Capítulo VI

Cuádricas

Fijemos en todo este capítulo un espacio vectorial E de dimensión finita n sobre un cuerpo k de característica distinta de 2; será entonces $\dim \mathbb{P}(E) = n-1$.

El conjunto de las formas cuadráticas sobre E, $Q(E)$, tiene estructra natural de espacio vectorial, y el espacio proyectivo que define, $\mathbb{P}(Q(E))$, se conoce como "espacio de las cuádricas sobre $\mathbb{P}(E)$". Veremos que por ser la característica del cuerpo base distinta de 2, el espacio vectorial $Q(E)$ es canónicamente isomorfo al espacio vectorial $S_2(E)$ de las métricas simétricas sobre E. Así, todo el estudio realizado en el capítulo anterior del espacio vectorial $S_2(E)$ lo aplicaremos al estudio del espacio de las cuádricas sobre $\mathbb{P}(E)$.

1 Formas Cuadráticas: Cuádricas

Definición 1.1 Una *forma cuadrática* sobre E es una aplicación $q : E \to k$ que cumple:

(a) $q(\lambda e) = \lambda^2 q(e)$ para todo $e \in E$ y todo $\lambda \in k$;

(b) la aplicación simétrica $T_2 : E \times E \to k$, definida a partir de q por la igualdad $T_2(e_1, e_2) = \frac{1}{2}\Big[q(e_1+e_2) - q(e_1) - q(e_2)\Big]$, es bilineal (es decir, T_2 es una métrica simétrica sobre E).

A T_2 se le denomina *métrica simétrica asociada* a la forma cuadrática q.

1.2 Recordemos que el conjunto $S_2(E)$ de las métricas simétricas sobre E, con las operaciones

$$(T_2 + T_2')(e_1, e_2) := T_2(e_1, e_2) + T_2'(e_1, e_2)\,, \qquad (\lambda T_2)(e_1, e_2) := \lambda T_2(e_1, e_2)$$

($T_2, T_2' \in S_2(E)$, $e_1, e_2 \in E$, $\lambda \in k$) es un k-espacio vectorial. Del mismo modo, si $Q(E)$ denota el conjunto de todas las formas cuadráticas sobre E, entonces $Q(E)$ dotado de la suma y del producto por escalares dados por las igualdades

$$(q + q')(e) := q(e) + q'(e)\,, \qquad (\lambda q)(e) := \lambda q(e)$$

($q, q' \in Q(E)$, $e \in E$, $\lambda \in k$) es un k-espacio vectorial. La aplicación $Q(E) \to S_2(E)$ que a cada forma cuadrática le asigna su métrica simétrica asociada es un isomorfismo de k-espacios vectoriales; su isomorfismo inverso es el que a cada métrica simétrica T_2 sobre E le asigna la forma cuadrática $q : E \to k$, $e \mapsto q(e) := T_2(e, e)$. (Compruébense todas las afirmaciones hechas en este punto.)

1.3 Fijemos una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ en E y veamos cómo interpretar las formas cuadráticas si las representamos en coordenadas. Sea q una forma cuadrática sobre E y sea T_2 su métrica simétrica asociada. Al fijar una base en E hemos dado un isomorfismo de E en k^n y por lo tanto podemos pensar q como una función en n-variables: dados $x_1, \dots, x_n \in k$,

$$q(x_1, \dots, x_n) := q(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n)\,.$$

Ahora, si $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$ es la matriz de la métrica T_2 en la base fijada (A es la matriz simétrica definida por las igualdades $a_{ij} := T_2(e_i, e_j)$), entonces tenemos

$$\begin{aligned} q(x_1, \dots, x_n) &= T_2(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n\,,\, x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = (x_1, \dots, x_n)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} 2 a_{ij} x_i x_j\,; \end{aligned}$$

es decir, $q(x_1, \dots, x_n)$ es un polinomio homogéneo en n variables de grado 2 con coeficientes en k. Recíprocamente, si $q(x_1, \dots, x_n)$ es un polinomio homogéneo en n variables de grado 2 con coeficientes en k, entonces q define una aplicación $E \approx k^n \xrightarrow{q} k$, que es una forma cuadrática sobre E.

Resumiendo, fijada una base en E, las formas cuadráticas sobre E podemos identificarlas con los polinomios homogéneos en n variables de grado 2 con coeficientes en k.

Definición 1.4 Llamaremos *cuádrica* sobre el espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$ a todo punto del espacio proyectivo $\mathbb{P}(Q(E)) = \mathbb{P}(S_2(E))$.

Por definición, una cuádrica en $\mathbb{P}(E)$ viene dada por un subespacio de dimensión 1 de $S_2(E)$, es decir, por un subespacio de la forma $\langle T_2 \rangle$ donde T_2 es una métrica simétrica NO NULA sobre E, en cuyo caso diremos que T_2 es un *representante métrico* de la cuádrica $\langle T_2 \rangle$.

Nota **1.5** Cuando la característica del cuerpo base es 2 no vale la definición de forma cuádratica que hemos dado (porque no es posible dividir por 2). La definición de forma cuadrática en característica 2 sería la de una aplicación $q : E \to k$ cumpliendo

(a) $q(\lambda e) = \lambda^2 q(e)$ para todo $e \in E$ y todo $\lambda \in k$;

(b) la aplicación $T_2 : E \times E \to k$, definida a partir de q por la igualdad $T_2(e_1, e_2) = q(e_1 + e_2) - q(e_1) - q(e_2)$, es bilineal.

En este caso hay también aplicaciones lineales, $Q(E) \to S_2(E)$ y $S_2(E) \to Q(E)$, pero no definen una correspondencia biunívoca entre las formas cuadráticas y las métricas simétricas; de hecho, la composición de dichas aplicaciones (en cualquier orden) es la aplicación idénticamente nula. Aquí, la definición de cuádrica sobre $\mathbb{P}(E)$ es la de un punto de $\mathbb{P}(Q(E))$.

Definición 1.6 Sea $\langle T_2 \rangle$ una cuádrica en $\mathbb{P}(E)$. Un punto $P \in \mathbb{P}(E)$ se dice que es un *punto de la cuádrica* $\langle T_2 \rangle$ si P es la proyectivización de un vector isótropo de T_2, es decir, si existe $e \in E$ tal que $P = \pi(e)$ y $T_2(e, e) = 0$. Es claro que la definición dada no depende de los representantes elegidos, ya que si e y e' son vectores de E que representan el mismo punto, entonces $T_2(e,e) = 0$ si y sólo si $T_2(e',e') = 0$, y si T_2' es otro representante de la cuádrica $\langle T_2\rangle$, entonces T_2 y T_2' tienen los mismos vectores isótropos. Se define el *lugar de la cuádrica* $\langle T_2\rangle$ como el conjunto de sus puntos,

$$\text{lugar de } \langle T_2\rangle = \{P = \pi(e) \in \mathbb{P}(E) \ : \ T_2(e,e) = 0\}\,.$$

1.7 Sea $\langle T_2\rangle$ una cuádrica en $\mathbb{P}(E)$ y denotemos por $\mathcal{C}$ su lugar.

(a) No puede ocurrir que $\mathcal{C}$ sea todo el espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$, pues si ocurriera eso tendríamos que todo vector de E es isótropo para T_2 y por lo tanto $T_2 = 0$ (véase el lema V.1.6), lo cual no puede ser por definición de cuádrica.

(b) Sea F un subespacio vectorial de E, denotemos por T_2' la métrica que T_2 define por restricción sobre F, y consideremos en $\mathbb{P}(E)$ la subvariedad lineal $X = \pi(F)$. Por definición de cuádrica, $\langle T_2'\rangle$ es una cuádrica en $X = \mathbb{P}(F)$ cuando T_2' no es la métrica idénticamente nula (aunque la métrica T_2 es no nula puede haber subespacios de E que son totalmente isórtropos para T_2). Tenemos (véase de nuevo el lema V.1.6): $T_2' = 0 \Leftrightarrow$ todo vector de F es isótropo $\Leftrightarrow X \subseteq \mathcal{C}$.

Definición 1.8 Con la notación de 1.7, si $X \not\subseteq \mathcal{C}$, entonce se define la *restricción de la cuádrica* $\langle T_2\rangle$ a X como la cuádrica $\langle T_2'\rangle$.

Lema 1.9 *Con la notación de* 1.7, *si $X \not\subseteq \mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ es el lugar de la cuádrica $\langle T_2'\rangle$, entonces*

$$\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cap X\,.$$

Demostración. Es sencilla y se deja como ejercicio. ∎

1.10 Fijemos una referencia proyectiva $(P_1,\dots,P_n,U)$ en $\mathbb{P}(E)$ y veamos cómo son las ecuaciones en ella del lugar de una cuádrica $\langle T_2\rangle$ sobre $\mathbb{P}(E)$. Sea $\{e_1,\dots,e_n\}$ una base normalizada asociada a $(P_1,\dots,P_n,U)$ y sea $A = (a_{ij})$ la matriz de la métrica T_2 en dicha base. Si P es un punto de $\mathbb{P}(E)$ cuyas coordenadas homogéneas en la referencia fijada son $(x_1,\dots,x_n)$, entonces P es un punto del lugar de la cuádrica $\langle T_2\rangle$ si y sólo si el vector $e = x_1e_1+\cdots+x_ne_n$ es isótropo para la métrica T_2, es decir, si y sólo si las coordenadas homogéneas de P cumplen (véase 1.3):

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j} 2a_{ij}x_ix_j = 0\,. \tag{1.1}$$

Esto es, la ecuación del lugar de la cuádrica viena dada por un polinomio homogéneo de grado 2 en n-variables con coeficientes en k.

Definición 1.11 Con la notación de 1.10, diremos que (1.1) es la ecuación del lugar de la cuádrica $\langle T_2\rangle$ en la referencia proyectiva $(P_1,\dots,P_n,U)$. Dicha ecuación está determinada por el polinomio homogéneo que define la matriz de un representante de la cuádrica en una base normalizada asociada a la referencia.

Definiciones 1.12 Diremos que una cuádrica $\langle T_2\rangle$ en $\mathbb{P}(E)$ es *no singular* si la métrica T_2 es no singular, y en caso contrario diremos que la cuádrica es *singular*; es claro que la anterior definición no depende de la métrica que represente a la cuádrica. Las cuádricas singulares también se denominan *conos*.

Si $\langle T_2 \rangle$ es un cono, entonces $\operatorname{rad} E$ es un subespacio no nulo de E y la subvariedad lineal $\pi(\operatorname{rad} E)$ está contenida en el lugar de la cuádrica (porque todo vector de $\operatorname{rad} E$ es isótropo); la subvariedad $\pi(\operatorname{rad} E)$ se denomina *vértice* del cono, y los puntos de dicho vértice se dice que son los *puntos singulares* del cono.

1.13 Justifiquemos geométricamente las definiciones dadas en 1.12. Supongamos que $\langle T_2 \rangle$ es un cono en $\mathbb{P}(E)$, de modo que la subvariedad lineal $\pi(\operatorname{rad} E)$ es no vacía, y sea E' un subespacio no singular de E tal que $E = E' \perp \operatorname{rad} E$ (véase la demostración del teorema 1.16). Si T_2' es la métrica de E restringida a E', entonces $\langle T_2' \rangle$ es una cuádrica no singular en $X = \pi(E')$. Denotemos el lugar de la cuádrica $\langle T_2 \rangle$ por $\mathcal{C}$ y el lugar de la cuádrica $\langle T_2' \rangle$ por $\mathcal{C}'$, y probemos que $\mathcal{C}$ se obtiene proyectando $\mathcal{C}'$ desde el vértice $\pi(\operatorname{rad} E)$ de $\langle T_2 \rangle$ (véase la figura 2.1).

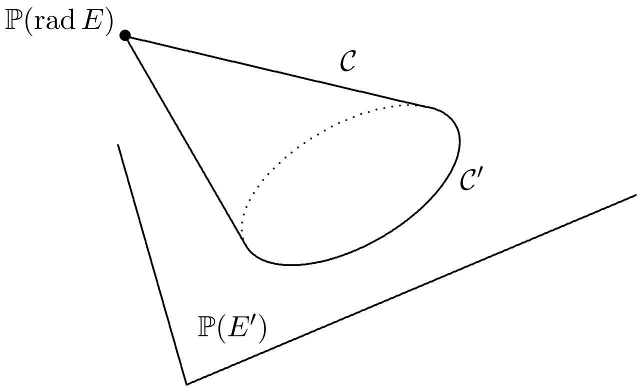

Figura 2.1

Efectivamente, basta tener en cuenta que si $e = e_1 + e_2$ con $e_1 \in E'$ y $e_2 \in \operatorname{rad} E$ entonces: e es isótropo si y sólo si e_1 es isótropo (compruébese). La equivalencia anterior geométricamente significa: dado un punto $P \in \mathbb{P}(E)$, $P \in \mathcal{C}$ si y sólo si existen $P_1 \in \mathcal{C}'$ y $P_2 \in \pi(\operatorname{rad} E)$ tales que $P \in P_1 + P_2$.

La cuádrica $\langle T_2' \rangle$ (restricción de la cuádrica $\langle T_2 \rangle$ a la subvariedad lineal X) se dice que es una *directriz* del cono $\langle T_2 \rangle$. Según el lema 1.9 tenemos $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cap X$.

Ejercicio 1.14 Supongamos que hay fijada una referencia proyectiva en $\mathbb{P}(E)$. Si $A = (a_{ij})$ es la matriz de la métrica T_2 en una base normalizada asociada a la referencia fijada, entonces el vértice de la cuádrica es la subvariedad lineal cuyas ecuaciones en dicha referencia son

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & 0 \end{array}\right\} .$$

Ejemplo 1.15 Supongamos que $\mathbb{P}(E)$ es una recta proyectiva y que $\langle T_2 \rangle$ es una cuádrica sobre ella. Veamos que si contamos bien los puntos, entonces en el lugar de esa cuádrica está formado exactamente por dos puntos. Sea

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$$

la ecuación de $\langle T_2 \rangle$ en cierta referencia proyectiva. Podemos suponer (cambiando si es preciso la referencia) que el punto $(1,0)$ no está en el lugar de la cuádrica, esto es, que las soluciones de la ecuación son de la forma (x_1, x_2) con $x_2 \neq 0$; de este modo, como las coordenadas homogéneas están determinadas salvo un factor de proporcionalidad, los puntos del lugar de la cuádrica vienen dados por las raíces del polinomio $a_{11}\lambda^2 + 2a_{12}\lambda + a_{22}$, donde hemos puesto $\lambda = x_1/x_2$.

Si $\langle T_2 \rangle$ es no singular el discriminante del anterior polinomio es no nulo (véase el ejercicio V.2.2 (b)), y por lo tanto dicho polinomio tiene dos raíces distintas que pueden estar en k ó en su cierre algebraico $\bar{k}$. Si $\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} \in k$ entonces el lugar de la cuádrica son dos puntos distintos de $\mathbb{P}(E)$, y si $\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} \notin k$ entonces el lugar de la cuádrica es vacío y diremos que dicho lugar está formado por "dos puntos distintos en la recta proyectiva sobre el cierre algebraico".

Cuando $\langle T_2 \rangle$ es singular la única raíz (de multiplicidad 2) del polinomio considerado es $\lambda = -a_{12}/a_{11}$, y por lo tanto el lugar de la cuádrica está formado por "un punto doble", el de coordenadas homogéneas $(-a_{12}, a_{11})$.

Ejercicio 1.16 Con las hipótesis y la notación de 1.15 tenemos: (a) si el lugar de la cuádrica son dos puntos distintos de $\mathbb{P}(E)$ en alguna referencia proyectiva su ecuación es $x_1x_2 = 0$; (b) si el lugar de la cuádrica es un punto doble de $\mathbb{P}(E)$ en alguna referencia proyectiva su ecuación es $x_2^2 = 0$.

Ejercicio 1.17 Estúdiese el corte de una recta con el lugar de una cuádrica.

1.18 Sean ahora $\varphi : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(\bar{E})$ una proyectividad y $\langle T_2 \rangle$ una cuádrica sobre $\mathbb{P}(E)$. Si $T : E \to \bar{E}$ es un representante lineal de φ, entonces T es un isomorfismo y por lo tanto podemos trasladar la métrica T_2 a una métrica $T_*(T_2)$ sobre $\bar{E}$ del siguiente modo:

$$\begin{array}{rcl} T_*(T_2) : \bar{E} \times \bar{E} & \to & k \\ (\bar{e}_1, \bar{e}_2) & \mapsto & T_*(T_2)(\bar{e}_1, \bar{e}_2) := T_2(T^{-1}(\bar{e}_1), T^{-1}(\bar{e}_2))\,. \end{array}$$

Esta nueva métrica es simétrica y no nula (porque T_2 es simétrica y no nula), de modo que tenemos una cuádrica $\langle T_*(T_2) \rangle$ en el espacio proyectivo $\mathbb{P}(\bar{E})$, cuya construcción es claro que no depende del representante lineal T de la proyectivivdad φ ni del representante métrico T_2 de la cuádrica $\langle T_2 \rangle$.

Definición 1.19 Con la notación de 1.18, diremos que *la cuádrica $\langle T_*(T_2) \rangle$ es la tranformada por la proyectividad φ de la cuádrica $\langle T_2 \rangle$*. Dada otra cuádrica $\langle \bar{T}_2 \rangle$ sobre $\mathbb{P}(\bar{E})$, diremos que *la proyectividad φ transforma la cuádrica $\langle T_2 \rangle$ en la cuádrica $\langle \bar{T}_2 \rangle$* cuando $\langle T_*(T_2) \rangle = \langle \bar{T}_2 \rangle$.

Ejercicio 1.20 Siguiendo con la notación de 1.18 y 1.19, tenemos:

(a) La proyectividad φ transforma la cuádrica $\langle T_2 \rangle$ en la cuádrica $\langle \bar{T}_2 \rangle$ si y sólo si existe $\lambda \in k^*$ tal que $T : (E, T_2) \to (\bar{E}, \lambda\bar{T}_2)$ es una isometría.

(b) Si φ transforma la cuádrica $\langle T_2 \rangle$ en la cuádrica $\langle \bar{T}_2 \rangle$, entonces φ transforma el lugar de la cuádrica $\langle T_2 \rangle$ en el lugar de la cuádrica $\langle \bar{T}_2 \rangle$, mandando el vértice al vértice.

2 Polaridad Definida por una Cuádrica: Tangencia

Fijemos en esta sección una cuádrica $\langle T_2 \rangle$ en el espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$ cuyo lugar es $\mathcal{C}$.

Definición 2.1 Diremos que dos puntos P_1 y P_2 de $\mathbb{P}(E)$ son *conjugados* (para la cuádrica $\langle T_2 \rangle$) si los vectores que los representan son ortogonales (para la métrica T_2). Los puntos de $\mathcal{C}$ se dice que son *autoconjugados*.

2.2 La noción de puntos conjugados está relacionada con la de conjugado armónico. Consideremos en $\mathbb{P}(E)$ puntos distintos P_1 y P_2 no contenidos en $\mathcal{C}$. La restricción de la cuádrica a la recta $P_1 + P_2$ es una cuádrica de dicha recta cuyo lugar es $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cap (P_1 + P_2)$, y por lo tanto $\mathcal{C}' = \emptyset$, ó $\mathcal{C}'$ es un punto, ó $\mathcal{C}'$ consiste en dos puntos distintos (véanse 1.9 y 1.15). Supongamos que $\mathcal{C}'$ tiene dos puntos distintos Q_1 y Q_2.

Proposición 2.3 *Con la notación de* 2.2 *tenemos:* P_1 *y* P_2 *son conjugados respecto de la cuádrica si y sólo si* P_1 *y* P_2 *son conjugados armónicos respecto del par* (Q_1, Q_2).

Demostración. Fijemos en la recta $P_1 + P_2$ la referencia proyectiva (Q_1, Q_2, P_1) y sean $e_1, e_2 \in E$ tales que $Q_1 = \pi(e_1)$, $Q_2 = \pi(e_2)$ y $P_1 = \pi(e_1 + e_2)$. Los vectores e_1 y e_2 deben ser isótropos (porque Q_1 y Q_2 son puntos autoconjugados) y por lo tanto $T_2(e_1, e_2) \neq 0$, pues en caso contrario tendríamos que la métrica restringida al subespacio $\langle e_1, e_2 \rangle$ es nula, lo que implicaría que la recta $P_1 + P_2$ está contenida en $\mathcal{C}$, en contra de nuestra hipótesis.

Ahora, si $(Q_1, Q_2; P_1, P_2) = \lambda$ entonces $P_2 = \pi(\lambda e_1 + e_2)$ y tenemos:

$$\begin{aligned} P_1 \text{ y } P_2 \text{ son conjugados} &\iff T_2(e_1 + e_2, \lambda e_1 + e_2) = 0 \iff T_2(e_1, e_2) + \lambda T_2(e_2, e_1) = 0 \\ &\iff (1 + \lambda) T_2(e_1, e_2) = 0 \iff \lambda = -1 \,. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Definición 2.4 Dada una subvariedad lineal $X = \pi(F)$ de $\mathbb{P}(E)$, llamaremos *variedad polar* de X (respecto de la cuádrica $\langle T_2 \rangle$) a la subvariedad lineal $X^\perp = \pi(F^\perp)$.

Ejercicio 2.5 Pruébese que la variedad polar de una subvariedad lineal X de $\mathbb{P}(E)$ es el conjunto de puntos que son conjugados con todos los puntos de X. Como consecuencia, el vértice de la cuádrica (que es vacío si la cuádrica es no singular) está contenido en la variedad polar de cualquier subvariedad lineal, ya que los puntos del vértice son conjugados de todos los puntos de $\mathbb{P}(E)$.

Lema 2.6 *Si la cuádrica* $\langle T_2 \rangle$ *es no singular, entonces para cualesquiera subvariedades lineales* X, Y *de* $\mathbb{P}(E)$ *se cumplen:*

(i) $(X + Y)^\perp = X^\perp \cap Y^\perp$;

(ii) $(X \cap Y)^\perp = X^\perp + Y^\perp$;

(iii) $(X^\perp)^\perp = X$.

Demostración. De las propiedades de la operación "tomar incidentes" en los subespacios vectoriales de E se siguen (i) y (ii) (véase V.2.2 (c)); (iii) es equivalente a V.2.3 (ii). $\blacksquare$

Lema 2.7 *Si P es un punto de $\mathbb{P}(E)$ que no está en el vértice de la cuádrica, entonces la variedad polar $P^\perp$ es un hiperplano denominado* hiperplano polar *del punto P; se dice que P es el* polo *del hiperplano $P^\perp$.*

La variedad polar de un punto del vértice de la cuádrica es todo $\mathbb{P}(E)$.

Demostración. Sea $P = \pi(e_0)$ un punto que no está en el vértice de la cuádrica, es decir, tal que $e_0 \notin \operatorname{rad} E$. La subvariedad lineal $P^\perp$ es la proyectivización del subespacio vectorial $\langle e_0\rangle^\perp$, y dicho subespacio es el núcleo de la forma lineal no nula $T_2(e_0, \cdot)$; para concluir basta tener en cuenta que el núcleo de una forma lineal no nula es un hiperplano vectorial.

Definición 2.8 Sea P un punto no singular de $\langle T_2\rangle$. Dada una subvariedad lineal X de $\mathbb{P}(E)$, diremos que X es *tangente* a la cuádrica en el punto P cuando $P \in X \subseteq P^\perp$. En particular, $P^\perp$ es el único hiperplano de $\mathbb{P}(E)$ que es tangente a la cuádrica en P, y es por eso que a $P^\perp$ se le llama también *hiperplano tangente* a la cuádrica en P.

Definición 2.9 Supongamos que la cuádrica $\langle T_2\rangle$ es no singular, de modo que la polaridad $\phi : E \to E^*$ asociada a la métrica T_2 es un isomorfismo (véanse V.2.1 y V.2.2 (a)). Entonces tenemos la proyectividad $\widetilde{\phi} : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E^*)$, la cual no depende del representane métrico T_2 de $\langle T_2\rangle$ y se conoce como *polaridad* asociada a la cuádrica $\langle T_2\rangle$.

La transformada de $\langle T_2\rangle$ por su polaridad asociada se denomina *cuadrica dual* de la cuádrica $\langle T_2\rangle$ (véase 1.19). Si T^2 es la métrica contravariada asociada a T_2 (véase el problema V.4.2), entonces es claro que la cuádrica dual de $\langle T_2\rangle$ es la cuádrica no singular $\langle T^2\rangle$.

2.10 Con las hipótesis y la notación de 2.9, veamos primero cómo es la polaridad $\widetilde{\phi}$. Dado un punto $P = \pi(e) \in E$, mediante el isomorfismo canónico entre el retículo de las subvariedades lineales de $\mathbb{P}(E^*)$ y el dualizado del retículo de las subvariedades lineales de $\mathbb{P}(E)$, que identifica los puntos de $\mathbb{P}(E^*)$ con los hiperplanos de $\mathbb{P}(E)$ (véase el teorema I.3.4), tenemos que el punto $\widetilde{\phi}(P) = \pi(\langle \phi(e)\rangle)$ se corresponde con el hiperplano $\pi(\langle\phi(e)\rangle^\circ)$, de modo que de las igualdades

$$\langle\phi(e)\rangle^\circ = \operatorname{Ker}\phi(e) = \operatorname{Ker} T_2(e, \cdot) = \langle e\rangle^\perp$$

se sigue que el punto $\widetilde{\phi}(P)$ de $\mathbb{P}(E^*)$ se corresponde con el hiperplano $P^\perp$ de $\mathbb{P}(E)$.

Ahora, si denotamos el lugar de la cuádrica dual $\langle T^2\rangle$ por $\mathcal{C}^*$, del ejercicio 1.20 (b) se sigue que la polaridad $\widetilde{\phi}$ transforma el lugar $\mathcal{C}$ en el lugar $\mathcal{C}^*$, de modo que de lo dicho en el párrafo anterior obtenemos que $\mathcal{C}^*$ (visto dentro de $\mathbb{P}(E)$) es el lugar geométrico de los hiperplanos tangentes a la cuádrica $\langle T_2\rangle$. Por este motivo a la cuádrica $\langle T^2\rangle$ se le llama también *cuádrica envolvente* de la cuádrica $\langle T_2\rangle$.

Ejercicios 2.11 Siguiendo con la notación de 2.9, la cuádrica dual de la cuádrica $\langle T^2\rangle$ es $\langle T_2\rangle$ (véase V.4.2 (c)). Así, lo dicho en 2.10 podemos resumirlo del siguiente modo: los hiperplanos tangentes a una cuádrica no singular forman el lugar geométrico de una cuádrica no singular del espacio proyectivo dual, y la relación entre ambas cuádricas es simétrica.

En coordenadas tenemos (véase V.4.2 (b)): si la ecuación de $\langle T_2\rangle$ respecto de una referencia proyectiva fijada en $\mathbb{P}(E)$ viene dada por la matriz simétrica A, entonces la ecuación de la cuádrica dual $\langle T^2\rangle$ respecto de la referencia proyectiva dual de la fijada viene dada por la matriz A^{-1}.

Generalicemos la definición de tangencia dada en 2.8.

Definición 2.12 Diremos que una subvariedad lineal X de $\mathbb{P}(E)$ es *tangente* a la cuádrica $\langle T_2 \rangle$, si X está contenida en su lugar, ó si X no está contenida en su lugar y el vértice de la cuádrica $\langle T_2 \rangle$ restringida a X es estrictamente mayor que el corte de X con el vértice de la cuádrica $\langle T_2 \rangle$.

Supongamos que X es tangente a la cuádrica. Si $X \subseteq \mathcal{C}$ diremos que todo punto de X es *punto de tangencia* de X con la cuádrica. Si $X \nsubseteq \mathcal{C}$ llamaremos *punto de tangencia* de X con la cuádrica a los puntos del vértice de la cuádrica $\langle T_2 \rangle$ restringida a X.

Nótese que con esta definición tenemos: (i) una subvariedad puede ser tangente a una cuádrica en un punto del vértice de la cuádrica (en 2.8 sólo definimos tangencia en puntos no singulares); (ii) si $\langle T_2 \rangle$ es no singular y $X \nsubseteq \mathcal{C}$, entonces X es tangente a $\langle T_2 \rangle$ si y sólo si la restricción de $\langle T_2 \rangle$ a X es singular.

Lema 2.13 *Sea X una subvariedad lineal de $\mathbb{P}(E)$. Si P es un punto no singular de $\mathcal{C}$ tenemos: X es tangente a la cuádrica en P según la definición* 2.8 *si y sólo si X es tangente a la cuádrica en P según la definición* 2.12.

Demostración. Sean F subespacio vectorial de E y $e \in E$ tales que $X = \pi(F)$ y $P = \pi(e)$. Que X sea tangente a $\mathcal{C}$ en el punto P según la primera definición significa

$$e \in F \subseteq \langle e \rangle^{\perp} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} e \in F \\ F \subseteq \langle e \rangle^{\perp} \iff e \in F^{\perp} \end{array} \right\} \quad \Longleftrightarrow \quad e \in \operatorname{rad} F\,.$$

Si $X \subseteq \mathcal{C}$, que X sea tangente a $\mathcal{C}$ en el punto P según la segunda definición significa

$$e \in F \ (\text{aquí } F = \operatorname{rad} F) \quad \Longleftrightarrow \quad e \in \operatorname{rad} F\,.$$

Si $X \nsubseteq \mathcal{C}$, que X sea tangente a $\mathcal{C}$ en el punto P según la segunda definición significa

$$\left. \begin{array}{c} (\operatorname{rad} E) \cap F \subset \operatorname{rad} F \\ e \in \operatorname{rad} F \end{array} \right\} \quad \Longleftrightarrow \quad e \in \operatorname{rad} F\,,$$

pues la inclusión $(\operatorname{rad} E) \cap F \subseteq \operatorname{rad} F$ siempre se cumple, y si $e \in \operatorname{rad} F$ dicha inclusión debe ser estricta porque por hipótesis es $e \notin \operatorname{rad} E$. ∎

Un resultado clásico relativo a la noción de tangencia es el siguiente:

Teorema 2.14 *Fijemos un punto $P \in \mathbb{P}(E)$ tal que $P \notin \mathcal{C}$. Si la cuádrica $\langle T_2 \rangle$ es no singular, el lugar geométrico de los puntos de las rectas tangentes a la cuádrica que pasan por P es el lugar de un cono, el cual es denominado* cono tangente a la cuádrica trazado desde P. *Dicho cono, cuyo vértice es justamente P, corta a $\mathcal{C}$ en los mismos puntos que el hiperplano $P^{\perp}$.*

Demostración. Empecemos observando que una recta r que no está contenida en $\mathcal{C}$ es tangente a la cuádrica si y sólo si $r \cap \mathcal{C}$ es un punto (según el ejemplo 1.15, una cuádrica sobre una recta es singular si y sólo si su lugar es un punto). Provemos que el conjunto

$$\{Q \in \mathbb{P}(E) \,:\; Q \neq P \;\text{ y }\; (P+Q) \cap \mathcal{C} \;\text{ es un punto}\} = (*)$$

es el lugar de una cuádrica $\langle\Phi_2\rangle$. Pongamos $P=\pi(e_0)$ y sea $v\in E$ tal que $Q=\pi(v)$ es distinto de P. Los puntos de la recta $P+Q$ que son distintos de P están en correspondencia biunívoca con el cuerpo k,

$$\begin{array}{rcl} k & \to & (P+Q)-\{P\} \\ \lambda & \mapsto & \pi(\lambda e_0+v) \end{array} \quad ,$$

luego la recta $P+Q$ corta a $\mathcal{C}$ en un único punto si y sólo si la ecuación $T_2(\lambda e_0+v,\lambda e_0+v)=0$ tiene una única solución $\lambda\in k$. Dicha ecuación es

$$\lambda^2 T_2(e_0,e_0)+2\lambda T_2(e_0,v)+T_2(v,v)=0\,,$$

y tiene solución única si y sólo si su discriminante es nulo:

$$\Big(T_2(e_0,v)\Big)^2-T_2(e_0,e_0)\cdot T_2(v,v)=0\,.$$

Hemos obtenido

$$(*)=\ \text{proyectivización de }\Big\{v\in E\ :\ \Big(T_2(e_0,v)\Big)^2-T_2(e_0,e_0)\cdot T_2(v,v)=0\Big\}\,.$$

Si definimos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \Phi_2: E\times E & \to & k \\ (u,v) & \mapsto & T_2(e_0,u)\cdot T_2(e_0,v)-T_2(e_0,e_0)\cdot T_2(u,v)\,, \end{array}$$

es fácil ver que Φ_2 es una métrica simétrica no nula y que $(*)$ es el lugar de la cuádrica $\langle\Phi_2\rangle$.

Calculemos el vértice de $\langle\Phi_2\rangle$. Sea $Q_0=\pi(v_0)$ un punto de dicho vértice, i.e., $\Phi_2(v_0,v)=0$ para todo $v\in E$. En particular, cuando $v\in\langle e_0\rangle^\perp$ (ortogonal para T_2) tenemos

$$0=\Phi_2(v_0,v)=-T_2(e_0,e_0)\cdot T_2(v_0,v)\,,$$

y como por hipótesis es $\alpha=T_2(e_0,e_0)\neq 0$ debe ser $T_2(v_0,v)=0$, es decir, $v_0\in\langle e_0\rangle^{\perp\perp}=\langle e_0\rangle$, lo que equivale a la igualdad $Q_0=P$.

Por último, la ecuación del lugar de $\langle T_2\rangle$ es $T_2(v,v)=0$, la ecuación del lugar de $\langle\Phi_2\rangle$ es $\Phi_2(v,v)=0$, y la ecuación del hiperplano $P^\perp$ es $T_2(e_0,v)=0$. Como $\Phi_2(v,v)=\big(T_2(e_0,v)\big)^2-\alpha\,T_2(v,v)$, es claro que los dos sistemas de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} T_2(v,v)=0 \\ \Phi_2(v,v)=0 \end{array}\right\}, \qquad\qquad \left.\begin{array}{r} T_2(v,v)=0 \\ T_2(e_0,v)=0 \end{array}\right\}$$

son equivalentes. ∎

2.15 Veamos cómo se expresa en coordenadas el cono tangente. Con la notación del teorema 2.14, supongamos que hay fijada una referencia proyectiva en $\mathbb{P}(E)$, que la matriz de la métrica T_2 respecto de una base normalizada asociada a dicha referencia es A, y que las coordenadas homogéneas del punto P son $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$; entonces la ecuación del cono $\langle\Phi_2\rangle$ en la referencia fijada es

$$\left[\Big(\alpha_1,\dots,\alpha_n\Big)\,A\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right]^2-\left(\Big(\alpha_1,\dots,\alpha_n\Big)\,A\begin{pmatrix} \alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\Big(x_1,\dots,x_n\Big)\,A\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right)=0\,.$$

3 Índice de una Cuádrica

Seguimos con la notación fijada al comienzo de la sección anterior.

Definición 3.1 Llamaremos *índice* de la cuádrica $\langle T_2 \rangle$ al índice de la métrica T_2 (véase la definición V.3.10). Es claro que esta definición no depende del representante T_2 de la cuádrica.

3.2 Sea F un subespacio vectorial de E y consideremos la subvariedad lineal $X = \pi(F)$. Según dijimos en 1.7, y utilizando la notación de allí, la condición necesaria y suficiente para que $X \subseteq \mathcal{C}$ es que F sea totalmente isótropo. Por tanto, X es una subvariedad lineal maxima contenida en $\mathcal{C}$ (es decir, tal que no hay subvariedades lineales dentro de $\mathcal{C}$ que contengan estrictamente a X), si y sólo si F es un subespacio totalmente isótropo maximal.

El significado geométrico del corolario V.3.9 es el siguiente:

Lema 3.3 *Las subvariedades lineales máximas contenidas en $\mathcal{C}$ tienen todas la misma dimensión igual a $i + \dim Y$, siendo i el índice de la cuádrica $\langle T_2 \rangle$ e Y su vértice.*

Demostración. Resuélvase el problema V.4.1. ∎

3.4 Antes de ver la relación existente entre el vértice de una cuádrica con las subvariedades lineales máximas contenidas en su lugar, veamos cómo el conocer la posición relativa entre una recta r y su variedad polar $r^\perp$ nos puede ayudar a obtener la posición relativa entre r y el lugar $\mathcal{C}$. (En general será más fácil calcular el corte de dos subvariedades lineales que calcular el corte de una subvariedad lineal con el lugar de una cuádrica.)

Sea F el subespacio vectorial de dimensión 2 de E tal que $r = \pi(F)$ y denotemos $\mathcal{C}' = r \cap \mathcal{C}$. Si r no está contenida en $\mathcal{C}$ entonces $\mathcal{C}'$ es el lugar de la cuádrica restringida a r, y el vértice de dicha cuádrica restringida es, por definición, $\pi(\operatorname{rad} F) = \pi(F \cap F^\perp) = \pi(F) \cap \pi(F^\perp) = r \cap r^\perp$. Así, vamos a ver cómo es $\mathcal{C}'$ (el lugar de la cuádrica restringida) según sea $r \cap r^\perp$ (el vértice de la cuádrica restringida). Las posibilidades son las siguientes:

(a) $r \cap r^\perp = \emptyset$, es decir, $\operatorname{rad} F = 0$. En este caso la métrica restringida a r es no singular y por lo tanto $\mathcal{C}' = \emptyset$ ó $\mathcal{C}'$ tiene dos puntos distintos.

(b) $r \cap r^\perp$ es un punto P_0, es decir, $\dim(\operatorname{rad} F) = 1$. En este caso la cuádrica restringida es singular y por lo tanto $\mathcal{C}'$ es un punto (doble); dicho punto debe ser P_0 ($=$ el vértice de la cuádrica restringida). Observemos que P_0 es conjugado de todos los puntos de $r :$ $P_0 \in r^\perp$.

(c) $r \cap r^\perp = r$, es decir, $\operatorname{rad} F = F$. En este caso F es un subespacio totalmente isótropo y por lo tanto no tenemos cuádrica restringida: $r \subseteq \mathcal{C}$ y $\mathcal{C}' = r$. Además, dos puntos cualesquiera de r son conjugados: $r \subseteq r^\perp$.

Proposición 3.5 *El lugar $\mathcal{C}$ de la cuádrica $\langle T_2 \rangle$ sobre $\mathbb{P}(E)$ está formado por subvariedades lineales que pasan por el vértice de la cuádrica. Además, dicho vértice es la intersección de todas las subvariedades lineales máximas contenidas en el lugar de la cuádrica.*

Demostración. Denotemos $Y = \pi(\operatorname{rad} E)$. Dado $P = \pi(e) \in \mathcal{C}$, por ser $\langle e \rangle$ un subespacio totalmente isótropo existe un subespacio totalmente isótropo maximal F tal que $e \in F$, y como todo subespacio totalmente isótropo maximal contiene a $\operatorname{rad} E$ obtenemos: $\pi(F)$ es una subvariedad lineal máxima contenida en $\mathcal{C}$, que contiene a Y, y tal que $P \in \pi(F)$.

Sea ahora $\{E_i\}_{i\in I}$ la familia de todos los subespacios vectoriales totalmente isótropos maximales de E y para cada $i \in I$ denotemos $X_i = \pi(E_i)$, de modo que tenemos $Y \subseteq \cap_{i\in I} X_i$. Dado $P \in \cap_{i\in I} X_i$ veamos que $P \in Y$, es decir, probemos que P es conjugado de todo punto de $\mathbb{P}(E)$. Dado un punto $Q \in \mathbb{P}(E)$ distinto de P consideremos la recta $r = P + Q$. Como $P \in \mathcal{C}$ debe ser $r \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$, y como $P \in X_i$ para todo $i \in I$ el conjunto $r \cap \mathcal{C}$ no consiste en dos puntos distintos: si fuera $r \cap \mathcal{C} = \{P, P'\}$ con $P \neq P'$, y si $e' \in E$ es tal que $\pi(e') = P'$, entonces $\langle e' \rangle$ es un subespacio totalmente isótropo y por lo tanto existe $i \in I$ tal que $e' \in E_i$, de modo que $r = P + P' \subseteq X_i \subseteq \mathcal{C}$, lo cual es una contradicción. De lo dicho se sigue que debe ser $P = r \cap \mathcal{C}$ ó $r \subseteq \mathcal{C}$, y en cualquiera de los dos casos se cumple que P es conjugado de todo punto de r (véase 3.4); en particular P es conjugado de Q. ∎

Definición 3.6 Una cuádrica se dice que es *reglada* si su lugar contiene rectas.

Ejemplos 3.7 (a) Si una cuádrica tiene índice 0, entonces su lugar coincide con su vértice; es decir, una cuádrica tiene puntos no singulares si y sólo si su índice es no nulo. En particular, el lugar de una cuádrica no singular de índice 0 es vacío.

(b) Una cuádrica no singular de índice 1 tiene puntos en su lugar pero no es reglada.

(c) Una cuádrica no singular es reglada si y sólo si su índice es mayor o igual que 2.

4 Cónicas

Supondremos en esta sección que $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(E)$ un espacio proyectivo de dimensión n. En las anteriores secciones de este capítulo era $n = \dim E$, por lo que se debe tener en cuenta que donde antes los índices variaban desde 1 hasta n ahora variarán desde 0 hasta n.

Clásicamente, a las cuádricas sobre los planos proyectivos se les llaman *cónicas*. Como resultado principal de esta sección probaremos que el lugar de una cónica no singular de índice 1 tiene una estructura natural de recta proyectiva, de modo que todos los conceptos y teoremas válidos para las rectas proyectivas también lo son para los lugares de las cónicas no singulares de índice 1.

Comencemos viendo algunas generalidades de los espacios de las cuádricas.

4.1 Es fundamental para el estudio de las cuádricas del espacio proyectivo $\mathbb{P}_n$ el tener en cuenta que dichas cuádrica son los puntos del espacio proyectivo $\mathbb{P}(S_2(E))$, cuya dimensión es $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-1$ (compruébese), en el que son aplicables todos los conceptos y teoremas de la Geometría Proyectiva. En los espacios de las cuádricas, las rectas se llaman *haces de cuádricas* y los planos se denominan *redes de cuádricas*.

4.2 Veamos cómo cada referencia proyectiva en $\mathbb{P}_n$ induce de modo natural otra referencia proyectiva en el espacio de las cuádricas sobre $\mathbb{P}_n$; por simplificar la notación lo haremos para $n = 2$, esto es, para los cónicas. El espacio de las cónicas sobre el plano $\mathbb{P}_2$ tiene dimensión $\frac{1}{2}(2+1)(2+2)-1 = 5$.

Fijemos una referencia proyectiva (P_0, P_1, P_2, U) en $\mathbb{P}_2$, y consideremos en E una base $\{e_0, e_1, e_2\}$ que es base normalizada asociada a dicha rerefencia. Entonces tenemos un isomorfismo entre las matrices simétricas de orden 3 con coeficientes en el cuerpo k y el espacio $S_2(E)$

de las métricas simétricas sobre E, de modo que cada métrica la identificamos con su matriz en la base considerada. Mediante dicha identificación tenemos que una base de $S_2(E)$ es

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

En efecto, las coordenadas en la anterior base de la métrica $A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ son $(a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{11}, a_{12}, a_{22})$, ya que

$$A = a_{00}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{01}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{02}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$+ a_{11}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, proyectivizando la base de $S_2(E)$ obtenemos en el espacio de las cónicas sobre $\mathbb{P}_2$ una referencia proyectiva para la cual esa base es una base normalizada asociada. Es claro que si la ecuación de una cónica $\langle T_2 \rangle$ sobre $\mathbb{P}_2$ en la referencia (P_0, P_1, P_2, U) de partida es

$$a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2(a_{01}x_0x_1 + a_{02}x_0x_2 + a_{12}x_1x_2) = 0\,,$$

entonces las coordenadas homogéneas de la cónica $\langle T_2 \rangle$ en la referencia proyectiva del espacio de las cónicas son $(a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{11}, a_{12}, a_{22})$.

Ejemplo 4.3 Dados dos puntos (distintos ó coincidentes) de un espacio proyectivo, las cuádricas para las cuales son conjugados forman un hiperplano del espacio de las cuádricas. Como consecuencia, fijados dos puntos y un haz de cuádricas, ó existe una única cuádrica del haz para la que los puntos son conjugados, ó son conjugados para todas las cuádricas del haz.

En efecto, consideremos en $\mathbb{P}_n$ dos puntos P, Q y fijemos una referencia proyectiva cuyo primer punto es P, de modo que en coordenas tenemos $P = (1, 0, \ldots, 0)$ y $Q = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. En el espacio de las cuádricas sobre $\mathbb{P}_n$, la cuádrica de coordenadas homogéneas

$$(a_{00}, a_{01}, \ldots, a_{0n},\ a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n},\ \ldots,\ a_{nn})$$

es aquella cuya ecuación en la referencia de $\mathbb{P}_n$ viene dada por la matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \ldots & a_{0n} \\ a_{01} & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{0n} & a_{1n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

y para dicha cuádrica los puntos P y Q son conjugados si y sólo si

$$(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Por lo tanto, las cuádricas sobre $\mathbb{P}_n$ para las que los puntos dados son conjugados son aquellas cuyas coordenadas homogéneas satisfacen la ecuación

$$\alpha_0 a_{00} + \alpha_1 a_{01} + \cdots + \alpha_n a_{0n} = 0\,,$$

que es la ecuación de un hiperplano del espacio de las cuádricas.

Para la consecuencia basta tener en cuenta que, como en todo espacio proyectivo, una recta y un hiperplano que no son incidentes se cortan en un único punto.

4.4 Cuando los dos puntos del ejemplo 4.3 son coincidentes obtenemos: *las cuádricas que pasan por un punto fijo forman un hiperplano del espacio de las cuádricas.*

Como consecuencia, el conjunto de las cuádricas que pasan por cierta familia de puntos fijos es una subvariedad lineal del espacio de las cuádricas (porque es intersección de hiperplanos).

Ejercicio 4.5 (a) Por cada punto de una recta proyectiva pasa un haz de cúadricas, el cual tiene exactamente una cuádrica singular. Como consecuencia, fijados un par de puntos (distintos ó coincidentes) existe una única cuádrica cuyo lugar es ese par de puntos.

(b) Según 4.4, el conjunto de las cónicas de un plano proyectivo que pasan por un punto fijo es un hiperplano del espacio de las cónicas. Qué se puede decir del conjunto de las cónicas que pasan por 2 (ó 3, ó 4) puntos fijos ditintos de un plano proyectivo?

(c) Sea Γ el conjunto de todas las cónicas de un plano proyectivo $\mathbb{P}_2$ que pasan por 5 puntos fijos distintos. Tenemos: (i) $\dim \Gamma = 2$ si los cinco puntos están alineados; (ii) $\dim \Gamma = 1$ si cuatro de los cinco puntos están en una recta y el quinto no está en dicha recta; (iii) $\dim \Gamma = 0$ si ninguna recta pasa por cuatro de los cinco puntos.

4.6 Dentro del ejercicio 4.5 (c) está el siguiente resultado clásico: *Por cinco puntos distintos de un plano proyectivo pasa una cónica, y la condición necesaria y suficiente para que dicha cónica sea única es que en los cinco puntos dados no haya cuatro alineados.*

La primera parte del anterior enunciado es obvia, pues como el espacio de las cónicas sobre $\mathbb{P}_2$ tiene dimensión 5, la intersección de 5 hiperplanos de dicho espacio es siempre no vacía (véase 4.4).

Del mismo modo, como el espacio de las cuádricas sobre $\mathbb{P}_3$ tiene dimensión $\frac{1}{2}(3+1)(3+2)-1=9$, razonando como en el párrafo anterior obtenemos otro resultado clásico: *Por nueve puntos distintos de $\mathbb{P}_3$ siempre pasa alguna cuádrica.*

El siguiente lema es otro resultado clásico que es un caso particular del estudio propuesto en el ejercicio 4.5:

Lema 4.7 *Dado un cuadrivértice completo A, B, C, D en el plano proyectivo $\mathbb{P}_2$, las cónicas que pasan por sus cuatro vértices forman un haz que tiene exactamente tres cónicas singulares. Cada uno de los tres pares de lados opuestos del cuadrivértice es el lugar de una de dichas cónicas singulares.*

Además, para todas las cónicas no singulares de dicho haz el triángulo diagonal del cuadrivértice es un triángulo autopolar (i.e., la recta polar de cada vértice es el lado opuesto).

Demostración. Consideremos en $\mathbb{P}_2$ la referencia proyectiva (A, B, C, D), de modo que en coordenadas tenemos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$ y $D = (1, 1, 1)$. Una cónica de $\mathbb{P}_2$ de ecuación $a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2(a_{01}x_0x_1 + a_{02}x_0x_2 + a_{12}x_1x_2) = 0$ (i.e., de coordenadas homogéneas $(a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{11}, a_{12}, a_{22})$) pasa por el punto A si y sólo si

$$a_{00}1^2 + a_{11}0^2 + a_{22}0^2 + 2(a_{01}0 + a_{02}0 + a_{12}0) = 0 \qquad \equiv \qquad a_{00} = 0\,.$$

Procediendo de igual modo para los demás vértices llegamos a que las cónicas que "pasan por el cuadrivértice" son la subvariedad del espacio de las cónicas de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{00} & = & 0 \\ a_{11} & = & 0 \\ a_{22} & = & 0 \\ a_{01} + a_{02} + a_{12} & = & 0 \end{array}\right\}\,,$$

es decir, las que tienen coordenadas $(0, \alpha, \beta, 0, -(\alpha + \beta), 0)$ (ó ecuación $\alpha x_0x_1 + \beta x_0x_2 - (\alpha + \beta)x_1x_2 = 0$) con α y β escalares no simultáneamente nulos. Es claro que dicha subvariedad del espacio de las cónicas es un haz (tiene dimensión 1), y las cónicas singulares de ese haz son las dadas por las soluciones de la ecuación

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & -(\alpha+\beta) \\ \beta & -(\alpha+\beta) & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \equiv \qquad \alpha\beta(\alpha + \beta) = 0\,,$$

esto es, $\alpha = 0$ ó $\beta = 0$ ó $\alpha = -\beta$. Para $\alpha = 0$ obtenemos la cónica $x_0x_2 - x_1x_2 = 0$ cuyo lugar es el par de rectas $x_0 - x_1 = 0$ ($\equiv C + D$) y $x_2 = 0$ ($\equiv A + B$), para $\beta = 0$ obtenemos la cónica $x_0x_1 - x_1x_2 = 0$ cuyo lugar es el par de rectas $x_0 - x_2 = 0$ ($\equiv B + D$) y $x_1 = 0$ ($\equiv A + C$), y para $\alpha = -\beta$ obtenemos la cónica $x_0x_1 - x_0x_2 = 0$ cuyo lugar es el par de rectas $x_1 - x_2 = 0$ ($\equiv A + D$) y $x_0 = 0$ ($\equiv B + C$).

La demostración de la última parte del enunciado se deja como ejercicio. ▮

Corolario 4.8 *Con la notación del lema* 4.7*, si t es una recta que pasa por A y no pasa por otro vértice del cuadrivértice, entonces existe una única cónica no singular que pasa por los cuatro vértices y cuya recta tangente en A es t.*

Demostración. Siguiendo con la notación introducida en la demostración de 4.7, la ecuación de una cónica no singular que pasa por el cuadrivértice es de la forma $x_0x_1 + \lambda x_0x_2 - (1+\lambda)x_1x_2 = 0$ para algún escalar $\lambda \neq 0, -1$, y para ella la ecuación de la recta polar del punto A es

$$(x_0, x_1, x_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ 1 & 0 & -(1+\lambda) \\ \lambda & -(1+\lambda) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \equiv \qquad x_1 + \lambda x_2 = 0\,.$$

Además, es fácil comprobar que existe un único escalar $\mu \neq 0, -1$ tal que la ecuación de la recta t del enunciado es $x_1 + \mu x_2 = 0$, de lo que concluimos que $x_0x_1 + \mu x_0x_2 - (1 + \mu)x_1x_2 = 0$ es la única cónica no singular que pasa por el cuadrivértice y cuya recta tangente en A es t. ▮

Ejercicio 4.9 Dado un cuadrivértice completo A, B, C, D en el plano proyectivo $\mathbb{P}_2$, existe una única cónica no singular que pasa por A, B y C, y cuyas tangentes en A y B son, respectivamente, las rectas $A + D$ y $B + D$.

Ejercicio 4.10 En el plano proyectivo $\mathbb{P}_2$, considérense una cónica no singular de índice 1 y un punto P que no está en su lugar. La última parte del lema 4.7 proporciona un método para construir geométricamente la recta polar del punto P. Como consecuencia, la última parte del teorema 2.14 permite construir geométricamente, si existen, las tangentes a la cónica trazadas desde P.

4.11 Si el espacio vectorial E tiene dimensión 3 y T_2 es una métrica no singular sobre E, entonces es fácil ver que en E no hay subespacios vectoriales de dimensión 2 que sean totalmente isótropos para T_2. Geométricamente, lo anterior significa que en el lugar de una cónica no singular no hay rectas.

Sea ahora $\mathcal{C}$ el lugar de una cónica no singular de índice 1 en el plano proyectivo $\mathbb{P}_2$ y fijemos un punto $A \in \mathcal{C}$. La recta tangente a la cónica en A corta a $\mathcal{C}$ únicamente en A, y de lo dicho en el párrafo anterior se sigue que cada recta del haz $\mathbb{P}_2/A$ distinta de dicha tangente corta a $\mathcal{C}$ exactamente en dos puntos distintos. Como consecuencia obtenemos que, proyectanto el lugar $\mathcal{C}$ desde A, hay una correspondencia biunívoca entre los puntos de $\mathcal{C}$ y las rectas del haz $\mathbb{P}_2/A$ (mediante la cual A se corresponde con la tangente en A).

Teorema 4.12 (Teorema de Chasles-Steiner) *Sean A y B puntos distintos del plano proyectivo $\mathbb{P}_2$ y sea τ una proyectividad del haz de rectas $\mathbb{P}_2/A$ en el haz de rectas $\mathbb{P}_2/B$. El lugar geométrico de los puntos de corte de rectas homólogas por τ es el lugar de una cónica que pasa por A y por B. Si τ no es una perspectividad, entonces dicha cónica es no singular, su tangente en B es la recta $\tau(A+B)$ y su tangente en A es la recta $\tau^{-1}(A+B)$. Si τ es una perspectividad desde una recta r, entonces la cónica es singular y su lugar son las rectas r y $A + B$.*

Recíprocamente, sean A y B puntos distintos del lugar $\mathcal{C}$ de una cónica no singular de índice 1 del plano proyectivo $\mathbb{P}_2$. Si para cada recta a que pasa por A denotamos por A' el único punto tal que $\mathcal{C} \cap \dashv = \{\mathcal{A}, \mathcal{A}'\}$ (será $A' = A$ si y sólo si a es la recta tangente a la cónica en A), entonces la aplicación que manda cada recta $a \in \mathbb{P}_2/A$ a la recta $A' + B \in \mathbb{P}_2/B$ es una proyectividad que no es perspectividad.

Demostración. Fijemos una referencia proyectiva en $\mathbb{P}_2$ de modo que $A = (1, 0, 0)$ y $B = (0, 1, 0)$, y denotemos (x, y, z) las coordenadas homogéneas respecto de esa referencia. Las rectas que pasan por A tienen ecuación de la forma $uy + vz = 0$ con el par $(u, v) \neq (0, 0)$ determinado salvo un factor de proporcionalidad, es decir, (u, v) son coordenadas homogéneas en la recta proyectiva $\mathbb{P}_2/A$. Del mismo modo, (u', v') son las coordenadas homogéneas de la recta $u'x + v'y = 0$ del haz $\mathbb{P}_2/B$. La expresión de la proyectividad τ en esas coordenadas será

$$\begin{array}{rcl} \tau : \mathbb{P}_2/A & \longrightarrow & \mathbb{P}_2/B \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \end{array}$$

para ciertos escalares $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ con $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. La intersección de una recta $a = (u, v) \in \mathbb{P}_2/A$ y su homóloga $\tau(a) = (\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)$ es el punto cuyas ecuaciones en la referencia proyectiva fijada en $\mathbb{P}_2$ son

$$\left.\begin{array}{rcl} uy + vz & = & 0 \\ (\alpha u + \beta v)x + (\gamma u + \delta v)z & = & 0 \end{array}\right\} ;$$

la primera de dichas ecuaciones implica que el par (u, v) es proporcional al par $(z, -y)$, de modo que sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos que el punto $a \cap \tau(a)$ está en el lugar de la cónica $\langle T_2 \rangle$ de ecuación

$$\alpha zx - \beta yx + \gamma z^2 - \delta yz = 0 \,,$$

que claramente pasa por A y B. Esta cónica es singular si y sólo si

$$\begin{vmatrix} 0 & -\beta & \alpha \\ -\beta & 0 & -\delta \\ \alpha & -\delta & 2\gamma \end{vmatrix} = 0 \qquad \equiv \qquad \beta = 0 \,,$$

y es fácil ver que $\beta = 0$ si y sólo si τ manda la recta $A + B \equiv z = 0$ a ella misma, es decir, si y sólo si τ es una perspectividad.

Cuando τ es una perspectividad la ecuación de la cónica $\langle T_2 \rangle$ es $z(\alpha x - \delta y + \gamma z) = 0$ y su lugar son las rectas $A + B \equiv z = 0$ y $r \equiv \alpha x - \delta y + \gamma z = 0$. Es fácil comprobar que τ es la perspectividad desde r.

Sea ahora $\beta \neq 0$. Las coordenadas de la recta $A + B$ son $(0, 1)$ y por lo tanto las cordenadas de la recta $\tau(A + B)$ son (β, δ), es decir, la ecuación de $\tau(A + B)$ es $\beta x + \delta z = 0$, que es justamente la ecuación de la tangente a la cónica en B. Del mismo modo, la ecuación de la recta $\tau^{-1}(A + B)$ es $-\beta y + \alpha z = 0$, que es la ecuación de la tangente a la cónica en A. Por último, de la biyección existente entre las rectas del haz $\mathbb{P}_2/A$ y los puntos del lugar de $\langle T_2 \rangle$ (véase 4.11), se sigue que todo punto de dicho lugar se obtiene como intersección de una recta que pasa por A y su homóloga.

Recíprocamente, sean A y B puntos distintos del lugar $\mathcal{C}$ de una cónica no singular de índice 1 del plano proyectivo $\mathbb{P}_2$. Como las rectas proyectivas tienen al menos cuatro puntos (porque la característica del cuerpo base es distinta de 2), podemos considerar otros dos puntos C y D sobre $\mathcal{C}$ tales que A, B, C, D es un cuadrivértice completo. Si $\tau : \mathbb{P}_2/A \to \mathbb{P}_2/B$ es la única proyectividad que cumple

$$\tau(A + C) = B + C \,, \qquad \tau(A + D) = B + D \,, \qquad \tau(A + B) = t \,,$$

donde t es la recta tangente a la cónica en el punto B, aplicando la primera parte del teorema obtenemos que existe una cónica no singular $\langle T_2 \rangle$ que pasa por el cuadrivértice A, B, C, D, cuya tangente en B es t, y cuyo lugar se obtiene cortando cada recta que pasa por A con su homóloga por la proyectividad τ. Basta aplicar el corolario 4.8 para concluir que el lugar de $\langle T_2 \rangle$ es justamente $\mathcal{C}$, lo que concluye la demostración. ∎

4.13 Geometría de las cónicas: Fijado un punto A del lugar $\mathcal{C}$ de una cónica no singular de índice 1 de $\mathbb{P}_2$, la correspondencia entre las rectas del haz $\mathbb{P}_2/A$ y los puntos de $\mathcal{C}$ puesta de manifiesto en 4.11 permite trasladar al lugar $\mathcal{C}$ la estructura de recta proyectiva de $\mathbb{P}_2/A$. Dicha estructura sobre $\mathcal{C}$ es la única que cumple que "la razón doble de cuatro puntos distintos de $\mathcal{C}$ es la razón doble de las cuatro rectas del haz $\mathbb{P}_2/A$ que pasan por ellos" (recuérdese que entre rectas proyectivas las proyectividades son las biyecciones que conservan la razón doble).

Por tanto, del teorema de Chasles-Steiner se sigue que esta estructura de recta proyectiva de $\mathcal{C}$ no depende del punto A fijado.

En resumen, todos los conceptos proyectivos de la recta pueden definirse en los lugares de las cónicas no singulares de índice 1: homografías, involuciones, referencias proyectivas, razón doble de cuatro puntos, coordenadas homogéneas, ... , y todos los teoremas válidos para la recta proyectiva también lo son para los lugares de estas cónicas.

Ejercicio 4.14 (Generación proyectiva de cónicas) De los diversos modos equivalentes utilizados clásicamente para dar la definición de *cónica* (entendida como sinónimo de *lugar de una cónica no singular de índice* 1), del teorema 4.12 obtenemos los dos siguientes:

Definición de Steiner: Si A y B son puntos distintos de $\mathbb{P}_2$ y $\tau : \mathbb{P}_2/A \to \mathbb{P}_2/B$ es una proyectividad que no es perspectividad, entonces una cónica en $\mathbb{P}_2$ es el lugar de puntos de la forma $a \cap \tau(a)$ con $a \in \mathbb{P}_2/A$.

Definición de Chasles: Si A, B, C, D es un cuadrivértice completo de $\mathbb{P}_2$ y $\lambda \neq 0, 1$ es un escalar fijo, entonces una cónica en $\mathbb{P}_2$ es el lugar formado por los puntos A, B, C, D y un quinto punto variable X tal que $(A + X, B + X; C + X, D + X) = \lambda$.

De los muchos teoremas clásicos relativos a las cónicas, vamos a terminar este capítulo demostrando uno de los más célebres. Su autor fue Pascal, quien lo utilizó para obtener decenas de corolarios. Recordemos que un hexágono es la figura plana que consta de seis puntos ordenados $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ (los vértices) y de las seis rectas que determinan los seis pares de puntos consecutivos (los lados), $A_1 + A_2, A_2 + A_3, \dots, A_6 + A_1$; los lados $A_1 + A_2$ y $A_4 + A_5$ ($A_2 + A_3$ y $A_5 + A_6$, $A_3 + A_4$ y $A_6 + A_1$) se dice que son opuestos.

Teorema 4.15 (Teorema de Pascal) *Dado un hexágono $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ tal que tres cualesquiera de sus vértices no están alineados, la condición necesaria y suficiente para que sus vértices estén sobre el lugar de una cónica no singular es que sus tres pares de lados opuestos se corten en puntos de una misma recta, llamada* recta de Pascal.

Demostración. Denotemos $L = (A_1 + A_2) \cap (A_4 + A_5)$, $M = (A_2 + A_3) \cap (A_5 + A_6)$, $N = (A_3 + A_4) \cap (A_6 + A_1)$, $r = A_1 + A_6$, $s = A_5 + A_6$, $Q = r \cap (A_4 + A_5)$, $P = (A_1 + A_2) \cap s$ (véase la figura 4.1). La condición "no existe una recta que pase por tres de los vértices" implica que todos los puntos considerados son distintos y que todas las rectas consideradas son distintas. En efecto, supongamos por ejemplo la igualdad $L = M$ y veamos que entonces hay tres vértices alineados: si $L = M = A_5$ entonces $A_5 = L \in A_1 + A_2$, y si $L = M \neq A_5$ entonces $A_1 + A_2 = L + A_2 = M + A_2 = A_2 + A_3$.

El que todas las rectas y todos los puntos que tenemos sean distintos asegura que las argumentaciones que haremos a continuación son correctas.

Supongamos en primer lugar que hay una cónica no singular que pasa por los vértices del hexágono. Proyectando la recta s desde A_2 y cortando después con la cónica (véase de nuevo la figura 4.1), tenemos

$$(P, M; A_5, A_6) = (A_2 + A_1, A_2 + A_3; A_2 + A_5, A_2 + A_6) = (A_1, A_3; A_5, A_6) = (*)\,;$$

ahora, proyectando la cónica desde A_4 y cortando después con la recta r obtenemos

$$(*) = (A_4 + A_1, A_4 + A_3; A_4 + A_5, A_4 + A_6) = (A_1, N; Q, A_6)\,.$$

Por lo tanto existe una proyectividad $\tau : s \to r$ tal que $\tau(P) = A_1$, $\tau(M) = N$, $\tau(A_5) = Q$ y

$$\tau(r \cap s) = \tau(A_6) = A_6 = r \cap s\,.$$

Es claro que τ es una perspectividad cuyo vértice es $(P+A_1)\cap(A_5+Q) = L$, y como $\tau(M) = N$ concluimos que L, M, N están alineados.

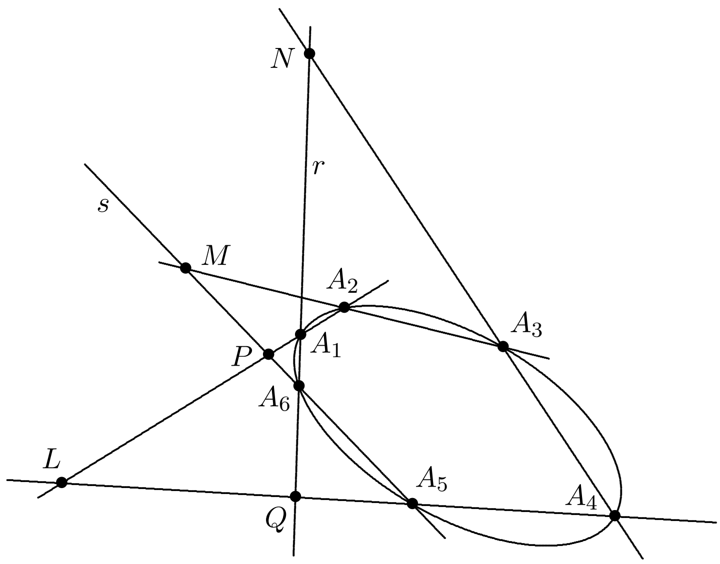

Figura 4.1

Recíprocamente, supongamos que L, M, N están alineados, en cuyo caso, si $\tau : s \to r$ es la perspectividad de vértice L entonces $\tau(M) = N$; como además $\tau(P) = A_1$, $\tau(A_5) = Q$ y $\tau(A_6) = A_6$, debe ser $(P, M; A_5, A_6) = (A_1, N; Q, A_6)$. Proyectando la recta s desde A_2 y la recta r desde A_4 obtenemos

$$(A_2 + A_1, A_2 + A_3; A_2 + A_5, A_2 + A_6) = (A_4 + A_1, A_4 + A_3; A_4 + A_5, A_4 + A_6)\,,$$

lo que nos permite afirmar que existe una proyectividad $\sigma : \mathbb{P}_2/A_2 \to \mathbb{P}_2/A_4$ tal que

$$\sigma(A_2{+}A_1) = A_4{+}A_1\,, \quad \sigma(A_2{+}A_3) = A_4{+}A_3\,, \quad \sigma(A_2{+}A_5) = A_4{+}A_5\,, \quad \sigma(A_2{+}A_6) = A_4{+}A_6\,.$$

Basta aplicar el teorema de Steiner para terminar la demostración. ▮

Ejercicio 4.16 Cuántas rectas de Pascal tienen asociados seis puntos distintos del lugar de una cónica no singular?

Nota **4.17** Para hexágonos que tienen ternas de vértices alineados, unas veces se satisface el teorema de Pascal (con cónicas singulares, como es el caso del teorema de Pappus), y otras veces el enunciado del teorema de Pascal no tiene sentido. Por ejemplo, si r y s son rectas dsitintas de un plano tales que $A_1, A_2, A_4, A_5 \in r$ y $A_1, A_3, A_6 \in s$, entonces $L = (A_1 + A_2) \cap (A_4 + A_5)$ es una recta.

5 Problemas

5.1 Supongamos fijada en un plano proyectivo $\mathbb{P}_2$ una referencia y denotemos (x, y, z) las coordenadas homogéneas respecto de esa referencia. Sea

$$q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2(dxy + exz + fyz)$$

un polinomio homogéneo de grado 2 en 3 variables, y consideremos en $\mathbb{P}_2$ la cónica cuya ecuación es $q(x, y, z) = 0$. Se define, del modo usual, la derivada de parcial de q respecto de x por la igualdad

$$\frac{\partial q}{\partial x}(x, y, z) = 2(ax + dy + ez)\,,$$

y de igual manera tenemos las derivadas parciales $\frac{\partial q}{\partial y}(x, y, z)$ y $\frac{\partial q}{\partial z}(x, y, z)$.

La ecuación de la variedad polar de un punto $P = (\alpha, \beta, \gamma)$ es

$$\left(\frac{\partial q}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial q}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial q}{\partial z}(x, y, z)\right)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0\,,$$

o equivalentemente

$$\left(\frac{\partial q}{\partial x}(\alpha, \beta, \gamma), \frac{\partial q}{\partial y}(\alpha, \beta, \gamma), \frac{\partial q}{\partial z}(\alpha, \beta, \gamma)\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\,.$$

Si la cónica es no singular y el punto P no está en su lugar, entonces la ecuación del cono tangente a la cónica trazado desde P es

$$\left(\alpha\,\frac{\partial q}{\partial x}(x, y, z) + \beta\,\frac{\partial q}{\partial y}(x, y, z) + \gamma\,\frac{\partial q}{\partial z}(x, y, z)\right)^2 + q(\alpha, \beta, \gamma)q(x, y, z) = 0\,,$$

o equivalentemente

$$\left(x\,\frac{\partial q}{\partial x}(\alpha, \beta, \gamma) + y\,\frac{\partial q}{\partial y}(\alpha, \beta, \gamma) + z\,\frac{\partial q}{\partial z}(\alpha, \beta, \gamma)\right)^2 + q(\alpha, \beta, \gamma)q(x, y, z) = 0\,.$$

5.2 Lo dicho en el problema 5.1 se generaliza fácilmente para espacios proyectivos de dimensión arbitraria.

5.3 Las coordenadas y ecuaciones de los siguientes apartados están referidas a un sistema de referencia fijado en un plano proyectivo.

(a) Determínese la ecuación de la cónica que pasa por los puntos $A = (0, 1, 1)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (1, 1, 0)$ y $D = (1, 1, 1)$, y cuya tangente en A es la recta $2x + y - z = 0$.

(b) Dada la cónica de ecuación $x^2+2y^2+z^2+yz+3xz+xy = 0$ y dado el punto $P = (1, 1, 1)$, calcúlese las tangentes a la cónica desde P, la recta polar de P, y el polo de la recta $x - y = 0$. Calcúlese también la cónica dual de la cónica dada.

(c) Obténganse los puntos por los que pasan todas las cónicas del haz dado por la ecuación $(a + b)(x^2 - y^2) + 8bz^2 - 2(a + 3b)xz + 2(a + b)yz = 0$ (a y b son parámetros).

(d) Hállese la ecuación de la cónica que es tangente a las rectas $r_1 \equiv y = 0$, $r_2 \equiv x - y = 0$, $r_3 \equiv x - z = 0$, $r_4 \equiv y + z = 0$ y $r_5 \equiv x + y + z = 0$.

(e) Calcúlese la ecuación de la cónica no singular para la que el triángulo de vértices $A = (1, 0, 1)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (1, 1, 1)$ es autopolar, y que es tangente a las rectas $x - 2z = 0$, $y - 2z = 0$.

5.4 Las coordenadas y ecuaciones de los siguientes apartados están referidas a un sistema de referencia fijado en un espacio proyectivo de dimensión 3.

(a) Determínense los planos tangentes a la cuádrica $2x^2 + 3y^2 - 2zt = 0$ que pasan por la recta

$$\left.\begin{aligned} 2y - t = 0 \\ 2x + 6y = z + 4t \end{aligned}\right\} .$$

(b) Hállese una cuádrica que pase por las rectas

$$r_1 \equiv \ \frac{1}{2}(x - 2t) = y - 2t = \frac{1}{3}(2t - z)\,, \qquad r_2 \equiv \ x + y = y + t = -\frac{1}{2}(z + t)\,,$$
$$r_3 \equiv \ x - t = \frac{1}{2}(y - t) = \frac{1}{3}(t - z)\,.$$

(c) Determínese la cuádrica que pasa por el punto $(1, -1, 0, 1)$ y por el par de rectas $y = z = 0$, $y = t = 0$, y que corta al plano $x = 0$ en la cónica $yz - 2yt + zt = 0$.

5.5 Dada una cuádrica $\langle T_2 \rangle$ sobre un espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$, para cada par de subvariedades lineales X e Y de $\mathbb{P}(E)$ tenemos $(X + Y)^\perp = X^\perp \cap Y^\perp$.

Supuesto que la subvariedad lineal X no está contenida en el vértice de la cuádrica, dedúzcase de lo anterior cómo obtener la variedad polar $X^\perp$ como intersección de hiperplanos.

5.6 En un espacio proyectivo de dimensión 3, sea $\sigma : r \to s$ una proyectividad entre dos rectas que no se cortan. El lugar geométrico de las rectas que unen cada punto de r con su imagen en s, es el lugar de una cuádrica no singular reglada.

5.7 Sea $\mathbb{P}_1$ una recta proyectiva. La polaridad definida en $\mathbb{P}_1$ por una cuádrica no singular es una homografía involutiva (ya que los hiperplanos de una recta son sus puntos), y así se obtienen todas las involuciones de $\mathbb{P}_1$. Como consecuencia, existe una correspondencia biunívoca entre las involuciones de $\mathbb{P}_1$ y las cuádricas no singulares de $\mathbb{P}_1$.

5.8 Sea $\mathcal{C}$ el lugar de una cónica no singular de índice 1 de un plano proyectivo $\mathbb{P}_2$.

(a) La razón doble de cuatro puntos de $\mathcal{C}$ es igual a la razón doble de las tangentes a $\mathcal{C}$ en dichos puntos (consideradas como puntos del lugar de la cónica dual).

(b) Dados cuatro puntos distintos A, B, C, D de $\mathcal{C}$, la condición necesaria y suficiente para que el par (A, B) separe armónicamente al par (C, D) es que el polo de la recta $A + B$ pertenezca a la recta $C + D$.

(c) Toda homografía de $\mathcal{C}$, ó es una involución, ó puede ponerse como producto de dos involuciones.

(d) En $\mathbb{P}_2$ existen triángulos que son autopolares para $\mathcal{C}$.

5.9 Dada una cónica no singular en un plano proyectivo, pruébense:

(a) **Teorema de Chasles:** Si un triángulo y su triángulo polar no tienen vértices ni lados comunes, entonces dicho triángulo y su triángulo polar son perspectivos (es decir, los puntos de intersección de cada lado con la polar del vértice opuesto están alineados, o lo que es equivalente, las rectas que pasan por cada vértice y el polo del lado opuesto se cortan en un punto).

(b) **Teorema de Hesse:** Si un cuadrilátero completo es tal que dos de sus pares de vértices opuestos son pares de puntos conjugados para la cónica, entonces el tercer par de vértices opuestos también es un par de puntos conjugados para la cónica.

5.10 Sea $\mathcal{C}$ el lugar de una cónica no singular de índice 1 de un plano proyectivo $\mathbb{P}_2$ y sea ABC un triángulo inscrito en $\mathcal{C}$. Si r es una recta que pasa por el polo de la recta $A+B$, entonces r corta a $\mathcal{C}$ en puntos X, Y tales que $(X, Y; U, V) = -1$, donde $U = r \cap (A+C)$ y $V = r \cap (B+C)$.

5.11 Sea $\mathcal{C}$ el lugar de una cónica no singular de índice 1 de un plano proyectivo $\mathbb{P}_2$, y sea $\mathcal{C}'$ el lugar de otra cónica no singular de índice 1 de otro plano proyectivo $\mathbb{P}'_2$.

(a) Si $\varphi : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}'_2$ es una proyectividad tal que $\varphi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$, entonces $\varphi_{|_\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ es una proyectividad.

(b) Recíprocamente, toda proyectividad $\sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ se extiende de modo único a una proyectividad $\varphi : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}'_2$.

5.12 **Teorema de Frégier:** Sea $\mathcal{C}$ el lugar de una cónica no singular de índice 1 de un plano proyectivo $\mathbb{P}_2$. Una homografía $\sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ distinta de la identidad es una involución, si y sólo si, existe un punto en $\mathbb{P}_2$ que no está en $\mathcal{C}$ y por el que pasan todas las rectas de la forma $P + \sigma(P)$ con $P \in \mathcal{C}$. Dicho punto se denomina *vértice* de la involución, y la recta polar del vértice se denomina eje de la involución.

Dedúzcase de lo anterior que las involuciones de $\mathcal{C}$ distintas de la identidad son las restricciones a $\mathcal{C}$ de las homologías armónicas de $\mathbb{P}_2$ cuyo vértice no es incidente con $\mathcal{C}$ y cuyo eje es la recta polar del vértice (véanse los problemas II.5.31 y II.5.32).

Dada una involución $\sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ de vertice P y eje $r = P^\perp$, cuáles son los puntos dobles de σ?, cuándo σ es elíptica o hiperbólica?

5.13 Sea $\mathcal{C}$ el lugar de una cónica no singular de índice 1 de un plano proyectivo $\mathbb{P}_2$.

(a) Dadas dos involuciones sobre $\mathcal{C}$ distintas de la identidad, su composición es otra involución, si y sólo si las involuciones conmutan, si y sólo si sus vértices son conjugados.

(b) Dadas tres involuciones sobre $\mathcal{C}$ distintas de la identidad con una de ellas el producto de las otras dos, sus vértices forman un triángulo autopolar para $\mathcal{C}$. (Véase el problema 5.12.)

5.14 En el enunciado del teorema de Pascal dos vértices consecutivos pueden estar confundidos en un punto, en cuyo caso el correspondiente lado del hexágono es la tangente a la cónica en dicho punto. Así, casos particulares del teorema de Pascal son:

(a) Sean cinco puntos $A_1 (= A_2)$, A_3, A_4, A_5, A_6, tres cualesquiera de ellos no alineados, y una recta r tales que $A_1 \in r$ y $A_i \notin r$ para $i \neq 1$. La condición necesaria y suficiente para que exista una cónica no singular que pasa por los cinco puntos y es tangente a la recta es que los puntos $r \cap (A_4 + A_5)$, $(A_1 + A_3) \cap (A_5 + A_6)$, $(A_3 + A_4) \cap (A_6 + A_1)$ estén alineados.

(b) Dados tres puntos no alineados A_1, A_2, A_3 y tres rectas no concurrentes r_1, r_2, r_3 tales que $A_i \in r_i$, $i = 1, 2, 3$, la condición necesaria y suficiente para que exista una cónica no singular que pasa por esos puntos y es tangente a esas rectas es que los puntos $r_1 \cap (A_2 + A_3)$, $r_2 \cap (A_1 + A_3)$, $r_3 \cap (A_1 + A_2)$ estén alineados.

5.15 Enúnciese el teorema dual del Teorema de Pascal (**Teorema de Brianchon**). Enúnciense también los duales de los casos particulares del Teorema de Pascal.

5.16 Teorema del eje transversal para las cónicas: Sea $\mathcal{C}$ el lugar de una cónica no singular de índice 1 de un plano proyectivo $\mathbb{P}_2$. Dada una homografía $\sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ distinta de la identidad, existe una recta en $\mathbb{P}_2$ sobre la que están los puntos $(A + \sigma(B)) \cap (B + \sigma(A))$ con $A, B \in \mathcal{C}$. Dicha recta se denomina *eje transversal* de σ, y corta a $\mathcal{C}$ en los puntos dobles de σ.

5.17 Sea ϕ una homografía ($\neq$ identidad) del lugar $\mathcal{C}$ de una cónica no singular de índice 1 de un plano proyectivo $\mathbb{P}_2$. Si ϕ es una involución entonces su eje transversal es su eje de involución, esto es, la polar de su vértice. Si $\phi = \sigma_1\sigma_2$ con σ_1 y σ_2 involuciones de vértices V_1 y V_2, respectivamente, entonces el eje transversal de ϕ es la recta $V_1 + V_2$.

Conclúyase de lo anterior que toda homografía de $\mathcal{C}$ ($\neq$ identidad) puede ponerse como producto de dos involuciones, donde la primera (ó la segunda) se puede elegir arbitrariamente sin más condición que su vértice incida con el eje transversal de la proyectividad.

5.18 En un plano proyectivo, considérese un triángulo variable tal que sus lados pasan por tres puntos fijos y dos de sus vértices están sobre dos rectas fijas. Entonces, el lugar geométrico del tercer vértice es el lugar de una cónica. Determínese cuándo dicha cónica es singular.

5.19 Dados dos triángulos sin vértices ni lados comunes en un plano proyectivo, sus vértices están sobre el lugar de una cónica no singular si y sólo si sus lados son tangentes a otra cónica no singular.

5.20 Si dos triángulos distintos de un plano proyectivo son autopolares para una misma cónica no singular, entonces los seis vértices están sobre una cónica y los seis lados son tangentes a otra cónica.

5.21 Dadas dos cónicas no singulares de un plano proyectivo, si existe un triángulo que está inscrito (sus vértices están) en el lugar de la primera y circunscrito (sus lados son tangentes) al lugar de la segunda, entonces cada punto del lugar de la primera es vértice de uno de tales triángulos.

5.22 Dados dos triángulos distintos de un plano proyectivo, si son uno el triángulo polar del otro respecto de una cónica no singular, entonces existe otra cónica que pasa por los seis vértices.

5.23 Dados cinco puntos de un plano proyectivo tales que entre ellos no hay tres alineados, sea $\mathcal{C}$ el lugar de la única cónica que pasa por ellos (que debe ser no singular por la condición pedida a los puntos). Si r es una recta que pasa sólo por uno de dichos puntos, determínese gráficamente (o sea, sólo con ayuda de una regla) el otro punto de $r \cap \mathcal{C}$.

5.24 Dado un haz de cuádricas en un espacio proyectivo, el conjunto de los puntos comunes a todas ellas es la intersección de los lugares de dos cualesquiera cuádricas de dicho haz.

5.25 Dado un haz de cónicas en un plano proyectivo, ó todas las cónicas del haz son singulares, ó a lo sumo hay tres cónicas singulares en el haz. Pónganse ejemplos de haces que estén en esos casos.

5.26 Teorema de Desargues para las cónicas: Sean A, B, C, D los vértices de un cuadrivértice de un plano proyectivo $\mathbb{P}_2$, y sea $\mathcal{H}$ el haz de cónicas que pasan por los vértices de dicho cuadrivértice (véase el lema 4.7). Si r es una recta de $\mathbb{P}_2$ que no pasa por ninguno de los puntos A, B, C, D, entonces las cónicas del haz $\mathcal{H}$ determinan sobre r pares de puntos de una involución.

5.27 Sea $\mathcal{C}$ el lugar de una cónica no singular de índice 1 de un plano proyectivo y sea $\sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ una homografía no elíptica y no involutiva. El lugar geométrico de las rectas de la forma $P + \sigma(P)$ con $P \in \mathcal{C}$, es el lugar de la cónica envolvente de una cónica que es tangente con $\mathcal{C}$ en los puntos dobles de σ. [Dos cónicas $\langle T_2 \rangle$ y $\langle T_2' \rangle$ se dice que son tangentes en un punto P_0, si P_0 pertenece a las dos cónicas, y si la recta tangente a $\langle T_2 \rangle$ en P_0 es igual a la recta tangente a $\langle T_2' \rangle$ en P_0.]

5.28 Sean $\langle T_2 \rangle$ y $\langle T_2' \rangle$ dos cónicas no singulares de índice 1 de un plano proyectivo, y denotemos por $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ sus respectivos lugares. Si $\langle T_2 \rangle$ y $\langle T_2' \rangle$ son tangentes, entonces existen dos homografías de $\mathcal{C}$ (una inversa de la otra) cuyos puntos dobles son los puntos de contacto de ambas cónicas, y tales que la envolvente de $\langle T_2' \rangle$ son las rectas que unen pares de puntos correspondientes.

5.29 Cuádrica dual: Generalicemos la definición dada en 2.9.

(a) Sea $\langle T_2 \rangle$ un cono (cuádrica singular) en un espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$ y sea $X = \pi(\operatorname{rad} E)$ su vértice. Si $\phi : E \to E^*$ es la polaridad asociada a la métrica T_2, entonces $\operatorname{Im} \phi = (\operatorname{rad} E)^\circ$ y $\operatorname{Ker} \phi = \operatorname{rad} E$ (véanse V.2.1 y V.2.2); por lo tanto $\phi : E \to (\operatorname{rad} E)^\circ$ es un epimorfismo a través del cual T_2 es proyectable (véase V.1.2). Si denotamos por T^2 la métrica proyectada en $(\operatorname{rad} E)^\circ$, entonces $\langle T^2 \rangle$ es una cuádrica no singular en la subvariedad lineal $X^\circ = \pi((\operatorname{rad} E)^\circ)$ de $\mathbb{P}(E^*)$, la cual se denomina *cuádrica dual ó envolvente* del cono dado.

El lugar geométrico de la cuádrica dual es (se identifica con) el lugar geométrico de los hiperplanos tangentes al cono dado.

(b) Sea ahora $X = \pi(F)$ una subvariedad lineal de $\mathbb{P}(E)$ y sea $\langle T_2 \rangle$ una cuádrica no singular en X. Recordemos que si $E^* \to F^*$, $\omega \mapsto \omega_{|_F}$, es el morfismo natural de restricción, entonces dicho morfismo es epiyectivo y su núcleo es, por definición, F°; es decir, tenemos la sucesión exacta $0 \longrightarrow F^\circ \longrightarrow E^* \longrightarrow F^* \longrightarrow 0$. Si $\langle \bar{T}^2 \rangle$ es la cuádrica no singular sobre $\mathbb{P}(F^*)$ dual de la cuádrica que tenemos sobre X, entonces definimos la métrica T^2 sobre E^* del siguiente modo: dadas $\omega, \omega' \in E^*$,

$$T^2(\omega, \omega') := \bar{T}^2(\omega_{|_F}, \omega'_{|_F})\,;$$

T^2 es una métrica simétrica sobre E^* cuyo radical es F° (compruébese), es decir, $\langle T^2 \rangle$ es un cono en el espacio proyectivo $\mathbb{P}(E^*)$ cuyo vértice es $\pi(F^\circ) = X^\circ$. Dicho cono se denomina *cono dual ó envolvente* de la cuádrica dada en X.

El lugar geométrico del cono dual es (se identifica con) el lugar geométrico de los hiperplanos de $\mathbb{P}(E)$ cuyo corte con X es tangente a la cuádrica dada.

(c) Resumiendo, la envolvente de un cono de $\mathbb{P}(E)$ es una cuádrica no singular de la subvariedad lineal incidente del vértice del cono, y la envolvente de una cuádrica no singular de una subvariedad lineal X es un cono de vértice la subvariedad lineal incidente con X. Además, la relación entre ambas figuras es simétrica.

5.30 En un espacio proyectivo de dimensión 3, donde (x, y, z, t) denotan las coordenadas respecto de cierta referencia proyectiva fijada, y (u, v, w, s) denotan las coordenadas en el espacio proyectivo dual respecto de la referencia dual, calcúlense:

(a) la cónica envolvente del cono $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(yz + xz + xy + xt + yt - zt) = 0$;

(b) la cónica cuyo cono envolvente es $2v^2 + 5s^2 + 4uw + 2us - 4vs + 6ws = 0$;

(c) el cono envolvente de la cónica $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0,\ x + y + z + t = 0$;

(d) el cono cuya envolvente es la cónica $u^2 + w^2 - 2vs = 0,\ u + w - s = 0$.