vectorial dotado de una métrica simétrica no singular. Todos los subespacios totalmente isótropos maximales de E tienen la misma dimensión.*

Demostración. Sean E_1 y E_2 dos subespacios totalmente isótropos maximales de E y supongamos, por ejemplo, que $\dim E_1 \leq \dim E_2$.

Consideremos una aplicación lineal e inyectiva arbitraria $\sigma : E_1 \to E_2$ y denotemos $F = \operatorname{Im} \sigma$; entonces el isomorfismo $\sigma : E_1 \to F$ es una isometría, pues al ser E_1 y F subespacios totalmente isótropos, σ conserva trivialmente la métrica. Según 3.6, podemos extender σ a una isometría $\bar{\sigma} : E \to E$, y aplicando $\bar{\sigma}^{-1}$ obtenemos

$$\left.\begin{array}{r} E_1 = \bar{\sigma}^{-1}(F) \subseteq \bar{\sigma}^{-1}(E_2) \\ E_2 \text{ totalmente isótropo } \Rightarrow \ \bar{\sigma}^{-1}(E_2) \text{ totalmente isótropo} \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ E_1 = \bar{\sigma}^{-1}(E_2)\,,$$

y por lo tanto $\dim E_1 = \dim(\bar{\sigma}^{-1}(E_2)) = \dim E_2$. ∎

Definición 3.10 Sea T_2 una métrica simétrica sobre un espacio vectorial E. Si T_2 es no singular se define el *índice* de T_2 como la dimensión común de todos los subespacios totalmente isótropos maximales de (E, T_2) (véase 3.9).

Si T_2 es singular y $\bar{T}_2$ es la métrica proyectada en el cociente $E/\operatorname{rad} T_2$, entonces se define el índice de T_2 como el índice de la métrica no singular $\bar{T}_2$.

4 Problemas

4.1 Sea T_2 una métrica simétrica sobre un espacio vectorial E.

(a) Si consideramos una descomposición cualquiera $E = \operatorname{rad} E \perp \bar{E}$ (en cuyo caso $\bar{E}$ debe ser un subespacio no singular de E), entonces el índice de E (esto es, el índice de la métrica T_2) coincide con el índice de $\bar{E}$ (esto es, el índice de la métrica T_2 restringida a $\bar{E}$).

(b) Si F es un subespacio totalmente isótropo maximal de E, entonces podemos encontrar una descomposición $E = \operatorname{rad} E \perp \bar{E}$ y un subespacio totalmente isótropo maximal $\bar{F}$ en $\bar{E}$ de modo que $F = \operatorname{rad} E \perp \bar{F}$. [Indicación: Todo subespacio totalmente isótropo maximal de un espacio contiene al radical del espacio.]

(c) Si i denota el índice de E y $m = \dim(\operatorname{rad} E)$, entonces todos los subespacio totalmente isótropos maximales de E tienen la misma dimensión, y esa dimensión común es $i + m$.

4.2 Sea T_2 una métrica sobre E. Supongamos que T_2 es no singular, en cuyo caso su polaridad asociada $\phi : E \to E^*$ es un isomorfismo y permite trasladar dicha métrica a la siguiente métrica

sobre E^*:
$$\begin{array}{rcl} T^2 : E^* \times E^* & \to & \mathbb{R} \\ (\omega, \omega') & \mapsto & T^2(\omega, \omega') := T_2(\phi^{-1}(\omega'), \phi^{-1}(\omega)) \,. \end{array}$$

Es fácil ver que T^2 es una métrica sobre E^* (porque ϕ^{-1} es una aplicación lineal y T_2 es bilineal), que es del mismo tipo que T_2 y se conoce como *métrica contravariada* asociada a T_2. Tenemos:

(a) La polaridad asociada a la métrica T^2 es el isomorfismo $\phi^{-1} : E^* \to E = E^{**}$; como consecuencia obtenemos que T^2 también es no singular.

(b) Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de E y sea $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ su base dual. Si A es la matriz de T_2 en la base $\{e_1, \dots, e_n\}$, entonces la matriz de T^2 en la base $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ es A^{-1}.

(c) La métrica contravariada sobre $(E^*)^* = E$ asociada a la métrica no singular T^2 es justamente T_2.

4.3 Dada una métrica no singular T_2 sobre un espacio vectorial E, para cada subespacio vectorial F de E tenemos $(F^\perp)^\circ = (F^\circ)^\perp$, donde se considera sobre E^* la métrica contravariada asociada a T_2.

4.4 Sean k un cuerpo de característica distinta de 2, E un k-espacio vectorial de dimensión finita, y T_2 una métrica no singular sobre E. Dados un endomorfismo $f : E \to E$ y un vector $v \in E$, la aplicación
$$\begin{array}{rcl} E & \to & k \\ e & \mapsto & v \cdot f(e) \end{array}$$
es una forma lineal. Al ser la polaridad asociada a T_2 un isomorfismo, de lo anterior se sigue que existe un único vector $v' \in E$ tal que $v \cdot f(e) = v' \cdot e$ para todo $e \in E$. Como consecuencia tenemos que existe un único endomorfismo $f' : E \to E$ que satisface: dados $e, v \in E$,
$$v \cdot f(e) = f'(v) \cdot e \,.$$
Dicho endomorfismo f' se denomina *endomorfismo adjunto* de f (respecto de la métrica T_2).

(a) La aplicación $\operatorname{End}_k(E) \to \operatorname{End}_k(E)$, $f \mapsto f'$, es un automorfismo involutivo del espacio vectorial $\operatorname{End}_k(E)$ que cumple $(f \circ g)' = g' \circ f'$. Como consecuencia, si f es un automorfismo de E entonces $(f^{-1})' = (f')^{-1}$.

(b) Un endomorfismo $f \in \operatorname{End}_k(E)$ se dice que es *autoadjunto* si $f = f'$, es decir, si cualesquiera que sean $e, v \in E$ se satisface
$$v \cdot f(e) = f(v) \cdot e \,.$$
Dados endomorfismos autoadjuntos $f, g \in \operatorname{End}_k(E)$ tenemos:

- $f + g$ es autoadjunto;
- si f es un automorfismo entonces f^{-1} también es autoadjunto;
- $f \circ g$ es autoadjunto $\iff$ f y g conmutan.

(c) Llamaremos *automorfismo* de la métrica T_2 a toda isometría de (E, T_2) en (E, T_2). Para un endomorfismo $f : E \to E$ son equivalentes:

(i) $f(e) \cdot f(v) = e \cdot v$ cualesquiera que sean $e, v \in E$;
(ii) f es un automorfismo de T_2 ;
(iii) f es un automorfismo y $f^{-1} = f'$.

(d) Los automorfismo de la métrica T_2 forman un grupo (que es un subgrupo de $\mathrm{End}_k(E)$). En el caso simétrico dicho grupo se denomina *grupo ortogonal* de (E, T_2), y en el caso hemisimétrico se denomina *grupo simpléctico* de (E, T_2).

(e) Si la métrica T_2 es simétrica y para ella existen bases ortonormales, entonces los automorfismos de T_2 son los endomorfismos de E que mandan bases ortonormales a bases ortonormales.

4.5 Con la notación de 4.4, supóngase ahora que la métrica T_2 es simétrica y que existe una base $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ en E que es ortonormal para T_2 (como ocurre, por ejemplo, si k es algebraicamente cerrado, ó si (E, T_2) es un espacio elíptico real definido positivo). Dado un endomorfismo $f : E \to E$ cuya matriz en la base B es $A \in M_n(k)$, tenemos:

- la matriz del endomorfismo f' en la base B es A^t;
- el endomorfismo f es autoadjunto $\iff$ la matriz A es simétrica;
- f es un automorfismo de T_2 $\iff$ la matriz A es invertible y $A^{-1} = A^t$.

Las matrices cuadradas invertibles A que satisfacen $A^{-1} = A^t$ se denominan *ortogonales*, y las matrices de $M_n(k)$ que son ortogonales forman un grupo que se denomina *grupo ortogonal de orden n sobre k* y se denota $O_n(k)$. Según este problema, cuando T_2 es una métrica simétrica no singular para la que existen bases ortonormales, el grupo de automorfismos de T_2 es isomorfo al grupo $O_n(k)$.