Capítulo IX

El Espacio Afín Euclídeo

Todos los espacios vectoriales que aparezcan lo serán de dimensión finita y sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales.

1 Espacio Vectorial Euclídeo

Definición 1.1 Un *espacio vectorial euclídeo* es un espacio vectorial real E de dimensión finita junto con una cuádrica $\langle \Omega_2 \rangle$ no singular y de índice 0 sobre $\mathbb{P}(E)$; la cuádrica $\langle \Omega_2 \rangle$ se denomina *cuádrica del absoluto* del espacio vectorial euclídeo.

1.2 Sea $(E, \langle \Omega_2 \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y consideremos una métrica Ω_2 representante de la cuádrica del absoluto. Como el índice de Ω_2 es 0 dicha métrica no tiene parte hiperbólica y por lo tanto (E, Ω_2) es un espacio elíptico, así que la métrica Ω_2 debe ser definida positiva ó definida negativa (véanse el teorema VII.3.1 y el lema VII.3.9). Podemos suponer que es definida positiva, pues si fuera definida negativa en lugar de tomar como representante a Ω_2 tomaríamos a $-\Omega_2$. Por lo tanto Ω_2 es una métrica simétrica definida positiva, la cual se denomina *métrica euclídea* y el producto respecto de ella se llama *producto escalar*.

Podemos entonces pensar en los conceptos de longitud de un vector y de ángulo formado por dos vectores no nulos:
• se llama *longitud* (ó *módulo*) de un vector $e \in E$ al escalar $|e| := \sqrt{e \cdot e}$ (= raíz cuadrada positiva de $\Omega_2(e, e)$);
• se denomina *medida en radianes del ángulo* (ó simplemente *ángulo*) formado por dos vectores no nulos $e, v \in E$, al único escalar $\theta \in [0, \pi]$ que cumple

$$\cos \theta = \frac{e \cdot v}{|e||v|} .$$

Observación **1.3** La métrica Ω_2 de 1.2 no es la única métrica euclídea representante del absoluto: dado $\lambda > 0$, $\lambda\Omega_2$ es otra métrica euclídea representante del absoluto. Por lo tanto Ω_2 está determinada salvo un número real positivo, y los módulos de los vectores dependen de la Ω_2 elegida. Lo que no depende de la métrica euclídea que represente a la cuádrica del absoluto es "la proporción entre longitudes", es decir, dados vectores no nulos $e, v \in E$, la fracción $|e|/|v|$ no depende de la métrica Ω_2 con la que se calcule. Tampoco depende la medida de los ángulos.

Si fijamos un vector no nulo $e_0 \in E$, entonces sí es única la métrica euclídea Ω_2 representante del absoluto tal que $\Omega_2(e_0, e_0) = 1$ (esto es, $|e_0| = 1$). Por tanto, la métrica euclídea está bien determinada cuando hayamos elegido que un cierto vector no nulo tiene módulo 1, es decir, cuando hayamos fijado una unidad de longitud.

En todo lo que resta de esta sección el representante de la cuádrica del absoluto será una métrica euclídea.

Definición 1.4 Sea $(E, \langle\Omega_2\rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. Llamaremos *isometría del espacio vectorial euclídeo* $(E, \langle\Omega_2\rangle)$, a todo endomorfismo $T : E \to E$ que cumpla $T(e) \cdot T(v) = e \cdot v$ cualesquiera que sean $e, v \in E$.

Ejercicio 1.5 Toda isometría de $(E, \langle\Omega_2\rangle)$ es un automorfismo de E. Como consecuencia, las isometrías del espacio vectorial euclídeo son las isometrías respecto de la métrica Ω_2 (véase V.1.12), pero dicha definición no depende de la métrica Ω_2 representante del absoluto.

Lema 1.6 *Dado un endomorfismo T de un espacio vectorial euclídeo $(E, \langle\Omega_2\rangle)$, son equivalentes:*

(i) *T es una isometría;*

(ii) *T conserva el módulo de los vectores.*

Demostración. Basta tener en cuenta que cualesquiera que sean $e, v \in E$ tenemos

$$e \cdot v = \frac{1}{2}\left[\,|e|^2 + |v|^2 - |e - v|^2\,\right] . \quad \blacksquare$$

Lema 1.7 *El determinante de una isometría de un espacio vectorial euclídeo es* ± 1.

Demostración. Es sencilla y se deja como ejercicio. Basta tener en cuenta que para toda métrica euclídea existen bases ortonormales y que toda isometría manda bases ortonormales a bases ortonormales. $\blacksquare$

Definiciones 1.8 Las isometrías de un espacio vectorial euclídeo cuyo determinante es $+1$ se denominan *isometrías directas* (ó *giros lineales*), y las que tinen determinante -1 se llaman *isometrías inversas* (ó *reflexiones lineales*).

El conjunto de las isometrías de un espacio vectorial euclídeo es un grupo (con la operación "composición"), el cual se denomina *grupo ortogonal* y se denota O_n (n indica la dimensión del espacio). Tenemos así la sucesión exacta de grupos

$$0 \longrightarrow \{\text{giros lineales}\} \longrightarrow O_n \xrightarrow{\text{deter.}} \{+1, -1\} \longrightarrow 0\,,$$

la cual nos dice que los giros lineales forma un subgrupo normal del grupo ortogonal. Sin embargo, el producto de dos reflexiones no es una reflexión (es un giro).

Ejemplo 1.9 Sea $(E, \langle\Omega_2\rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y sea H un hiperplano vectorial de E. Se llama *simetría* respecto de H a la única isometría de E distinta de la identidad que deja fijos todos los vectores de H.

Veamos que, en efecto, dicha isometría existe y es única, es decir, sea $T : E \to E$ una isometría distinta de la identidad que deja fijo todos los vectores de H, y veamos que entonces T sólo puede ser de una forma. Como Ω_2 es una métrica euclídea, existe un vector no nulo $e \in E$ tal que $E = H \perp \langle e \rangle$, y como $T(H) = H$ y T es una isometría, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(e) = \lambda e$. Ahora tenemos $e \cdot e = T(e) \cdot T(e) = \lambda^2(e \cdot e)$, y por lo tanto debe ser $\lambda = \pm 1$; $\lambda = 1$ no puede ser, ya que entonces T sería el endomorfismo identidad de E; por lo tanto $T(e) = -e$. Hemos probado que T es la identidad sobre H y menos la identidad sobre $H^\perp$.

Ejercicio 1.10 Sea $(E, \langle \Omega_2 \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y sea F un subespacio vectorial de E. La restricción de la cuádrica del absoluto a $\mathbb{P}(F) = \pi(F)$ es también no singular y de índice 0, por lo que F tiene una estructura natural de espacio vectorial euclídeo inducida por la de E. En particular F es un subespacio no singular de E y tenemos la descomposición $E = F \perp F^\perp$, por lo que podemos definir la *simetría* respecto del subespacio F como el único endomorfismo de E que es la identidad sobre F y menos la identidad sobre $F^\perp$. (Véase el ejemplo V.1.15).

2 Clasificación de Isometrías

Fijemos en esta sección un espacio vectorial euclídeo $(E, \langle \Omega_2 \rangle)$ y una métrica euclídea Ω_2 representante del absoluto respecto de la cual se considerarán ortonormales las bases que así llamemos.

Definición 2.1 Diremos que dos isometrías T y $\bar{T}$ del espacio vectorial euclídeo E son *equivalentes* si existe otra isometría $\sigma : E \to E$ tal que $\bar{T} = \sigma \circ T \circ \sigma^{-1}$.

Lema 2.2 *Dos isometrías T y $\bar{T}$ de E son equivalentes si y sólo si existen dos bases ortonormales en E tales que la matriz de T en una de ellas es igual a la matriz de $\bar{T}$ en la otra.*

Demostración. Supongamos que T y $\bar{T}$ son equivalentes y sea $\sigma : E \to E$ una isometría tal que $\bar{T} \circ \sigma = \sigma \circ T$. Consideremos una base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E y sea $A = (a_{ij})$ la matriz de T en dicha base; dados $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tenemos

$$T(e_j) = a_{1j} e_1 + \cdots + a_{nj} e_n \qquad \Rightarrow \qquad T(e_j) \cdot e_i = a_{ij} \,.$$

Si $B = (b_{ij})$ es la matriz de $\bar{T}$ en la base ortonormal $\{\sigma(e_1), \dots, \sigma(e_n)\}$, entonces

$$b_{ij} = \bar{T}(\sigma(e_j)) \cdot \sigma(e_i) = \sigma(T(e_j)) \cdot \sigma(e_i) = T(e_j) \cdot e_i = a_{ij} \,,$$

es decir, $B = A$. El recíproco es igualmente sencillo y se deja como ejercicio. ∎

Ejercicio 2.3 Supongamos que T es una isometría de E y que F es subespacio vectorial de E que es invariante por T. Entonces la restricción $T_{|_F} : F \to F$ es una isometría. Además, el subespacio vectorial $F^\perp$ también es invariante por T.

Lema 2.4 *Si T es una isometría de E, entonces E descompone en suma ortogonal de subespacios invariantes por T, de dimensión ≤ 2, y de polinomio característico irreducible.*

Demostración. Procederemos por inducción en $n = \dim E$, siendo evidente para $n = 1$. Supongamos $n \geq 2$ y sea $p(x)$ un factor primo del polinomio característico de T, en cuyo caso $p(x)$ divide al polinomio anulador de T y por lo tanto existe un vector no nulo $e \in E$ tal que $p(T)(e) = 0$ (compruébese). Al ser $p(x)$ un polinomio irreducible de $\mathbb{R}[x]$ su grado es 1 ó 2. Veamos qué ocurre en cada caso.

El grado de $p(x)$ es 1, es decir, $p(x) = x - \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. En este caso $T(e) = \alpha e$ y por lo tanto $\langle e \rangle$ es un subespacio invariante por T, por lo que la restricción de T a $\langle e \rangle^\perp$ es una isometría (véase el ejercicio 2.3). Como la dimensión de $\langle e \rangle^\perp$ es menor que la de E, aplicando la hipótesis de inducción obtenemos

$$\langle e \rangle^\perp = E_1 \perp \cdots \perp E_s ,$$

donde, para cada $i \in \{1, \dots, s\}$, E_i es un subespacio de dimensión ≤ 2, invariante por T y de polinomio característico irreducible. Para concluir basta tener en cuenta la igualdad $E = \langle e \rangle \perp \langle e \rangle^\perp$ y que el polinomio característico del subespacio $\langle e \rangle$ es $p(x) = x - \alpha$.

El grado de $p(x)$ es 2, es decir, $p(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. En este caso

$$T(T(e)) = T^2(e) = -\alpha T(e) - \beta e \in \langle e, T(e) \rangle$$

y por lo tanto $\langle e, T(e) \rangle$ es un subespacio de dimensión 2, invariante por T y cuyo polinomio característico es $p(x) = x^2 + \alpha x + \beta$. Entonces tenemos la descomposición $E = \langle e, T(e) \rangle \perp \langle e, T(e) \rangle^\perp$ de E como suma ortogonal de subespacios invariantes por T, y para concluir basta aplicar la hipótesis de inducción a $\langle e, T(e) \rangle^\perp$. ∎

2.5 Teorema de clasificación: *Dos isometrías de un espacio vectorial euclídeo son equivalentes si y sólo si tienen el mismo polinomio característico. Además, el polinomio característico de una isometría tiene todas sus raíces (reales ó complejas) de módulo 1.*

Demostración. Sea T una isometría de E. Aplicando el lema 2.2, concluimos la demostración si vemos que en una base ortonormal de E elegida convenientemente la matriz de T está totalmente determinada por su polinomio característico.

Sea $E = E_1 \perp \cdots \perp E_s$ tal que, para cada $i \in \{1, \dots, s\}$, E_i es un subespacio invariante por T cuyo polinomio característico es irreducible, y tal que $1 \leq \dim E_i \leq 2$ (según el lema 2.4, dicha descomposición de E existe). Si en cada uno de los subespacios $E_1, \dots, E_s$ consideramos una base ortonormal, entonces la reunión de todas ellas es una base ortonormal de E. Veamos cómo actua T en cada uno de dichos subespacios invariantes.

- $\dim E_i = 1$. Sea $e \in E_i$ un vector de módulo 1; como $T(e)$ es un vector de módulo 1 que pertenece a E_i, necesariamente debe satisfacerse $T(e) = \pm e$, es decir, la matriz de la restricción de T al subespacio E_i en una base ortonormal es (± 1).
- $\dim E_i = 2$. Sea $\{e, v\}$ una base ortonormal de E_i y sea

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

la matriz de la restricción de T a E_i en dicha base. Tenemos:

$$1 = e \cdot e = T(e) \cdot T(e) = a^2 + b^2 , \tag{2.1}$$
$$1 = v \cdot v = T(v) \cdot T(v) = c^2 + d^2 , \tag{2.2}$$
$$0 = e \cdot v = T(e) \cdot T(v) = ac + bd . \tag{2.3}$$

De (2.1) se sigue que existe un único $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $a = \cos\theta$ y $b = \operatorname{sen}\theta$; de (2.3) obtenemos que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(c, d) = \lambda(b, -a)$, y de (2.2) se deduce que $\lambda = \pm 1$. En definitiva, existe un único $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que la matriz de T en la base $\{e, v\}$ es

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{ó} \qquad A' = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Si la matriz de la restricción de T a E_i es A', entonces el polinomio característico de dicha restricción es $(x - \cos\theta)(x + \cos\theta) - \operatorname{sen}^2\theta = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, que no es irreducible. Por lo tanto la matriz de la restricción de T a E_i en la base $\{e, v\}$ es A, y el polinomio característico de E_i es

$$p_i(x) = (x - \cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta = x^2 - (2\cos\theta)x + 1\,,$$

cuyas raíces son los números complejos de módulo 1 siguientes: $\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta - \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta$; nótese además que debe ser $\theta \notin \{0, \pi\}$ porque $p_i(x)$ es irreducible.

Concluyendo, si reunimos las bases ortonormales de los subespacios invariantes $E_1, \dots, E_s$ y las reordenamos convenientemente, obtenemos una base ortonormal de E tal que la matriz de T en ella es

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & & & & \\ & \overset{n_1)}{\ddots} & & & & & & & \\ & & +1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \overset{n_2)}{\ddots} & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & A_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & A_r \end{pmatrix},$$

donde cada A_i es una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\theta_i \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}, \qquad \theta_i \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)\,.$$

En particular, el polinomio característico de T es

$$(x - 1)^{n_1} \cdot (x + 1)^{n_2} \cdot (x^2 - 2\cos\theta_1 x + 1) \cdot \dots \cdot (x^2 - 2\cos\theta_r x + 1)\,,$$

de modo que el polinomio característico de T (sus raíces) determina cómo es la matriz de T en una base ortonormal de E convenientemente elegida. ∎

Ejemplos 2.6 (a) Las únicas isometrías de un espacio vectorial euclídeo de dimensión 1 son "la identidad" y "menos la identidad" (= simetría respecto del origen).

(b) En un espacio vectorial euclídeo de dimensión 2 tenemos las siguientes isometrías (expresadas matricialmente en una base ortonormal convenientemente elegida)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{identidad}\,, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{matrix}\text{simetría respecto de} \\ \text{una recta (vectorial)}\end{matrix}\,,$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{array}{l}\text{simetría respecto del}\\ \text{origen (ó giro de ángulo } \pi)\end{array}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \text{giro de ángulo } \theta\,.$$

Obsérvese que dado $\theta \in (0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$, el giro de ángulo θ es equivalente al giro de ángulo $\theta' = 2\pi - \theta$ (según la definición de equivalencia que hemos dado), ya que $\cos\theta = \cos\theta'$ y por lo tanto ambos giros tienen el mismo polinomio característico. En otras palabras, para la clasificación de isometrías que hemos hecho es suficiente considerar los ángulos de los giros en $(0,\pi)$. Calcúlese cuál es la isometría σ que hace que el giro de ángulo θ sea equivalente al giro de ángulo $2\pi-\theta$ (véase la definición 2.1).

(c) En el espacio vectorial euclídeo de dimensión 3 tenemos las siguientes isometrías

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{identidad}\,, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{array}{l}\text{simetría respecto de}\\ \text{un plano (vectorial)}\end{array},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{array}{l}\text{simetría respecto de una}\\ \text{recta (ó giro de ángulo } \pi\\ \text{alrededor de una recta)}\end{array}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{array}{l}\text{simetría res-}\\ \text{pecto del origen}\end{array},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{array}{l}\text{giro de ángulo } \theta\\ \text{alrededor de una recta}\end{array},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{array}{l}\text{composición de un giro de ángulo } \theta \text{ alrededor de una}\\ \text{recta con la simetría respecto del plano ortogonal a la recta}\end{array}.$$

3 Espacio Afín Euclídeo

Definición 3.1 Un *espacio afín euclídeo* es un espacio afín real cuyo espacio vectorial asociado es un espacio vectorial euclídeo.

Sea $(\mathbb{A}_n, V)$ un espacio afín real y consideremos su extensión vectorial E, de modo que V es un hiperplano vectorial de E, $\mathbb{A}_n$ es un hiperplano de E que no pasa por el origen y cuya dirección es V, y $\mathbb{A}_n = (\mathbb{P}(E), \pi(V))$. En estas condiciones, dar una estructura de espacio afín euclídeo sobre $\mathbb{A}_n$ es equivalente a dar una cuádrica del absoluto en $\pi(V)$. Por tanto tenemos la siguiente definición equivalente a la dada: "Un espacio afín euclídeo es un espacio afín real dotado de una cuádrica del absoluto en su hiperplano del infinito".

En un espacio afín euclídeo tenemos un concepto nuevo: la perpendicularidad.

Definición 3.2 Diremos que dos rectas de un espacio afín euclídeo $(\mathbb{A}_n, V, \langle\Omega_2\rangle)$ son *perpendiculares*, si sus direcciones son puntos del infinito conjugados respecto de la cuádrica del absoluto. En $\mathbb{A}_n$ no hay rectas autoperpendiculares porque el lugar de la cuádrica del absoluto es vacío.

Dadas rectas $P + \langle e\rangle$ y $Q + \langle v\rangle$ en $\mathbb{A}_n$, sus direcciones se corresponden con los puntos $\pi(e)$ y $\pi(v)$ de $\mathbb{P}(V)$, y que dichos puntos sean conjugados respecto de la cuádrica $\langle\Omega_2\rangle$ significa que

$\Omega_2(e, v) = 0$ (cualquiera que sea el representante Ω_2 de la cuádrica). Es decir, las rectas son perpendiculares si y sólo si sus direcciones son ortogonales.

Dada una subvariedad afín X en $\mathbb{A}_n$ tal que $\dim X \geq 1$, diremos que una recta r de $\mathbb{A}_n$ es *perpendicular* a X si r es perpendicular a toda recta contenida en X, esto es, si las direcciones de r y X son ortogonales.

Nota **3.3** No es difícil probar que al fijar una cuádrica del absoluto en el hiperplano del infinito de un espacio afín, lo que se hace es justamente introducir una noción de perpendicularidad en el conjunto de las rectas de dicho espacio afín. Es decir, toda la estructura euclídea de un espacio afín euclídeo se puede recuperar a partir de la relación de perpendicularidad que hay en el conjunto de sus rectas.

Definición 3.4 Llamaremos *sistema de referencia euclídeo* de un espacio afín euclídeo $(\mathbb{A}_n, V, \langle\Omega_2\rangle)$, a todo sistema de referencia afín $(P_0; v_1, \ldots, v_n)$ tal que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V que es ortonormal para una métrica euclídea representante de la cuádrica del absoluto. Las coordenadas afines respecto de referencias euclídeas se denominan *coordenadas euclídeas* (ó *coordenadas rectangulares*).

Ejercicio 3.5 Cada referencia euclídea $(P_0; v_1, \ldots, v_n)$ de un espacio efín euclídeo $(\mathbb{A}_n, V, \langle\Omega_2\rangle)$ define un sistema de referencia proyectivo en el hiperplano del infinito. Pruébese que la ecuación de la cuádrica del absoluto en dicha referencia proyectiva es

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0\,,$$

ecuación que no depende de la referencia euclídea de partida.

Definición 3.6 Sea $(\mathbb{A}_2, V, \langle\Omega_2\rangle)$ un plano afín euclídeo. Por ser $\langle\Omega_2\rangle$ una cuádrica no singular y de índice 0 sobre la recta del infinito, su lugar está formado por dos puntos imaginarios conjugados del infinito. Dichos puntos se denominan *puntos cíclicos* del plano afín euclídeo, y las direcciones (imaginarias conjugadas) que determinan se llaman *direcciones isótropas* del plano afín euclideo.

Si $\{e_1, e_2\}$ es una base cualquiera de V y consideramos la referencia proyectiva $P_1 = \pi(e_1)$, $P_2 = \pi(e_2)$, $U = \pi(e_1 + e_2)$, entonces al calcular las coordenadas homogéneas de los puntos del infinito que están en el lugar de la cuádrica del absoluto se obtienen como solución puntos $(1, z)$ y $(1, \overline{z})$, donde z es un número complejo no real y $\overline{z}$ es el complejo conjugado de z. En particular, si la base $\{e_1, e_2\}$ es ortonormal, entonces la ecuación de la cuádrica del absoluto es $x_1^2 + x_2^2 = 0$ (véase el ejercicio 3.5), y por lo tanto las coordenadas de los puntos cíclicos son $(1, \mathrm{i})$ y $(1, -\mathrm{i})$; las direcciones isótropas son las que determinan los vectores (imaginarios conjugados) $e_1 + \mathrm{i}e_2$ y $e_1 - \mathrm{i}e_2$.

Definición 3.7 Sea $(\mathbb{A}_2, V, \langle\Omega_2\rangle)$ un plano afín euclídeo y denotemos por I, J sus puntos cíclicos. Dadas dos rectas r y s en $\mathbb{A}_2$, llamaremos *medida en radianes del ángulo* (ó simplemente *ángulo*) formado por las rectas r y s al número real

$$\angle(r, s) := \frac{1}{2\mathrm{i}}\, \ln(R, S; I, J)\,,$$

donde R y S son los puntos del infinito de las rectas r y s, respectivamente.

Veamos que $\angle(r,s)$ es un número real bien definido salvo el signo (la definición dada depende del orden de colocación de los puntos cíclicos en la razón doble) y salvo múltiplos de π (el logaritmo neperiano complejo es una función multivalorada). Supondremos que r y s no son paralelas, porque si fuera $R=S$, entonces $(R,S;I,J)=1=\mathrm{e}^0$ y por lo tanto $\angle(r,s)=0$.

Sea entonces $\{e,v\}$ una base de V tal que $\pi(e)=R$ y $\pi(v)=S$. Según hemos dicho en 3.6, existe un número complejo no real z tal que el vector $e+zv$ representa a I y el vector $e+\overline{z}v$ representa a J. Como consecuencia, una base normalizada asociada a la referencia proyectiva (R,S,I) es $\{e,zv\}$, y como las coordenadas del vector $e+\overline{z}v$ en dicha base normalizada son $(1,\overline{z}/z)=(z,\overline{z})$, obtenemos

$$(R,S;I,J)=z/\overline{z}\,.$$

Ahora bien, todo número complejo de módulo 1 es de la forma $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\operatorname{sen}\theta$ para un único $\theta\in[0,2\pi)$, y $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ tiene su parte imaginaria >0 si y sólo si $\theta\in(0,\pi)$. En nuestro caso, uno de los dos números complejos z y $\overline{z}$ tiene su parte imaginaria >0, y si suponemos que es z, entonces existe un único $\theta\in(0,\pi)$ tal que $z=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ y $\overline{z}=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\theta)}$ y por lo tanto

$$(R,S;I,J)=\frac{z}{\overline{z}}=\frac{|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\theta)}}=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\,,\qquad\qquad (R,S;J,I)=\frac{1}{(R,S;I,J)}=\frac{1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}}=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(-\theta)}\,.$$

Si hubiéramos supuesto que es $\overline{z}$ el que tiene su parte imaginaria >0, entonces $(R,S;I,J)=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(-\theta)}$ y $(R,S;J,I)=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$ para un único $\theta\in(0,\pi)$. En cualquier caso hemos probado que existe un único $\theta\in(0,\pi)$ tal que $\angle(r,s)=\{\theta,-\theta\}$.

Por otra parte, si $\varphi=\theta+k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$ entonces

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\theta+k\pi)}=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{2k\mathrm{i}\pi}=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\,,$$

es decir,

$$\angle(r,s)=\{\,\dots,-\pi+\theta,\theta,\theta+\pi,\dots\,\}\cup\{\,\dots,-\pi-\theta,-\theta,-\theta+\pi,\dots\,\}\,.$$

Es fácil ver que de todos esos valores de $\angle(r,s)$ sólo hay dos que están en $(0,\pi)$, y si uno de ellos es θ, entonces el otro es $\theta'\in(0,\pi)$ tal que $\theta+\theta'=\pi$. Es decir, existe un únco $\theta\in(0,\pi)$ tal que $\angle(r,s)=\{\theta,\pi-\theta\}$.

Generalizando lo anterior, si r y s son rectas paralelas escribiremos $\angle(r,s)=\{0,\pi\}$.

Ejercicio 3.8 Con la notación de 3.7 tenemos:

(a) Se cumple la igualdad $\angle(r,s)=\angle(s,r)$.

(b) Son equivalentes las siguientes afirmaciones: (i) las rectas r y s son perpendiculares; (ii) la pareja de puntos (R,S) está separada armónicamente por los puntos cíclicos; (iii) $\angle(r,s)=\pi/2$ ($\Leftrightarrow\ \theta=\pi-\theta$).

(c) Si $\langle e\rangle$ y $\langle v\rangle$ son las direcciones de r y s, respectivamente, entonces los dos ángulos $\angle(r,s)$ son $\angle(e,v)$ y $\angle(e,-v)$ (véase 1.2).

Definición 3.9 Siguiendo con la notación de 3.7, supongamos que las rectas r y s se cortan en un punto afín O. En el haz de rectas que pasan por O (que es una recta proyectiva) hay dos homografías involutivas: por una parte tenemos la involución hiperbólica que definen las rectas r y s, la cual deja fijas a r y s, y manda a cada recta de dicho haz (distinta de r y s) a su conjugada armónica respecto del par (r,s); por otra parte tenemos la involución elíptica que definen los puntos cíclicos del plano, es decir, la que a cada recta afín del haz de base O la manda a la recta perpendicular a ella que pasa por O.

En estas condiciones, existen dos únicas rectas afines a y b que pasan por O y que se corresponden por ambas involuciones (véase el lema II.4.6). Dichas rectas se denominan *bisectrices* de r y s. Es decir, las bisectrices de r y s son las dos únicas rectas a y b que pasan por $r \cap s$ y para cuyos puntos del infinito A y B se cumple

$$(A,B;R,S) = -1 = (A,B;I,J)\,.$$

Ejercicio 3.10 Dadas dos rectas no paralelas r y s de un plano afín euclídeo, si a es otra recta de dicho plano que pasa por $r \cap s$, pruébese que entonces a es una de las bisectrices de r y s si y sólo si uno de los dos ángulos $\angle(r,a)$ coincide con uno de los dos ángulos $\angle(s,a)$, en cuyo caso los dos ángulos $\angle(r,a)$ coinciden con los dos ángulos $\angle(s,a)$.

4 Semejanzas y Movimientos

Fijemos en esta sección un espacio afín euclídeo $(\mathbb{A}_n, V, \langle\Omega_2\rangle)$.

Definiciones 4.1 Sea $\varphi : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$ una afinidad y sea $\vec{\varphi} : V \to V$ su isomorfismo lineal asociado. Dado un representante cualquiera Ω_2 de la cuádrica del absoluto, la afinidad φ define sobre V la métrica

$$\begin{array}{rcl} \Omega_2' : V \times V & \to & \mathbb{R} \\ (e,v) & \mapsto & \Omega_2'(e,v) := \Omega_2(\vec{\varphi}(e), \vec{\varphi}(v))\,, \end{array}$$

de modo que en el hiperplano del infinito del espacio afín tenemos dos cuádricas: $\langle\Omega_2\rangle$ y $\langle\Omega_2'\rangle$. Es inmediato comprobar que la cuádrica $\langle\Omega_2'\rangle$ no depende del representante del absoluto que se haya elegido para definir la métrica Ω_2'. Diremos que la afinidad φ es una *semejanza* del espacio afín euclídeo si "deja invariante la cuádrica del absoluto", es decir, si $\langle\Omega_2'\rangle = \langle\Omega_2\rangle$.

Supongamos que φ es una semejanza, esto es, que existe un único $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tal que $\Omega_2' = \lambda\Omega_2$. Dicho escalar λ no depende del representante Ω_2 elegido (compruébese) y por lo tanto es un invariante de la semejanza. Además, si Ω_2 es una métrica euclídea, entonces de la definición de Ω_2' se sigue que ésta también es una métrica euclídea y por lo tanto $\lambda > 0$. Llamaremos *razón de la semejanza* φ al número real positivo $\rho = \sqrt{\lambda}$. Las semejanzas de razón 1 se denominan *movimientos* (ó *deslizamientos*).

Ejercicio 4.2 Con la notación de VI.1.18, una afinidad $\varphi : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$ es una semejanza si y sólo si $\langle\vec{\varphi}_*(\Omega_2)\rangle = \langle\Omega_2\rangle$. Es decir, φ es una semejanza si y sólo si la proyectividad $\widetilde{\vec{\varphi}} : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ deja invariante la cuádrica del absoluto (véase la definición VI.1.19).

Para el resto de esta sección fijamos una métrica euclídea Ω_2 representante de la cuádrica del absoluto de $\mathbb{A}_n$, con lo que en particular tenemos fijada una unidad de medida de longitudes en el espacio vectorial euclídeo V (véase la observación 1.3).

Ejercicio 4.3 Una afinidad $\varphi : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$ es una semejanza si y sólo si existe un escalar $\rho > 0$ tal que $\vec{\varphi}(e) \cdot \vec{\varphi}(v) = \rho^2(e \cdot v)$ para cualesquiera $e, v \in V$, en cuyo caso ρ es la razón de la semejanza φ. Como consecuencia, los movimientos son las afinidades cuya aplicación lineal asociada es una isometría (véase la definición 1.4).

Definición 4.4 Diremos que un movimiento es *directo* (ó que es un *giro*) si su aplicación lineal asociada es una isometría directa, y diremos que es *inverso* (ó que es una *reflexión*) si su aplicación lineal asociada es una isometría inversa (véase la definición 1.8).

Definición 4.5 Dados puntos $P, Q \in A_n$ existe un único vector $v \in V$ tal que $P = Q + v$, y llamaremos *distancia* de P a Q al escalar $\mathrm{d}(P, Q)$ definido por la igualdad

$$\mathrm{d}(P, Q) := |v| = \sqrt{v \cdot v}\,.$$

Ejercicio 4.6 La definición de distancia dada en 4.5 depende, obviamente, de la unidad de medida fijada para los módulos de los vectores, pero las siguientes definiciones no dependen de dicha unidad de medida y son equivalentes a las dadas en 4.1 (téngase en cuenta el ejercicio 4.3): "Una afinidad $\varphi : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$ se dice que es una semejanza si existe $\rho > 0$ tal que

$$\mathrm{d}(\varphi(P), \varphi(Q)) = \rho\ \mathrm{d}(P, Q)$$

para cualesquiera $P, Q \in \mathbb{A}_n$, en cuyo caso ρ se denomina razón de la semejanza φ. Se definen los movimientos de $\mathbb{A}_n$ como las autoafinidades suyas que preservan las distancias."

4.7 Del ejercicio 4.6 se sigue que si φ_1 y φ_2 son semejanzas de $\mathbb{A}_n$ de razones ρ_1 y ρ_2, respectivamente, entonces $\varphi_1 \circ \varphi_2$ es una semejanza de razón $\rho_1\rho_2$. Por lo tanto, las semejanzas de $\mathbb{A}_n$ son un grupo y la razón define un morfismo de grupos entre él y el grupo multiplicativo $(\mathbb{R}^+, \cdot)$. El núcleo de dicho morfismo son los movimientos, es decir, es exacta la sucesión

$$0 \longrightarrow \{\text{movimientos}\} \longrightarrow \{\text{semejanzas}\} \xrightarrow{\text{razón}} \mathbb{R}^+ \longrightarrow 0\,.$$

En particular, los movimientos son un subgrupo normal de las semejanzas.

Ejercicios 4.8 (a) Las traslaciones de $\mathbb{A}_n$ forman un subgrupo conmutativo del grupo de las semejanzas de $\mathbb{A}_n$.

(b) Dados $\lambda \in \mathbb{R}^*$ y $C \in \mathbb{A}_n$ sea $h_{C,\lambda}$ la homotecia de centro C y razón λ (véase el ejemplo III.2.2 (b)); $h_{C,\lambda}$ es una semejanza de razón $|\lambda|$.

(c) Sea $X = P + V'$ una subvariedad afín de $\mathbb{A}_n$ ($P \in X$ y V' es la dirección de X). Utilizando que una aplicación afín está determinada por la imagen de un punto y por su aplicación lineal asociada, definimos la *simetría* respecto de X como la aplicación afín $\sigma_X : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$ que deja fijo el punto P y cuya aplicación lineal asociada es la simetría respecto del subespacio vectorial V' (véase el ejercicio 1.10). La aplicación σ_X deja fijos los puntos de X y sólo ellos (compruébese), por lo que su definición no depende del punto P elegido en X. Tenemos: (i) la simetría σ_X es una involución; (ii) dado un punto $Q \in \mathbb{A}_n$ tal que $Q \notin X$, la recta $Q + \sigma_X(Q)$ corta a X en un único punto, el cual es justamente el punto medio de Q y $\sigma_X(Q)$; (iii) cuando $\dim X \geq 1$ se cumple que la recta $Q + \sigma_X(Q)$ es perpendicular a X.

Proposición 4.9 *Toda semejanza $\varphi : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$ que no sea un movimiento tiene un único punto fijo, el cual se denomina* centro de la semejanza.

Demostración. Fijemos $P_0 \in \mathbb{A}_n$ y sea $v_0 \in V$ tal que $\varphi(P_0) = P_0 + v_0$. Sea $v \in V$ un vector arbitrario y veamos qué debe satisfacerse para que el punto $P = P_0 + v$ quede fijo por φ:

$$\varphi(P) = P \iff P_0 + v_0 + \vec{\varphi}(v) = P_0 + v \iff v_0 + \vec{\varphi}(v) = v \iff (I - \vec{\varphi}\,)(v) = v_0$$

(donde I es el endomorfismo identidad de V). Ahora, 1 no es valor propio de $\vec{\varphi}$ porque φ no es un movimiento (compruébese); por lo tanto $I - \vec{\varphi}$ es un automorfismo de V y como consecuencia el único punto fijo de φ es $P_0 + (I - \vec{\varphi}\,)^{-1}(v_0)$. ∎

Proposición 4.10 *Una semejanza $\varphi : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$ que no es movimiento descompone de modo único en producto de una homotecia de razón positiva y de un movimiento que conmutan. Además, el centro de la semejanza es el centro de la homotecia y es un punto fijo del movimiento.*

Demostración. Sea ρ ($\neq 1$) la razón de φ y sea $C \in \mathbb{A}_n$ el centro de φ. Si $h_{C,\rho}$ es la homotecia de centro C y razón ρ, entonces $\tau = h_{C,\rho}^{-1} \circ \varphi$ es un movimiento tal que $\varphi = h_{C,\rho} \circ \tau$. Es claro que $\tau(C) = C$. Además τ y $h_{C,\rho}$ conmutan: dado $P = C + v$ con $v \in V$ tenemos

$$\begin{aligned}(h_{C,\rho} \circ \tau)(P) &= h_{C,\rho}(\tau(C+v)) = h_{C,\rho}(C + \vec{\tau}(v)) = C + \rho\vec{\tau}(v) \\ &= C + \vec{\tau}(\rho v) = \tau(C + \rho v) = \tau(h_{C,\rho}(C+v)) = (\tau \circ h_{C,\rho})(P)\,.\end{aligned}$$

Sean ahora h' una homotecia de razón positiva y τ' un movimiento tales que $h' \circ \tau' = \tau' \circ h' = \varphi$. Es claro que la razón de h' es ρ. Si C' es el centro de h' tenemos $\tau'(C') = \tau'(h'(C')) = h'(\tau'(C))$, y por lo tanto $\tau'(C') = C'$ porque el único punto fijo de h' es C'. Pero entonces $\varphi(C') = C'$, y como el único punto fijo de φ es C debe ser $C' = C$. ∎

El siguiente lema caracteriza las isometrías y por lo tanto servirá para caracterizar los movimientos. Como no puede ser de otro modo, los dos próximos resultados son independientes de la unidad de medida que tenemos fijada en esta sección.

Lema 4.11 *Una aplicación biyectiva $f : V \to V$ es una isometría si cumple:*

(i) $f(0) = 0$;

(ii) $|f(e) - f(v)| = |e - v|$ *cualesquiera que sean* $e, v \in V$.

Demostración. La aplicación f conserva el producto escalar: dados $e, v \in V$ tenemos

$$\begin{aligned} f(e) \cdot f(v) &= \frac{1}{2}\Big[|f(e)|^2 + |f(v)|^2 - |f(e) - f(v)|^2\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[|f(e) - f(0)|^2 + |f(v) - f(0)|^2 - |f(e) - f(v)|^2\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[|e - 0|^2 + |v - 0|^2 - |e - v|^2\Big] = \frac{1}{2}\Big[|e|^2 + |v|^2 - |e - v|^2\Big] = e \cdot v\,. \end{aligned}$$

Ahora, dados $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, de la igualdad probada se sigue que para todo $x \in V$ tenemos

$$\Big(f(\lambda e + \mu v) - \lambda f(e) - \mu f(v)\Big) \cdot f(x) = (\lambda e + \mu v - \lambda e - \mu v) \cdot x = 0\,,$$

y como f es biyectiva obtenemos $f(\lambda e + \mu v) - \lambda f(e) - \mu f(v) = 0$, es decir, f es lineal. ∎

Teorema 4.12 (Caracterización de movimientos) *Una aplicación $\tau : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$ es un movimiento si y sólo si τ es una biyección que conserva las distancias.*

Demostración. Ya sabemos que los movimientos son biyecciones que conservan las distancias. Recíprocamente, sea $\tau : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$ una biyección que conserva las distancias y probemos que entonces τ es un movimiento. Fijemos un punto $P_0 \in \mathbb{A}_n$ y consideremos la aplicación $f : V \to V$ definida del siguiente modo: dado $v \in V$, $f(v)$ es el único vector de V que satisface $\tau(P_0 + v) = \tau(P_0) + f(v)$. Tenemos:

- La aplicación f es una biyección (compruébese, basta tener en cuenta que τ lo es).
- $\tau(P_0) + 0 = \tau(P_0) = \tau(P_0 + 0) = \tau(P_0) + f(0)$ y por lo tanto $f(0) = 0$.
- Dados $e, v \in V$, si $P = P_0 + e$ y $Q = P_0 + v$, entonces $\tau(P) = \tau(P_0) + f(e)$ y $\tau(Q) = \tau(P_0) + f(v)$ y obtenemos

$$\left.\begin{array}{r} P = Q + (e - v) \ \Rightarrow \ \mathrm{d}(P, Q) = |e - v| \\ \tau(P) = \tau(Q) + (f(e) - f(v)) \ \Rightarrow \ \mathrm{d}(\tau(P), \tau(Q)) = |f(e) - f(v)| \end{array}\right\} \Rightarrow |f(e) - f(v)| = |e - v|.$$

Hemos probado que f está en las hipótesis del lema 4.11 y por lo tanto es una isometría. En particular f es lineal y por tanto τ es la afinidad que manda P_0 a $\tau(P_0)$ y cuya aplicación lineal asociada es f, pot lo que τ es un movimiento. ∎

5 Clasificación de Movimientos

En esta sección fijaremos un espacio afín euclídeo $(\mathbb{A}_n, V, \langle\Omega_2\rangle)$ y en él una métrica euclídea Ω_2 representante de la cuádrica del absoluto (es decir, fijaremos una únidad de medida de las distancias en $\mathbb{A}_n$). En particular, las bases asociadas a las referencias euclídeas que consideremos serán ortonormales respecto de Ω_2 (véase la definición 3.4).

Definición 5.1 Diremos que dos movimientos T y T' de $\mathbb{A}_n$ son *equivalentes* si existe otro movimiento τ de $\mathbb{A}_n$ tal que $T' = \tau \circ T \circ \tau^{-1}$.

Lema 5.2 *Dos movimientos T y T' de $\mathbb{A}_n$ son equivalentes si y sólo si existen dos referencias euclídeas en $\mathbb{A}_n$ tales que la matriz de T en una de ellas es igual a la matriz de T' en la otra. (Véase la definición* III.3.7*).*

Demostración. Supongamos que T y T' son movimientos equivalentes y sea τ un movimiento tal que $\tau \circ T = T' \circ \tau$, en cuyo caso $\vec{\tau} \circ \vec{T} = \vec{T}' \circ \vec{\tau}$. Dada una referencia euclídea $(P_0; v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{A}_n$, si denotamos $\bar{P}_0 = \tau(P_0)$, $\bar{v}_1 = \vec{\tau}(v_1)$, . . . , $\bar{v}_n = \vec{\tau}(v_n)$, entonces $(\bar{P}_0; \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ también es una referencia euclídea (porque $\vec{\tau}$ es una isometría), y es fácil ver que la matriz de T' en ella es igual a la matriz de T en la referencia dada (véase el lema 2.2).

Supongamos ahora que existen referencias euclídeas $(P_0, v_1, \dots, v_n)$ y $(\bar{P}_0, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ tales que la matriz de T en la primera es igual a la matriz de T' en la segunda. Si $\vec{\tau}$ es la única isometría de V que manda la base $\{v_1, \dots, v_n\}$ a la base $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$, y si τ es la única afinidad de $\mathbb{A}_n$ que manda P_0 a $\bar{P}_0$ y tiene a $\vec{\tau}$ por aplicación lineal asociada, entonces τ es un movimiento que cumple $\tau \circ T = T' \circ \tau$. ∎

Definición 5.3 Se llama *módulo de deslizamiento* de un movimiento T de $\mathbb{A}_n$ al número real

$$\delta(T) = \inf \{ \, \mathrm{d}(P, T(P)) \, : \, P \in \mathbb{A}_n \} \, \geq \, 0 \, .$$

Proposición 5.4 *Dado un movimiento $T : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$ se satisfacen:*

(i) *Existen puntos $P \in \mathbb{A}_n$ tales que* $\mathrm{d}(P, T(P)) = \delta(T)$.

(ii) *Existe un vector $w \in V$ tal que si $P \in \mathbb{A}_n$ cumple* $\mathrm{d}(P, T(P)) = \delta(T)$ *entonces $T(P) = P + w$. Claramente el vector w con dicha propiedad es único, y se denomina* vector de deslizamiento *de T. También es clara la igualdad $|w| = \delta(T)$.*

(iii) *El vector de deslizamiento es invariante por la aplicación lineal asociada: $\vec{T}(w) = w$.*

Demostración. Fijemos un punto $P_0 \in \mathbb{A}_n$ y sea $v_0 \in V$ tal que $T(P_0) = P_0 + v_0$. Dado un punto cualquiera $P \in \mathbb{A}_n$ existe $v \in V$ tal que $P = P_0 - v$, y por tanto

$$T(P) = T(P_0 - v) = T(P_0) - \vec{T}(v) = P_0 + v_0 - \vec{T}(v) = P + v + v_0 - \vec{T}(v) = P + v_0 - (\vec{T} - I)(v) \, .$$

Veamos qué debe satisfacer v para que $\mathrm{d}(P, T(P)) = |v_0 - (\vec{T} - I)(v)|$ sea igual a $\delta(T)$. Es decir, denotemos $U = \mathrm{Im}(\vec{T} - I) = (\vec{T} - I)(V)$ y calculemos $u \in U$ tal que el módulo $|v_0 - u|$ sea mínimo. De la descomposición $V = U \perp U^\perp$ se sigue que existen vectores únicos $u_0 \in U$ y $u_1 \in U^\perp$ tales que $v_0 = u_0 + u_1$, y por lo tanto

$$|v_0 - u|^2 = |u_0 - u + u_1|^2 = |u_0 - u|^2 + |u_1|^2 \, ;$$

es claro entonces que $|v_0 - u|$ es mínimo si y sólo si $u = u_0$. Hemos obtenido: para un punto $P = P_0 - v$ la distancia $\mathrm{d}(P, T(P))$ es mínima si y sólo si $u_0 = (\vec{T} - I)(v)$, donde u_0 es la "proyección ortogonal" de v_0 sobre U.

(i) Existen puntos P tales que $\mathrm{d}(P, T(P)) = \delta(T)$, ya que por ser u_0 un vector de $U = (\vec{T} - I)(V)$, existen vectores v que son solución de la ecuación $u_0 = (\vec{T} - I)(v)$.

(ii) Si $P = P_0 - v$ es un punto tal que $\mathrm{d}(P, T(P)) = \delta(T)$, entonces $u_0 = \vec{T}(v) - v$ y por lo tanto

$$T(P) = T(P_0 - v) = P_0 + v_0 - \vec{T}(v) = P_0 + v_0 - v - u_0 = P + (v_0 - u_0) = P + u_1 \, ;$$

el vector $w = u_1$ es el vector de deslizamiento del movimiento T. Nótese que w es la proyección ortogonal de v_0 sobre $U^\perp$.

(iii) Sea P un punto tal que $\mathrm{d}(P, T(P)) = \delta(T)$. Como T es un movimiento tenemos $\mathrm{d}(T(P), T^2(P)) = \delta(T)$ y por lo tanto $T^2(P) = T(P) + w$ en virtud del apartado (ii); pero de la igualdad $T(P) = P + w$ obtenemos $T^2(P) = T(P) + \vec{T}(w)$, por lo que concluimos que el vector de deslizamiento w es invariante por $\vec{T}$. ∎

5.5 Teorema de clasificación: *Dos movimientos son equivalentes, si y sólo si, tienen el mismo módulo de deslizamiento y sus aplicaciones lineales asociadas tienen el mismo polinomio característico.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que $T, T' : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$ son movimientos equivalentes y sea τ otro movimiento de $\mathbb{A}_n$ tal que $\tau \circ T = T' \circ \tau$. Por una parte, como las isometrías $\vec{T}$ y $\vec{T}'$

son equivalentes (porque $\vec{\tau}\circ\vec{T} = \vec{T}'\circ\vec{\tau}$), del teorema 2.5 se sigue que tienen el mismo polinomio característico. Por otra parte, dado $P \in \mathbb{A}_n$ tenemos

$$\mathrm{d}(P, T(P)) = \mathrm{d}(\tau(P), \tau(T(P))) = \mathrm{d}(\tau(P), T'(\tau(P))) = \mathrm{d}(P', T'(P'))\,,$$

y basta tener en cuenta que la aplicación $\tau : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$, $P \mapsto \tau(P) = P'$, es una biyección para concluir que T y T' tienen el mismo módulo de deslizamiento.

Sea ahora T un movimiento de $\mathbb{A}_n$ y veamos que podemos encontrar una referencia euclídea respecto de la cual la matriz de T queda completamente determinada por $\delta(T)$ y por el polinomio característico de $\vec{T}$. De este modo, aplicando el lema 5.2 quedaría probado que si dos movimientos tienen el mismo módulo de deslizamiento y sus aplicaciones lineales asociadas tienen el mismo polinomio característico, entonces son movimientos equivalentes.

Distingamos dos casos:

(a) El movimiento T tiene puntos fijos, es decir, $\delta(T) = 0$. Sea $P_0 \in \mathbb{A}_n$ tal que $T(P_0) = P_0$ y consideremos una base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V respecto de la cual la matriz de la isometría $\vec{T}$ sea reducida (véase la demostración del teorema 2.5), esto es,

$$\text{matriz de } \vec{T} = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& A_1 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& A_r \end{pmatrix},$$

donde cada A_i es una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\theta_i \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}, \qquad \theta_i \in (0, \pi)\,.$$

Como ya sabemos, esta matriz viene determinada por el polinomio característico de $\vec{T}$. Si consideramos la referencia euclídea $(P_0; v_1, \ldots, v_n)$, entonces la matriz de T en ella es

$$\text{matriz de } T = \left(\begin{array}{c|ccccccccc} 1 & 0 & . & . & . & . & . & & & 0 \\ \hline 0 & 1 &&&&&&&& \\ & & \ddots &&&&&&& \\ . &&& 1 &&&&&& \\ . &&&& -1 &&&&& \\ . &&&&& \ddots &&&& \\ . &&&&&& -1 &&& \\ . &&&&&&& A_1 && \\ &&&&&&&& \ddots & \\ 0 &&&&&&&&& A_r \end{array}\right).$$

(b) El movimiento T no tiene puntos fijos, es decir, $\delta(T)=\lambda>0$. Sea $P_0\in\mathbb{A}_n$ tal que $\mathrm{d}(T(P_0),P_0)=\lambda$ y sea w el vector de deslizamiento de T. Si definimos $v_1=\lambda^{-1}w$, entonces v_1 es un vector unitario (porque $|w|=\lambda$) tal que $\vec{T}(v_1)=v_1$ (porque $\vec{T}(w)=w$). Como $\langle v_1\rangle$ es invariante por la isometría $\vec{T}$, el subespacio $V'=\langle v_1\rangle^\perp$ también es invariante por $\vec{T}$. Si consideramos una base ortonormal $\{v_2,\dots,v_n\}$ de V' tal que la matriz de la restricción de $\vec{T}$ a V' sea reducida, entonces $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ es una base ortonormal de V tal que la matriz de $\vec{T}$ en ella es reducida. Teniendo en cuenta que $T(P_0)=P_0+w=P_0+\lambda v_1$, concluimos que $(P_0;v_1,\dots,v_n)$ es una referencia euclídea respecto de la cual

$$\text{matriz de } T=\left(\begin{array}{c|cccccccc} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & 0 \\ \hline \lambda & 1 & & & & & & & \\ 0 & & \ddots & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ \cdot & & & & -1 & & & & \\ \cdot & & & & & \ddots & & & \\ \cdot & & & & & & -1 & & \\ \cdot & & & & & & & A_1 & \\ \cdot & & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & & & A_r \end{array}\right). \blacksquare$$

5.6 Movimientos en la recta, el plano y el espacio: Antes de dar los distintos movimientos en las dimensiones bajas, analicemos un movimiento $T:\mathbb{A}_n\to\mathbb{A}_n$ dependiendo de que tenga ó no puntos fijos.

(a) T tiene puntos fijos: $\delta(T)=0$. Si en el espacio afín $\mathbb{A}_n$ fijamos un punto P_0 tal que $T(P_0)=P_0$, entonces tenemos la biyección

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{A}_n \\ v & \mapsto & P_0+v\,, \end{array}$$

siendo conmutativo el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{A}_n \\ {\scriptstyle\vec{T}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle T} \\ V & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{A}_n\,. \end{array}$$

Es decir, mediante la identificación $V\simeq\mathbb{A}_n$, el movimiento T de $\mathbb{A}_n$ se identifica con la isometría $\vec{T}$ de V, y las isometrías ya sabemos clasificarlas.

(b) T no tiene puntos fijos: $\delta(T)>0$. Sea $P_0\in\mathbb{A}_n$ tal que $\mathrm{d}(P_0,T(P_0))=\delta(T)$ y sea w el vector de deslizamiento de T. Si consideramos el movimiento $M=\tau_{-w}\circ T$ (donde τ_{-w} es la traslación por el vector $-w$), entonces tenemos:
- $\vec{M}=\vec{T}$, ya que $\vec{\tau}_{-w}$ es la identidad (como ocurre para toda traslación);
- M deja fijo a P_0, ya que $T(P_0)=P_0+w$;
- M deja fijos todos los puntos de la recta $P_0+\langle w\rangle$: $M(P_0+\mu w)=M(P_0)+\vec{M}(\mu w)=P_0+\vec{T}(\mu w)=P_0+\mu\vec{T}(w)=P_0+\mu w$.

Resumiendo, en este caso T es composición de un movimiento que tiene toda una recta de puntos fijos, y de una traslación en la dirección de dicha recta: $T=\tau_w\circ M$.

A continuación aparecen las tablas de clasificación de los movimientos del espacio afín euclídeo en las dimensiones bajas.

Movimientos de la recta afín euclídea			
$\delta(T) = 0$		$\delta(T) > 0$	
Matriz de $\vec{T}$	Descripción de T	Matriz de $\vec{T} = \vec{M}$	Descripción de T
(1)	Identidad	(1)	Traslación
(-1)	Simetría respecto de un punto		

Movimientos del plano afín euclídeo			
$\delta(T) = 0$		$\delta(T) > 0$	
Matriz de $\vec{T}$	Descripción de T	Matriz de $\vec{T} = \vec{M}$	Descripción de T
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Identidad	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Traslación
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	Simetría respecto de una recta	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	Simetría respecto de una recta compuesta con una traslación en la dirección de dicha recta
$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$	Giro de ángulo $\theta \in (0, \pi]$ alrededor de un punto (*)		

(*) No consideramos el caso $\theta = 0$ porque se corresponde con la identidad. Cuando $\theta = \pi$, T es la simetría respecto de un punto y la matriz de $\vec{T}$ es

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Movimientos del espacio afín euclídeo			
$\delta(T)=0$		$\delta(T)>0$	
Matriz de $\vec{T}$	Descripción de T	Matriz de $\vec{T}=\vec{M}$	Descripción de T
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Identidad	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Traslación
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	Simetría respecto de un plano	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	Simetría respecto de un plano compuesta con una traslación en una dirección de dicho plano
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$	Giro de ángulo $\theta \in (0,\pi]$ alrededor de una recta ([1])	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$	Giro de ángulo $\theta \in (0,\pi]$ alrededor de una recta compuesto con una traslación en la dirección de dicha recta ([2])
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$	Giro de ángulo $\theta \in (0,\pi]$ alrededor de una recta compuesto con una simetría respecto de un plano perpendicular a dicha recta ([3])		

([1]) Cuando $\theta=\pi$, T es la simetría respecto de una recta y la matriz de $\vec{T}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

([2]) Cuando $\theta=\pi$, T es una simetría respecto de una recta compuesta con una traslación en la dirección de dicha recta.

([3]) No consideramos el caso $\theta=0$ porque se corresponde con la simetría respecto de un plano. Cuando $\theta=\pi$, T es una simetría respecto de un punto y la matriz de $\vec{T}$ es

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

6 Problemas

En los siguientes enunciados, $\mathbb{A}_n$ será un espacio afín euclídeo de dimensión n en el que se ha fijado una referencia euclídea. En particular, en el espacio vectorial euclídeo V asociado a $\mathbb{A}_n$ hay fijada una métrica euclídea.

6.1 Supongamos $n = 2$ y sean $\{e_1, e_2\}$, $\{u_1, u_2\}$ bases ortonormales de V. Considérese un giro lineal $\varphi : V \to V$, para el cual existirá un único $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que su matriz en la base $\{e_1, e_2\}$ es $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Tenemos (véase el ejemplo 2.6 (b)):

(a) Si las bases $\{e_1, e_2\}$ y $\{u_1, u_2\}$ están igualmente orientadas (es decir, si el determinante de la matriz de cambio de base de una a la otra es positivo), entonces la matriz de φ en la base $\{u_1, u_2\}$ también es A.

(b) Si las bases $\{e_1, e_2\}$ y $\{u_1, u_2\}$ no están igualmente orientadas entonces la matriz de φ en la base $\{u_1, u_2\}$ es $\begin{pmatrix} \cos\theta' & -\operatorname{sen}\theta' \\ \operatorname{sen}\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix}$, donde $\theta' = 2\pi - \theta$.

6.2 Se denomina *rombo* a todo paralelogramo de un plano afín euclídeo cuyos cuatro lados miden igual.

Un paralelogramo de $\mathbb{A}_2$ es un rombo si y sólo si sus diagonales son perpendiculares.

6.3 **Caracterización de las semejanzas:** Una afinidad $\varphi : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$ es una semejanza si y sólo si conserva la perpendicularidad. Como consecuencia, φ es una semejanza si y sólo si conserva los ángulos (i.e., si y sólo si $\angle(\varphi(r), \varphi(s)) = \angle(r, s)$ para cada par de rectas coplanarias r y s de $\mathbb{A}_n$).

6.4 **Pons Asinorum:** Un triángulo de un plano efín euclídeo se denomina *isósceles* si dos de sus lados son iguales, en cuyo caso el tercer lado se llama *base* del triángulo.

Los dos ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales. Además, la mediatríz [1] de la base coincide con la bisectriz interior en el vértice opuesto a la base.

6.5 Dadas dos rectas no paralelas de $\mathbb{A}_2$, la composición de las simetrías respecto de ellas es un giro. Cuáles son el centro y el ángulo de dicho giro?

6.6 Estúdiese la composición de dos simetrías de $\mathbb{A}_2$ respecto de dos rectas paralelas distintas.

6.7 Dados puntos distintos P y Q en $\mathbb{A}_2$, la composición de los giros centrados en dichos puntos y de ángulo $\pi/2$ es una simetría respecto de un punto. Respecto de qué punto?

6.8 Dados puntos distintos P y Q en $\mathbb{A}_2$, la composición de las simetrías respecto de dichos puntos es una traslación. Qué vector define la traslación?

[1] Dados dos puntos distintos A, B de un plano afín euclídeo, se define la *mediatriz* del segmento AB como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de A y de B. Dicha mediatriz coincide con la recta perpendicular a la recta $A + B$ que pasa por el punto medio del segmento.

6.9 Estúdiense los movimientos de $\mathbb{A}_2$ cuyas ecuaciones son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} x' = (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = (2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{array}\right\} ;$$

$$\left.\begin{array}{l} x' = y + 5 \\ y' = x + 1 \end{array}\right\} ; \qquad \left.\begin{array}{l} x' = 3 + \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = 5 - \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{array}\right\} .$$

6.10 Calcúlese la ecuación de los siguientes movimientos de $\mathbb{A}_2$:

(a) la simetría respecto de la recta $x - y = 2$;

(b) el giro de centro $(1, 0)$ y ángulo $3\pi/4$:

(c) la composición de una simetría respecto de una recta paralela a la recta $2x + y = 3$, con la traslación que transforma el punto $(2, 1)$ en el punto $(1, 0)$;

(d) el giro de ángulo $\pi/3$ que transforma el punto $(2, 1)$ en el punto $(1, 0)$;

(e) la composición de los movimientos de (b) y (c).

6.11 Calcúlense los movimientos de $\mathbb{A}_2$ que transforman $(1, 0)$ en $(2, 1)$ y $(0, 1)$ en $(1, 0)$.

6.12 Calcúlense los movimientos de $\mathbb{A}_2$ que conmutan con la simetría respecto de la recta de ecuación $x - 2y = 1$.

6.13 Calcúlense los movimientos de $\mathbb{A}_2$ que conmutan con la simetría respecto de un punto.

6.14 Calcúlense los movimientos de $\mathbb{A}_2$ que conmutan con la traslación por un vector v_0.

6.15 Determínense los valores de los parámetros a, b, c para que sea una semejanza la afinidad de $\varphi : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_2$ cuyas ecuaciones son

$$\left.\begin{array}{l} x' = ay + c \\ y' = x + b \end{array}\right\} .$$

Estúdiese, para dichos valores, el movimiento asociado a φ (véase la proposición 4.10).

6.16 Dados dos planos paralelos distintos en $\mathbb{A}_3$, la composición de las simetrías respecto de dichos planos es una traslación.

6.17 Dados dos planos no paralelos en $\mathbb{A}_3$, la composición de las simetrías respecto de dichos planos es un giro alrededor de una recta.

6.18 Dados dos puntos distintos en $\mathbb{A}_3$, la composición de las simetrías respecto de dichos puntos es una traslación.

6.19 Sean r_1 y r_2 rectas distintas de $\mathbb{A}_3$, y denotemos por σ_1 la simetría respecto de r_1 y por σ_2 la simetría respecto de r_2.

(a) Si $r_1 \cap r_2 = P_0$ es un punto, entonces la composición $\sigma_2 \circ \sigma_1$ es un giro alrededor de la recta que pasa por P_0 y es perpendicular al plano $r_1 + r_2$.

(b) Si r_1 y r_2 son paralelas, entonces la composición $\sigma_2 \circ \sigma_1$ es una traslación. Concretamente, si t es una recta del plano $r_1 + r_2$ que es perpendicular a r_1 y r_2, y si $P_1 = r_1 \cap t$ y $P_2 = r_2 \cap t$, entonces $\sigma_2 \circ \sigma_1 = \tau_{2e}$ (= traslación por el vector $2e$), siendo e el único vector que cumple $P_2 = P_1 + e$.

(c) Si r_1 y r_2 se cruzan, entonces existe una única recta s que corta a r_1 y r_2 y es perpendicular a ambas. Además, con la notación del apartado (b) tenemos $\sigma_2 \circ \sigma_1 = \tau_{2e} \circ g$, donde g es un giro alrededor de la recta s.

6.20 Calcúlese la ecuación de los siguientes movimientos de $\mathbb{A}_3$:

(a) la simetría de $\mathbb{A}_3$ respecto del plano que pasa por el punto $Q_0 = (0,1,1)$ y cuya dirección es ortogonal al vector $u = (2,1,1)$;

(b) el giro de ángulo $\pi/2$ alrededor de la recta que pasa por el origen de la referencia con la dirección del vector $v = (1,1,0)$;

(c) movimientos T cuyo módulo de deslizamiento es $\sqrt{8}$, y tales que su movimiento asociado M con puntos fijos es la simetría respecto de la recta $(1,0,0) + \langle (1,-1,0) \rangle$;

(d) el giro alrededor de la recta determinada por los puntos $(1,1,0)$ y $(0,0,1)$, y que transforma el punto $(0,1,0)$ en el punto $(1,1,1)$.

6.21 Estúdiense los movimientos de $\mathbb{A}_3$ cuyas ecuaciones son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} x' = 2 + y \\ y' = 1 - z \\ z' = -x \end{array}\right\} ; \qquad \left.\begin{array}{l} x' = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z \\ y' = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}z \\ z' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z \end{array}\right\} ;$$

$$\left.\begin{array}{l} x' = 1 + y \\ y' = 1 - z \\ z' = -x \end{array}\right\} ; \qquad \left.\begin{array}{l} x' = 2 - x \\ y' = 1 + y \\ z' = z \end{array}\right\} .$$

6.22 Determínense los valores del parámetro a para que sea una semejanza la afinidad de $\varphi : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_2$ cuyas ecuaciones son

$$\left.\begin{array}{l} x' = ax - 20y + 15z + 46 \\ y' = 20x - 9y - 12z + 16 \\ z' = -15x - 12y - 16z - 60 \end{array}\right\}$$

Estúdiese, para dichos valores, el movimiento asociado a φ (véase la proposición 4.10).

6.23 **Teorema de Cartan-Dieudonné:** Supuesto que $n \geq 2$ tenemos:

(a) Toda isometría de V puede ponerse como composición de simetrías respecto de hiperplanos vectoriales, en número menor ó igual a n (véase el ejemplo 1.9). [Indicación: Si $n = 2$ todo giro lineal es producto de dos simetrías respecto de rectas vectoriales. En general, puede procederse por inducción, o tenerse en cuenta la demostración del teorema 2.5.]

(b) Todo movimiento de $\mathbb{A}_n$ puede ponerse como composición de simetrías respecto de hiperplanos, en número menor ó igual a $n + 1$ (véase el ejercicio 4.8 (c)).