Capítulo II

Curvatura y torsión de una curva de $\mathbb{R}^3$

A lo largo de todo este capítulo, cuando digamos "Sea $\sigma = \sigma(t)$, $t \in I$, una curva ..." entenderemos que se trata de una "curva en $\mathbb{R}^3$", esto es, que tenemos $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$.

1. Preliminares

En esta sección vamos a recordar algunas nociones básicas del espacio euclídeo tridimensional, y algunas propiedades sencillas de las "funciones vectoriales de variable real" que utilizaremos con frecuencia en este capítulo y en todos los capítulos siguientes.

A lo mejor sería más apropiado que esta sección estuviera en un apéndice al final del capítulo, pero la hemos puesto al principio para intentar obligar al alumno a repasar todos los conceptos básicos que necesariamente debe conocer y debe saber utilizar.

1.1 Sean $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ y $\varphi : I \to \mathbb{R}^3$ dos funciones vectoriales definidas sobre un mismo intervalo abierto; escribamos $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ y $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$. Haciendo el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$ de dichas funciones vectoriales obtenemos la función real $\sigma \cdot \varphi : I \to \mathbb{R}$,

$$\sigma \cdot \varphi = \sigma_1 \cdot \varphi_1 + \sigma_2 \cdot \varphi_2 + \sigma_3 \cdot \varphi_3 .$$

Es claro que si σ y φ son aplicaciones de clase C^r $(r = 0, 1, \dots)$, entonces $\sigma \cdot \varphi$ es una función de clase C^r. Además, si σ y φ son diferenciables, entonces $\sigma \cdot \varphi$ es una función diferenciable y se cumple la regla usual para la derivada de un producto

$$(\sigma \cdot \varphi)' = \sigma' \cdot \varphi + \sigma \cdot \varphi' .$$

(compruébese como sencillo ejercicio). También es claro que si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, entonces $f\sigma = (f\sigma_1, f\sigma_2, f\sigma_3)$ es una aplicación diferenciable y se cumple

$$(f\sigma)' = f'\sigma + f\sigma' .$$

1.2 Recordemos: Se define el "módulo" de un vector $e \in \mathbb{R}^3$ como el número real $|e| := \sqrt{e \cdot e} \geq 0$, y se cumple $|e| = 0$ si y sólo si $e = 0$; el vector e se dice que es "unitario" si su módulo es igual a 1, es decir, si $e \cdot e = 1$. Dos vectores $e, v \in \mathbb{R}^3$ se llaman "ortogonales" si $e \cdot v = 0$. Una base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ se dice que es "ortogonal" si sus vectores son ortogonales dos a dos, y se dice que es "ortonormal" si es ortogonal y está compuesta por vectores unitarios. Para la base usual del espacio euclídeo tridimensional $\mathbb{R}^3$ suele usarse la siguiente notación

$$\vec{\mathrm{i}} := (1,0,0)\,, \qquad \vec{\mathrm{j}} := (0,1,0)\,, \qquad \vec{\mathrm{k}} := (0,0,1)\,.$$

Es claro que $\{\vec{\mathrm{i}}, \vec{\mathrm{j}}, \vec{\mathrm{k}}\}$ es una base ortonormal.

Dada una base $\{e_1, e_2, e_3\}$ en $\mathbb{R}^3$, si consideramos sus componentes (que coinciden con sus coordenadas en la base usual),

$$e_1 = a_1\vec{\mathrm{i}} + a_2\vec{\mathrm{j}} + a_3\vec{\mathrm{k}} = (a_1, a_2, a_3)\,, \qquad e_2 = (b_1, b_2, b_3)\,, \qquad e_3 = (c_1, c_2, c_3)\,,$$

entonces se dice que la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ es "positiva" (ó que está "positivamente orientada") cuando

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} > 0\,,$$

y se dice que la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ es "negativa" (ó que está "negativamente orientada") cuando

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} < 0\,.$$

Es trivial comprobar que la base usual $\{\vec{\mathrm{i}}, \vec{\mathrm{j}}, \vec{\mathrm{k}}\}$ es positiva.

1.3 Hay varias formas (todas equivalentes) de definir el producto vectorial de vectores de $\mathbb{R}^3$. Para abreviar, aquí daremos su expresión analítica respecto de las coordenadas cartesianas.

Dados vectores $e = (a_1, a_2, a_3)$ y $v = (b_1, b_2, b_3)$ en $\mathbb{R}^3$, se define el "producto vectorial" de e por v (en ese orden) como el vector $e \times v$ dado por la igualdad

$$e \times v = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{\mathrm{i}} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\vec{\mathrm{j}} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{\mathrm{k}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{1.1}$$

Las propiedades del producto vectorial se siguen de las propiedades de los determinantes: es bilineal (lineal en cada uno de sus dos argumentos) y anticonmutativo ($v \times e = -(e \times v)$), y además $e \times v \neq 0$ si y sólo si los vectores e y v son linealmente independientes.

1.4 Sean ahora $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ y $\varphi : I \to \mathbb{R}^3$ dos funciones vectoriales definidas sobre un mismo intervalo abierto; entonces tenemos la función vectorial $\sigma \times \varphi : I \to \mathbb{R}^3$. Es claro que si σ y φ son aplicaciones de clase C^r ($r = 0, 1, \dots$), entonces $\sigma \times \varphi$ es una aplicación de clase C^r. Además, cuando σ y φ son diferenciables, $\sigma \times \varphi$ también lo es y se cumple la regla para la derivada de un producto

$$(\sigma \times \varphi)' = \sigma' \times \varphi + \sigma \times \varphi'\,.$$

1.5 Dados vectores $e, v, u \in \mathbb{R}^3$, se llama "producto mixto" de e, v y u (por ese orden) al escalar $[e, v, u] = e \cdot (v \times u)$. Si denotamos

$$e = (a_1, a_2, a_3)\,, \qquad v = (b_1, b_2, b_3)\,, \qquad u = (c_1, c_2, c_3)\,,$$

entonces

$$[e, v, u] = (a_1, a_2, a_3) \cdot \left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right),$$

es decir,

$$[e, v, u] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{1.2}$$

Las propiedades del producto mixto se siguen de las propiedades de los determinantes. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} [e, v, u + \bar{u}] &= [e, v, u] + [e, v, \bar{u}]\,, \\ [e, v, u] &= -[v, e, u] = [v, u, e]\,, \\ [\lambda e, v, u] &= \lambda\,[e, v, u] = [e, \lambda v, u]\,, \\ [e, v, u] = 0 &\iff \{e, v, u\} \text{ es un sistema linealmente dependiente}\,. \end{aligned}$$

1.6 Recordemos la definición de ángulo formado por dos vectores no nulos e y v de $\mathbb{R}^3$. Como $|e|\,|v| \neq 0$, de la conocida desigualdad de Schwartz (según la cual cumple $|e \cdot v| \leq |e|\,|v|$) obtenemos

$$-1 \leq \frac{e \cdot v}{|e|\,|v|} \leq 1\,;$$

por lo tanto, como la función coseno establece una biyección del intervalo cerrado $[0, \pi]$ con el intervalo cerrado $[-1, 1]$, tenemos que existe un único $\theta \in [0, \pi]$ cumpliendo

$$\cos\theta = \frac{e \cdot v}{|e|\,|v|}\,.$$

El valor θ lo denotaremos $\measuredangle(e, v)$, y se llama "medida en radianes del ángulo" (ó simplemente "ángulo") formado por los vectores e y v: $\measuredangle(e, v) = \arccos \frac{e \cdot v}{|e|\,|v|} \in [0, \pi]$. De la definición se sigue la igualdad

$$e \cdot v = |e|\,|v|\,\cos\measuredangle(e, v)\,.$$

1.7 Dados vectores $e, v \in \mathbb{R}^3$, recordemos tres importantes propiedades del vector $e \times v$.

(a) Los vectores e y v son ortogonales a $e \times v$. Esta propiedad es clara, ya que $e \cdot (e \times v) = [e, e, v] = 0$ y $v \cdot (e \times v) = [v, e, v] = 0$.

(b) Si $e \times v \neq 0$ (lo que es equivalente a que los vectores e y v sean linealmente independientes), entonces $\{e, v, e \times v\}$ es una base positiva. En efecto, cuando $e \times v \neq 0$ tenemos

$$[e, v, e \times v] = [e \times v, e, v] = (e \times v) \cdot (e \times v) = |e \times v|^2 > 0\,.$$

(c) Si los vectores e y v son no nulos, entonces el módulo de $e \times v$ cumple la igualdad

$$|e \times v| = |e|\,|v| \operatorname{sen} \measuredangle(e, v)\,.$$

En efecto, expresando los vectores en coordenadas y utilizando la definición que hemos dado del producto vectorial llegamos a la expresión

$$|e \times v|^2 = |e|^2|v|^2 - (e \cdot v)^2\,,$$

es decir,

$$|e \times v|^2 = |e|^2|v|^2\big(1 - \cos^2 \measuredangle(e, v)\big) = |e|^2|v|^2 \operatorname{sen}^2 \measuredangle(e, v)\,;$$

para obtener la igualdad que queremos basta observar que el número real $\operatorname{sen} \measuredangle(e, v)$ es no negativo porque el ángulo $\measuredangle(e, v)$ valora en el intervalo $[0, \pi]$.

1.8 Las propiedades del punto anterior caracterizan al producto vectorial porque se cumple: Dados vectores $e, v \in \mathbb{R}^3$, si e y v son linealmente dependientes, entonces $e \times v = 0$, y si e y v son linealmente independientes, entonces $e \times v$ es el único vector que cumple las propiedades (a), (b) y (c) de 1.7.

Ejercicios 1.9 (a) De la definición del producto vectorial se obtiene de modo inmediato que se cumplen

$$\vec{\mathrm{i}} \times \vec{\mathrm{j}} = \vec{\mathrm{k}}\,, \qquad \vec{\mathrm{j}} \times \vec{\mathrm{k}} = \vec{\mathrm{i}}\,, \qquad \vec{\mathrm{k}} \times \vec{\mathrm{i}} = \vec{\mathrm{j}}\,.$$

Lo dicho en el punto 1.8 permite generalizar las anteriores igualdades en el siguiente sentido: Si $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, entonces

$$e_1 \times e_2 = e_3\,, \qquad e_2 \times e_3 = e_1\,, \qquad e_3 \times e_1 = e_2$$

si la base es directa, y

$$e_1 \times e_2 = -e_3\,, \qquad e_2 \times e_3 = -e_1\,, \qquad e_3 \times e_1 = -e_2$$

si la base es inversa.

(b) Las fórmulas (1.1) y (1.2) son válidas si se expresan los vectores en una base ortonormal positiva cualquiera: Dados vectores $e, v, u \in \mathbb{R}^3$, si sus coordenadas respecto de una base ortonormal positiva $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ son

$$e = (a_1, a_2, a_3)\,, \qquad v = (b_1, b_2, b_3)\,, \qquad u = (c_1, c_2, c_3)\,,$$

entonces

$$e \times v = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} e_3 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

y

$$[e, v, u] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2. Curvatura, torsión y triedro de Frenet

Definición 2.1 Sea $\sigma = \sigma(t)$, $t \in I$, una curva regular, que podemos suponer parametrizada por su longitud de arco (véase el lema I.3.4). Dado $t \in I$, se define el *vector tangente unitario* a la curva en el punto $\sigma(t)$ como el vector $\sigma'(t)$. Lo denotaremos T, de modo que dado $t \in I$ pondremos $T_t = \sigma'(t)$. Si escribimos $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, entonces es $T = \sigma' = (\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')$.

Por definición del vector derivado σ' tenemos

$$T_t = \sigma'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sigma(t + \Delta t) - \sigma(t)}{\Delta t} ;$$

por lo tanto, con los argumentos habituales (los utilizados en el bachillerato) podemos interpretar geométricamente el vector T_t como la "dirección de la recta que es tangente a la curva en el punto $\sigma(t)$". Independientemente de la interpretación que se haga, a continuación definimos formalmente dicha recta.

Definiciones 2.2 Sea $\sigma = \sigma(t)$, $t \in I$, una curva regular parametrizada por su longitud de arco, y fijemos en ella un punto $\sigma(t_0)$, $t_0 \in I$. Se llama *recta tangente* a la curva en el punto $\sigma(t_0)$, a la recta de $\mathbb{R}^3$ que pasa por dicho punto con la dirección del vector tangente unitario T_{t_0}. Dicha recta es el siguiente conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$:

$$\sigma(t_0) + \langle T_{t_0} \rangle = \{\sigma(t_0) + \lambda T_{t_0} \, : \, \lambda \in \mathbb{R}\} .$$

Se define el *plano normal* a la curva en el punto $\sigma(t_0)$, como el plano de $\mathbb{R}^3$ que pasa por $\sigma(t_0)$ y es perpendicular a la recta tangente a la curva en dicho punto. Es decir, el plano normal a la curva en el punto $\sigma(t_0)$ pasa por dicho punto y tiene como dirección normal la del vector T_{t_0}; luego, si $X = (x, y, z)$ denota un punto genérico de $\mathbb{R}^3$, entonces la ecuación del plano es

$$\big(X - \sigma(t_0)\big) \cdot T_{t_0} = 0 .$$

Definición 2.3 Sea $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, una curva regular parametrizada por la longitud de arco. Supongamos que la curva es de clase C^2, de modo podemos derivar otra vez y tenemos el vector $T' = \sigma'' = (\sigma_1'', \sigma_2'', \sigma_3'')$. Se define la *curvatura* de la curva σ como la función $\kappa := \big|T'\big|$, es decir,

$$\kappa = \sqrt{\big(\sigma_1''\big)^2 + \big(\sigma_2''\big)^2 + \big(\sigma_3''\big)^2} .$$

Ejercicio 2.4 Una curva (regular de clase C^2) es una recta si y sólo si tiene curvatura nula en todos sus puntos.

Ejercicio 2.5 Pruébese que una circunferencia de radio $R > 0$ del plano $\mathbb{R}^2$ tiene curvatura constante $\kappa = 1/R$. (Para hacer los cálculo podemos ver $\mathbb{R}^2$ dentro de $\mathbb{R}^3$ como el plano $z = 0$.)

Definiciones 2.6 Supongamos de nuevo que $\sigma = \sigma(t)$ es una curva regular de clase C^2 parametrizada por su longitud de arco. Si $t \in I$ es tal que $\kappa(t) \neq 0$, entonces el vector T_t' es no nulo y por lo tanto podemos normalizarlo, $T_t'/|T_t'| = T_t'/\kappa(t)$. Este vector unitario se denota N_t y se llama *vector normal principal* a la curva en el punto $\sigma(t)$,

$$N_t := \frac{T_t'}{\kappa(t)} .$$

Nótese que N está definido sólo en los puntos de la curva de curvatura κ no nula. Además, donde N está definido es ortogonal a T, ya que T y T' siempre son ortogonales: como $T \cdot T = 1$ tenemos

$$0 = (T \cdot T)' = T' \cdot T + T \cdot T' = 2(T \cdot T'),$$

por lo que debe ser $T' \cdot T = 0$.

En un punto $\sigma(t)$ de curvatura no nula, se define el *vector binormal* a la curva como el único vector B_t que cumple que $\{T_t, N_t, B_t\}$ es una base ortonormal positivamente orientada, esto es, $B_t := T_t \times N_t$.

Ejercicio 2.7 (Hélices circulares) Dadas constantes $a > 0$ y $b \neq 0$, la curva $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$, se llama *hélice circular*. Esta curva se encuentra sobre el cilindro de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$ (esto es, el cilindro circular de radio a centrado en el "eje z"). La ecuación $z = bt$ "mueve" los puntos de la curva con movimiento uniforme en la dirección del eje z; cuando el parámetro t crece en 2π las coordenadas x e y vuelven a sus valores iniciales, mientras que la coordenada z crece (si $b > 0$) ó decrece (si $b < 0$) la cantidad $2\pi|b|$, la cual se conoce como *paso de la hélice*.

Parametrícese esta hélice por su longitud de arco. Calcúlense a lo largo de ella el vector tangente unitario y la curvatura. Concretamente, pruébese que la curvatura es constante $\kappa = a/(a^2 + b^2) > 0$. Calcúlense el vector normal principal y el vector binormal.

Definición 2.8 Sea $\sigma = \sigma(t)$ una curva regular parametrizada por su longitud de arco. Supongamos que la curva es de clase C^3 y que su curvatura es no nula, de modo que el vector normal unitario N está definido y es de clase C^1. Se define la *torsión* de la curva como la función

$$\tau := N' \cdot B .$$

Ejercicios 2.9 (a) Pruébese que una circunferencia de $\mathbb{R}^2$ tiene torsión constante $\tau = 0$.

(b) Pruébese que la hélice circular del ejercicio 2.7 tiene torsión constante $\tau = b/(a^2 + b^2)$.

2.10 Dada un curva regular, su vector tangente unitario, su curvatura, ..., han sido definidos partiendo de una parametrización natural suya. Veamos que dichas definiciones "no varían esencialmente" si se cambia la parametrización por otra que también sea natural.

Sea $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$, $\sigma = \sigma(t)$, una parametrización de la curva por su longitud de arco, y sean T el vector tangente unitario y κ la curvatura de dicha curva calculados con esa parametrización. Consideremos otra parametrización natural $\bar\sigma : \bar I \to \mathbb{R}^3$, $\bar\sigma = \bar\sigma(s)$, de la misma curva, y sean $\bar T$ el vector tangente unitario y $\bar\kappa$ la curvatura calculados con esta otra parametrización. Sabemos que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $s = \pm t + \lambda$, de modo que $\sigma(t) = \bar\sigma(s(t))$ y por lo tanto

$$T = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\bar\sigma}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \pm \frac{\mathrm{d}\bar\sigma}{\mathrm{d}s} = \pm \bar T .$$

Además tenemos

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\pm\frac{\mathrm{d}\bar\sigma}{\mathrm{d}s}\right) = \pm\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}\bar\sigma}{\mathrm{d}s}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = (\pm 1)^2 \frac{\mathrm{d}^2\bar\sigma}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}^2\bar\sigma}{\mathrm{d}s^2} ,$$

y por lo tanto

$$\kappa = \left|\frac{\mathrm{d}^2\bar{\sigma}}{\mathrm{d}s^2}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}^2\bar{\sigma}}{\mathrm{d}s^2}\right| = \bar{\kappa}\,.$$

En particular tenemos que los puntos de la curva donde las funciones κ y $\bar{\kappa}$ no se anulan son los mismos, y en dichos puntos se cumplen

$$N = \text{ normalización del vector } \frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}t^2} \ = \text{ normalización del vector } \frac{\mathrm{d}^2\bar{\sigma}}{\mathrm{d}s^2} \ = \bar{N}\,,$$

$$B \,=\, T \times N \,=\, (\pm\bar{T}) \times \bar{N} \,=\, \pm\bar{B}\,,$$

$$\tau \,=\, \left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right) \cdot B \,=\, \left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) \cdot B \,=\, \left(\pm\frac{\mathrm{d}\bar{N}}{\mathrm{d}s}\right) \cdot (\pm\bar{B}) \,=\, (\pm 1)^2 \left(\frac{\mathrm{d}\bar{N}}{\mathrm{d}s}\right) \cdot \bar{B} \,=\, \bar{\tau}\,.$$

Definición 2.11 Dada una curva regular de clase C^2, sobre sus puntos de curvatura no nula tenemos la base ortonormal positiva $\{T, N, B\}$, la cual se conoce como *triedro de Frenet* (ó *triedro móvil*) de la curva.

2.12 Hemos visto en el punto 2.10 que las funciones curvatura y torsión de una curva regular (de clase suficientemente alta) están totalmente determinadas; también hemos visto que, salvo el signo del vector tangente unitario (esto es, salvo el sentido de recorrido de la curva), el triedro móvil está totalmente determinado sobre la curva.

3. Cálculos

En esta sección vamos a ver cómo calcular la curvatura, la torsión y el triedro de Frenet de una curva regular, sin necesidad de obtener previamente una parametrización suya por la longitud de arco.

Fijemos para toda la sección una curva regular $\sigma = \sigma(t)$, $t \in I$, de clase C^2 no necesariamente parametrizada por su longitud de arco.

Lema 3.1 *En todos los puntos de la curva se cumple*

$$\kappa = \frac{|\sigma' \times \sigma''|}{|\sigma'|^3}\,.$$

Además, un vector tangente unitario a la curva es $T = \dfrac{\sigma'}{|\sigma'|}\,.$

Demostración. Fijemos un valor $t_0 \in I$ y consideremos el cambio de parámetro $s = s(t) = \int_{t_0}^{t} |\sigma'(u)|\mathrm{d}u$, para el cual se cumple $s' = |\sigma'|$; de este modo obtenemos una parametrización natural de la curva que también denotaremos por σ, $\sigma = \sigma(s)$. La parametrización dada inicialmente se obtiene de ésta nueva por la fórmula $\sigma(t) = \sigma(s(t))$. Para simplificar la notación, cuando derivemos respecto del parámetro s lo indicaremos con un punto '$\,\dot{}\,$'. En particular tenemos

$$T = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}s} = \dot{\sigma}\,, \qquad\qquad \kappa = \left|\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}s^2}\right| = |\ddot{\sigma}| = |\dot{T}|\,.$$

Aplicando la regla de la cadena obtenemos $\sigma' = \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}s} \cdot \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = s'\dot{\sigma}$, y por lo tanto

$$T = \dot{\sigma} = \frac{\sigma'}{s'} = \frac{\sigma'}{|\sigma'|}\,.$$

Ahora tenemos

$$\sigma'' = \frac{\mathrm{d}\sigma'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(s'\dot{\sigma}\big) = s''\dot{\sigma} + s'\frac{\mathrm{d}\dot{\sigma}}{\mathrm{d}t} = s''\dot{\sigma} + s'\left(\frac{\mathrm{d}\dot{\sigma}}{\mathrm{d}s}\,s'\right) = s''\dot{\sigma} + \big(s'\big)^2\ddot{\sigma}\,,$$

y por lo tanto

$$\sigma' \times \sigma'' = \big(s'\dot{\sigma}\big) \times \Big(s''\dot{\sigma} + \big(s'\big)^2\ddot{\sigma}\Big) = s's''\big(\dot{\sigma} \times \dot{\sigma}\big) + \big(s'\big)^3\big(\dot{\sigma} \times \ddot{\sigma}\big)\,,$$

es decir,

$$\sigma' \times \sigma'' = |\sigma'|^3\big(\dot{\sigma} \times \ddot{\sigma}\big)\,. \tag{3.1}$$

Por definición es $\kappa = |\dot{T}| = |\ddot{\sigma}|$. Si $\kappa = 0$, entonces $\ddot{\sigma} = 0$ y de (3.1) obtenemos $\sigma' \times \sigma'' = 0$; por lo tanto en este caso se cumple trivialmente la igualdad $\kappa = |\sigma' \times \sigma''|/|\sigma'|^3$. Si por el contrario fuera $\kappa \neq 0$ (en cuyo caso estaría definido el triedro $\{T, N, B\}$), entonces $\ddot{\sigma} = \kappa N$ y $\dot{\sigma} \times \ddot{\sigma} = T \times (\kappa N) = \kappa B$, y aplicando de nuevo (3.1) obtenemos

$$|\sigma' \times \sigma''| = |\sigma'|^3|\kappa B| = |\sigma'|^3\kappa \qquad \Rightarrow \qquad \kappa = \frac{|\sigma' \times \sigma''|}{|\sigma'|^3}\,,$$

que es lo que queríamos probar. ∎

Corolario 3.2 *Los puntos de la curva de curvatura no nula son aquellos en los que los vectores σ' y σ'' son linealmente independientes, esto es, donde $|\sigma' \times \sigma''| \neq 0$.*

Lema 3.3 *Supuesto que la curva es de clase C^3, en los puntos donde la curvatura no es nula se cumplen:*

$$\tau = \frac{\big[\sigma', \sigma'', \sigma'''\big]}{\big|\sigma' \times \sigma''\big|^2}\,, \qquad B = \frac{\sigma' \times \sigma''}{\big|\sigma' \times \sigma''\big|}\,.$$

Demostración. Utilizando el parámetro natural $s = s(t)$ introducido en la demostración del lema 3.1, se cumplen

$$\sigma' = s'\dot{\sigma}\,, \qquad \sigma'' = s''\dot{\sigma} + \big(s'\big)^2\ddot{\sigma}\,, \qquad \sigma' \times \sigma'' = \big(s'\big)^3\big(\dot{\sigma} \times \ddot{\sigma}\big)\,.$$

Donde la curvatura κ es no nula tenemos

$$N = \frac{\ddot{\sigma}}{\kappa} \qquad \Rightarrow \qquad B = T \times N = \dot{\sigma} \times \left(\frac{\ddot{\sigma}}{\kappa}\right) = \frac{1}{\kappa}\big(\dot{\sigma} \times \ddot{\sigma}\big) = \frac{1}{\kappa\big(s'\big)^3}\big(\sigma' \times \sigma''\big)\,,$$

y como $\kappa\big(s'\big)^3 = \kappa\big|\sigma'\big|^3 > 0$, el vector unitario B debe ser la normalización del vector $\sigma' \times \sigma''$, es decir,

$$B = \frac{\sigma' \times \sigma''}{\big|\sigma' \times \sigma''\big|}\,.$$

Por otra parte tenemos

$$\begin{aligned}\sigma''' &= \Big(s''\dot\sigma + \big(s'\big)^2\ddot\sigma\Big)' = s'''\dot\sigma + s''s'\ddot\sigma + 2s's''\ddot\sigma + \big(s'\big)^3\dddot\sigma\\ &= s'''\dot\sigma + 3s's''\ddot\sigma + \big(s'\big)^3\dddot\sigma\,,\\ \sigma''\times\sigma''' &= \Big(s''\dot\sigma + \big(s'\big)^2\ddot\sigma\Big)\times\Big(s'''\dot\sigma + 3s's''\ddot\sigma + \big(s'\big)^3\dddot\sigma\Big)\\ &= s''s'''\big(\dot\sigma\times\dot\sigma\big) + 3s'\big(s''\big)^2\big(\dot\sigma\times\ddot\sigma\big) + \big(s'\big)^3s''\big(\dot\sigma\times\dddot\sigma\big)\\ &\qquad + \big(s'\big)^2s'''\big(\ddot\sigma\times\dot\sigma\big) + 3\big(s'\big)^3s''\big(\ddot\sigma\times\ddot\sigma\big) + \big(s'\big)^5\big(\ddot\sigma\times\dddot\sigma\big)\\ &= (\text{algo})\big(\dot\sigma\times\ddot\sigma\big) + (\overline{\text{algo}})\big(\dot\sigma\times\dddot\sigma\big) + \big(s'\big)^5\big(\ddot\sigma\times\dddot\sigma\big)\,,\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}\big[\sigma',\sigma'',\sigma'''\big] &= \sigma'\cdot\big(\sigma''\times\sigma'''\big) = (s'\dot\sigma)\cdot\Big((\text{algo})\big(\dot\sigma\times\ddot\sigma\big) + (\overline{\text{algo}})\big(\dot\sigma\times\dddot\sigma\big) + \big(s'\big)^5\big(\ddot\sigma\times\dddot\sigma\big)\Big)\\ &= s'(\text{algo})\big[\dot\sigma,\dot\sigma,\ddot\sigma\big] + s'(\overline{\text{algo}})\big[\dot\sigma,\dot\sigma,\dddot\sigma\big] + \big(s'\big)^6\big[\dot\sigma,\ddot\sigma,\dddot\sigma\big]\\ &= \big(s'\big)^6\big[\dot\sigma,\ddot\sigma,\dddot\sigma\big]\,.\end{aligned}$$

Hemos obtenido la igualdad

$$\big[\dot\sigma,\ddot\sigma,\dddot\sigma\big] = \frac{\big[\sigma',\sigma'',\sigma'''\big]}{\big|\sigma'\big|^6}\,. \tag{3.2}$$

Ahora, de la igualdad $\ddot\sigma = \kappa N$ se sigue $\dddot\sigma = \dot\kappa N + \kappa\dot N$, y teniendo en cuenta la definición de torsión de la curva, $\tau = \dot N\cdot B$, obtenemos

$$\begin{aligned}\big[\dot\sigma,\ddot\sigma,\dddot\sigma\big] &= \big[T,\kappa N,\dot\kappa N + \kappa\dot N\big]\\ &= \big[T,\kappa N,\dot\kappa N\big] + \big[T,\kappa N,\kappa\dot N\big]\\ &= \kappa^2\big[T,N,\dot N\big] = \kappa^2\big[\dot N,T,N\big]\\ &= \kappa^2\big(\dot N\cdot(T\times N)\big) = \kappa^2\big(\dot N\cdot B\big) = \kappa^2\tau\,.\end{aligned}$$

Despejando y teniendo en cuenta la fórmula (3.2) llegamos a la igualdad

$$\tau = \frac{\big[\sigma',\sigma'',\sigma'''\big]}{\kappa^2\,|\sigma'|^6}\,,$$

de modo que basta tener en cuenta que según el lema 3.1 se cumple $\kappa^2\,|\sigma'|^6 = |\sigma'\times\sigma''|^2$ para obtener

$$\tau = \frac{\big[\sigma',\sigma'',\sigma'''\big]}{|\sigma'\times\sigma''|^2}\,,$$

que es lo que queríamos demostrar. ∎

Ejercicios 3.4 (a) Calcúlense, con las fórmulas probadas en esta sección, la curvatura, la torsión y el triedro de Frenet de la hélice circular del ejercicio 2.7.

(b) Hállense la curvatura, la torsión y el triedro de Frenet a lo largo de la curva $\sigma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$.

4. Plano osculador y circunferencia osculatriz

Fijemos en esta sección una curva regular $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$, $\sigma = \sigma(t)$, de clase C^2, y consideremos un punto $\sigma(t_0)$, $t_0 \in I$, tal que $\kappa(t_0) \neq 0$. En esas condiciones, podemos tomar $t_1, t_2 \in I$ "tan próximos como queramos" a t_0 cumpliendo que $\sigma(t_0), \sigma(t_1), \sigma(t_2)$ son tres puntos no alineados, y por lo tanto definen un plano (téngase en cuenta el ejercicio 2.4).

Definición 4.1 Llamaremos *plano osculador* a la curva en el punto $\sigma(t_0)$, al plano límite cuando $t_1, t_2 \to t_0$ del plano que pasa por los puntos $\sigma(t_0), \sigma(t_1), \sigma(t_2)$. Puede decirse que el plano osculador es aquel que pasa por tres puntos infinitesimalmente próximos de la curva.

4.2 Calculemos el plano osculador a la curva en $\sigma(t_0)$. Un vector normal unitario al plano determinado por $\sigma(t_0), \sigma(t_1), \sigma(t_2)$ es

$$D_{t_1,t_2} = \frac{\big(\sigma(t_1) - \sigma(t_0)\big) \times \big(\sigma(t_2) - \sigma(t_0)\big)}{\Big|\big(\sigma(t_1) - \sigma(t_0)\big) \times \big(\sigma(t_2) - \sigma(t_0)\big)\Big|} \,;$$

es claro que D_{t_1,t_2} depende diferenciablemente de (t_1, t_2). La ecuación del plano que pasa por los tres puntos $\sigma(t_0), \sigma(t_1), \sigma(t_2)$ es

$$D_{t_1,t_2} \cdot X = C_{t_1,t_2} \,,$$

donde C_{t_1,t_2} es un escalar que depende de (t_1, t_2) y $X = (x, y, z)$ denota un punto genérico de $\mathbb{R}^3$. El vector normal al plano osculador será el vector límite

$$D_{t_0,t_0} = \lim_{t_1,t_2 \to t_0} D_{t_1,t_2} \,.$$

Fijados t_1, t_2 consideremos la función $f(t) = D_{t_1,t_2} \cdot \sigma(t)$. Como $f(t_i) = C_{t_1,t_2}$ para $i = 0, 1, 2$, del teorema de Rolle se sigue que existen s_1 y s_2 tales que (supongamos por ejemplo que es $t_0 < t_1 < t_2$)

$$t_0 < s_1 < t_1 < s_2 < t_2 \,, \qquad f'(s_1) = f'(s_2) = 0 \,,$$

y aplicando de nuevo dicho teorema tenemos que existe s_3 tal que

$$s_1 < s_3 < s_2 \,, \qquad f''(s_3) = 0 \,.$$

Calculando las derivadas de $f(t)$ obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= f'(s_i) = D_{t_1,t_2} \cdot \sigma'(s_i) \,, \qquad i = 1, 2 \,, \\ 0 &= f''(s_3) = D_{t_1,t_2} \cdot \sigma''(s_3) \,. \end{aligned}$$

Tomando límite para $t_1, t_2 \to t_0$ (lo que implica $s_1, s_2, s_3 \to t_0$) resulta que

$$0 = D_{t_0,t_0} \cdot \sigma'(t_0) \,, \qquad 0 = D_{t_0,t_0} \cdot \sigma''(t_0) \,. \tag{4.1}$$

Nuestra hipótesis es que la curvatura de la curva es no nula en el punto $\sigma(t_0)$, de modo que aplicando el corolario 3.2 y el lema 3.3, de las igualdades (4.1) obtenemos

$$D_{t_0,t_0} \in \big\langle \sigma'(t_0), \sigma''(t_0) \big\rangle^{\perp} = \big\langle \sigma'(t_0) \times \sigma''(t_0) \big\rangle = \big\langle B_{t_0} \big\rangle;$$

por lo tanto debe ser $D_{t_0,t_0} = \pm B_{t_0}$. Hemos llegado a que la dirección del plano osculador a la curva en el punto $\sigma(t_0)$ es el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores T_{t_0} y N_{t_0}, es decir, el plano

$$\sigma(t_0) + \big\langle T_{t_0}, N_{t_0} \big\rangle \,,$$

cuya ecuación es

$$B_{t_0} \cdot X = B_{t_0} \cdot \sigma(t_0) \,.$$

Equivalentemente, el plano osculador a la curva en el punto $\sigma(t_0)$ de curvatura no nula es

$$\sigma(t_0) + \big\langle \sigma'(t_0), \sigma''(t_0) \big\rangle \,,$$

que tiene por ecuación

$$\big(\sigma'(t_0) \times \sigma''(t_0)\big) \cdot X = \big(\sigma'(t_0) \times \sigma''(t_0)\big) \cdot \sigma(t_0) \,.$$

Nota **4.3** En los puntos de la curva de curvatura nula no está definido el plano osculador (porque no está definido el triedro de Frenet). Piénsese en el caso de una recta.

Definiciones 4.4 En las condiciones anteriores (es decir, $\sigma(t_0)$ es un punto de la curva en el que la curvatura es no nula), tenemos

$$\begin{array}{rcl}
\textit{plano normal} \text{ a la curva en el punto } \sigma(t_0) & = & \sigma(t_0) + \big\langle N_{t_0}, B_{t_0} \big\rangle \,, \\
\textit{plano rectificante} \text{ de la curva en el punto } \sigma(t_0) & = & \sigma(t_0) + \big\langle T_{t_0}, B_{t_0} \big\rangle \,, \\
\textit{recta tangente} \text{ a la curva en el punto } \sigma(t_0) & = & \sigma(t_0) + \big\langle T_{t_0} \big\rangle \,, \\
\textit{recta normal principal} \text{ a la curva en el punto } \sigma(t_0) & = & \sigma(t_0) + \big\langle N_{t_0} \big\rangle \,, \\
\textit{recta binormal} \text{ de la curva en el punto } \sigma(t_0) & = & \sigma(t_0) + \big\langle B_{t_0} \big\rangle \,.
\end{array}$$

4.5 Si nuestra curva $\sigma = \sigma(t)$ es plana (todos sus puntos están sobre un mismo plano de $\mathbb{R}^3$) y tiene curvatura no nula en todos sus puntos, entonces, de la definición de plano osculador se sigue inmediatamente que el plano sobre el que yace la curva es el plano osculador en todos sus puntos. En particular, T y N son vectores de la dirección de dicho plano a lo largo de toda la curva.

4.6 En el ejercicio 2.5 se pide probar que una circunferencia de $\mathbb{R}^2$ cuyo radio es $R > 0$ tiene curvatura constante igual a $1/R$. Veamos que esto es cierto para toda circunferencia de $\mathbb{R}^3$.

Supongamos que $\sigma = \sigma(t)$, $t \in I$, es una parametrización de una circunferencia de $\mathbb{R}^3$; podemos suponer para simplificar que la parametrización es natural. Sean $R > 0$ el radio y $C \in \mathbb{R}^3$ el centro de la circunferencia, de modo que para todo $t \in I$ se cumple

$$\big(\sigma(t) - C\big) \cdot \big(\sigma(t) - C\big) = R^2.$$

Derivando tenemos

$$T_t \cdot \big(\sigma(t) - C\big) = 0 \,, \tag{4.2}$$

y derivando de nuevo

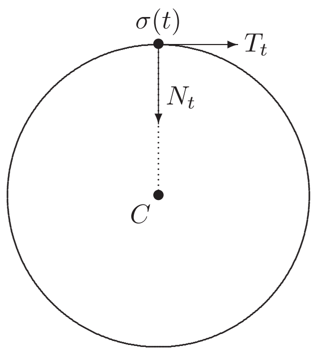
$$T_t' \cdot \big(\sigma(t) - C\big) + T_t \cdot T_t = 0 \,. \tag{4.3}$$

Como $T_t \cdot T_t = 1$, de la anterior igualdad se sigue que $T'_t \cdot \big(\sigma(t) - C\big) = -1 \neq 0$ y por lo tanto el vector T'_t es no nulo, es decir la curvatura $\kappa = |T'|$ es no nula en todos los puntos de la circunferencia.

Ahora, fijado $t \in I$, según lo dicho en el punto 4.5 tenemos que la circunferencia está contenida en el plano $\sigma(t) + \langle T_t, N_t \rangle$ y por lo tanto $\sigma(t) - C \in \langle T_t, N_t \rangle$; como los vectores T_t y N_t son ortogonales, de la igualdad (4.2) se sigue que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\sigma(t) - C = \lambda N_t$. Sustituyendo el vector $\sigma(t) - C$ en la igualdad (4.3) llegamos a $\kappa(t)\lambda(N_t \cdot N_t) + T_t \cdot T_t = 0$, es decir, $\kappa(t) = -1/\lambda$. Como la curvatura es positiva y el valor absoluto de λ es R, $|\lambda| = |\lambda N_t| = \big|\sigma(t) - C\big| = R$, debe ser $\lambda = -R$ y concluimos que

$$\kappa(t) = \frac{1}{R},$$

esto es, la circunferencia tiene curvatura constante igual a $1/R$.



La igualdad probada es lo que nos dice la intuición: cuanto más grande es el radio más pequeña es la curvatura. El que λ sea negativo significa que los vectores $\sigma(t) - C$ y N_t tienen sentidos opuestos, esto es, que el vector N_t en el punto $\sigma(t)$ de la circunferencia apunta hacia el centro C.

Definición 4.7 Volviendo a las condiciones de la definición 4.1, sean $t_1, t_2 \in I$ "tan próximos como queramos" a t_0 de manera que $\sigma(t_0), \sigma(t_1), \sigma(t_2)$ no están alineados y por tanto determinan una circunferencia. Dicha circunferencia es la intersección del plano que pasa por tales puntos con la esfera de ecuación

$$\big(X - C_{t_1,t_2}\big) \cdot \big(X - C_{t_1,t_2}\big) = R^2_{t_1,t_2},$$

siendo C_{t_1,t_2} y R_{t_1,t_2} el centro y el radio de la circunferencia.

El límite de estas circunferencias para $t_1, t_2 \to t_0$ se denomina *circunferencia osculatriz* de la curva en el punto $\sigma(t_0)$; es pues la circunferencia que para por tres puntos infinitesimalmente próximos de la curva. Nótese que, por definición, la circunferencia osculatriz está contenida en el plano osculador.

4.8 Calculemos la circunferencia osculatriz a la curva en $\sigma(t_0)$, cuyo centro y radio serán

$$C_{t_0,t_0} = \lim_{t_1,t_2 \to t_0} C_{t_1,t_2}, \qquad R_{t_0,t_0} = \lim_{t_1,t_2 \to t_0} R_{t_1,t_2},$$

respectivamente. Para hacer los cálculos supondremos que la curva está parametrizada por la longitud de arco (nótese además que en un entorno de t_0 está definido el triedro $\{T, N, B\}$ porque estamos suponiendo $\kappa(t_0) \neq 0$).

Fijados t_1, t_2 consideramos la función

$$f(t) = \big(\sigma(t) - C_{t_1,t_2}\big) \cdot \big(\sigma(t) - C_{t_1,t_2}\big).$$

Como $f(t_i) = R^2_{t_1,t_2}$ para $i = 0, 1, 2$, del teorema de Rolle se sigue que existen s_1 y s_2 tales que (supongamos por ejemplo que es $t_0 < t_1 < t_2$)

$$t_0 < s_1 < t_1 < s_2 < t_2\,, \qquad f'(s_1) = f'(s_2) = 0\,,$$

y aplicando de nuevo dicho teorema tenemos que existe s_3 tal que

$$s_1 < s_3 < s_2\,, \qquad f''(s_3) = 0\,.$$

Derivando tenemos $f'(t) = 2T_t \cdot \big(\sigma(t) - C_{t_1,t_2}\big)$ y $f''(t) = 2\kappa(t)N_t \cdot \big(\sigma(t) - C_{t_1,t_2}\big) + 2$, y valorando en s_1, s_3, s_2 obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= T_{s_i} \cdot \big(\sigma(s_i) - C_{t_1,t_2}\big)\,, \qquad i = 1, 2\,,\\ -1 &= \kappa(s_3)N_{s_3} \cdot \big(\sigma(s_3) - C_{t_1,t_2}\big)\,. \end{aligned}$$

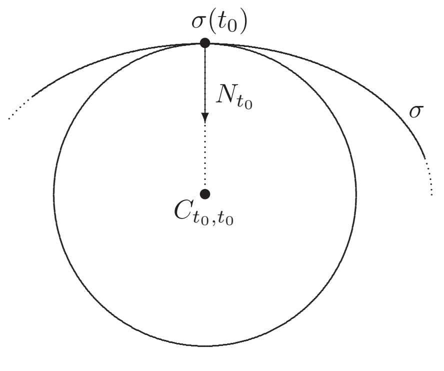
Tomando límite para $t_1, t_2 \to t_0$ (lo que implica $s_1, s_2, s_3 \to t_0$) resulta que

$$\begin{aligned} 0 &= T_{t_0} \cdot \big(\sigma(t_0) - C_{t_0,t_0}\big)\,,\\ -1 &= \kappa(t_0)N_{t_0} \cdot \big(\sigma(t_0) - C_{t_0,t_0}\big)\,. \end{aligned}$$

Como estamos en el plano osculador, la primera de las dos igualdades anteriores implica que los vectores $\sigma(t_0) - C_{t_0,t_0}$ y N_{t_0} son proporcionales: existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\sigma(t_0) - C_{t_0,t_0} = \lambda N_{t_0}$; sustituyendo en la otra igualdad obtenemos $\kappa(t_0) = -1/\lambda$, y por tanto

$$C_{t_0,t_0} = \sigma(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)} N_{t_0}\,.$$

Es decir, *el centro de la circunferencia osculatriz se halla en la semirrecta de extremo inicial el punto $\sigma(t_0)$ y de dirección y sentido dados por la normal principal N_{t_0}* (de otro modo, el vector N_{t_0} apunta hacia donde se curva σ en el punto $\sigma(t_0)$).



Además, el radio de la circunferencia osculatriz es

$$R_{t_0,t_0} = \big|\sigma(t_0) - C_{t_0,t_0}\big| = \frac{1}{\kappa(t_0)}\,,$$

es decir, como interpretación geométrica de la curvatura tenemos: *la curvatura $\kappa(t_0)$ es el inverso del radio de la circunferencia osculatriz en el punto $\sigma(t_0)$.*

Definiciones 4.9 Sea $\sigma(t_0)$ un punto de la curva en el que la curvatura es no nula. Se define el *radio de curvatura* de σ en el punto $\sigma(t_0)$ como el inverso de la curvatura en dicho punto (esto es, el radio de la circunferencia osculatriz en el punto). Se llama *centro de curvatura* de σ en el punto $\sigma(t_0)$ al centro de la circunferencia osculatriz en el punto.

Ejercicio 4.10 Obténgase una parametrización de la curva que describe el centro de la circunferencia osculatriz a lo largo de la rama hiperbólica $xy = 1$, $x > 0$, de $\mathbb{R}^2$. ¿En algún punto de la rama hiperbólica alcanza el radio de curvatura un máximo o un mínimo?

4.11 Por definición, la curvatura de $\sigma = \sigma(t)$ indica cómo varía la dirección de su recta tangente a lo largo de ella: si t es un parámetro natural para la curva, entonces $\kappa = |T'|$. Por tanto, el que la curvatura sea constantemente nula significa que dicha dirección no varía, en cuyo caso la curva es una recta (ejercicio 2.4).

En el siguiente lema veremos que el valor absoluto de la torsión (donde está definida) indica cómo varía sobre la curva la dirección del vector binormal (esto es, la dirección del plano osculador). Como corolario obtendremos que si la curvatura es no nula en todo punto, entonces la curva es plana si y sólo si la torsión es constantemente nula.

Hemos fijado al comienzo de esta sección una curva regular $\sigma = \sigma(t)$, $t \in I$, de clase C^2, pero para el resto de la sección necesitaremos que sea de clase C^3. De este modo, donde la curvatura sea no nula podemos derivar los vectores del triedro de Frenet y está definida la torsión.

Lema 4.12 *Supuesto que la curva está parametrizada por la longitud de arco, en los puntos de curvatura no nula se cumple*

$$B' = -\tau N\,,$$

y por lo tanto

$$|\tau| = |B'|\,.$$

Demostración. Derivando en la igualdad $B \cdot B = 1$ obtenemos que se cumple $B' \cdot B = 0$, por lo que debe ser $B' \in \langle B \rangle^{\perp} = \langle T, N \rangle$; es decir, existen funciones $f = f(t)$ y $g = g(t)$ tales que a lo largo de la curva se cumple

$$B' = fT + gN\,. \tag{4.4}$$

Por una parte, derivando en la igualdad $B \cdot T = 0$ tenemos $B' \cdot T + B \cdot T' = 0$ y por lo tanto

$$B' \cdot T = -B \cdot T' = -B \cdot (\kappa N) = -\kappa(B \cdot N) = 0\,;$$

de lo anterior obtenemos

$$0 = B' \cdot T = (fT + gN) \cdot T = f(T \cdot T) + g(N \cdot T) = f \cdot 1 + g \cdot 0 = f\,.$$

Por otra parte, derivando en la igualdad $B \cdot N = 0$ tenemos $B' \cdot N + B \cdot N' = 0$ y por lo tanto

$$B' \cdot N = -B \cdot N' = -\tau$$

de lo anterior obtenemos

$$-\tau = B' \cdot N = (fT + gN) \cdot N = f(T \cdot N) + g(N \cdot N) = g\,.$$

Sustituyendo el la ecuación (4.4) los valores calculados para f y g llegamos a la igualdad $B' = -\tau N$ del enunciado. ▮

Corolario 4.13 *Si la curvatura de σ es no nula en todos sus puntos, entonces la curva es plana si y sólo si su torsión es constantemente anula.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que la curva es plana: existen un vector unitario U en $\mathbb{R}^3$ y una constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que la curva yace sobre el plano de ecuación $U \cdot X = \lambda$, es decir, se cumple

$$U \cdot \sigma(t) = \lambda \qquad \text{para todo } t \in I\,.$$

Supondremos, para simplificar los cálculos, que t es un parámetro longitud de arco para la curva. Derivando dos veces en la anterior igualdad tenemos

$$\begin{aligned} &U \cdot T = 0\,, \\ &U \cdot \kappa N = 0 \qquad (\kappa \neq 0) \;\Rightarrow \qquad U \cdot N = 0\,. \end{aligned}$$

De las dos anteriores igualdades se sigue que debe ser $B = \pm U$, y por lo tanto B es constante. Del lema 4.12 concluimos entonces que $|\tau| = |B'| = 0$.

Recíprocamente, si $\tau = 0$ entonces $B' = -\tau N = 0$, luego B es un vector constante. Derivando la expresión $B \cdot \sigma$ resulta

$$(B \cdot \sigma)' = B' \cdot \sigma + B \cdot \sigma' = 0 \cdot \sigma + B \cdot T = 0\,;$$

es decir, existe una constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $B \cdot \sigma = \lambda$, y por tanto la curva está contenida en el plano de ecuación $B \cdot X = \lambda$. ∎

Ejemplos 4.14 (a) Una circunferencia es una curva plana con curvatura constante no nula, luego su torsión debe ser constantemente nula.

(b) Una hélice circular tiene curvatura constante no nula; su torsión también es constante, pero no nula porque no es una curva plana.

5. Problemas

5.1 Obténganse las ecuaciones de la intersección del plano $z = 0$ con el plano normal a la curva $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ $(t \in \mathbb{R})$ en el punto correspondiente a $t = \pi/2$.

5.2 Obténganse las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal a la curva $\sigma(t) = (1 + t, -t^2, 1 + t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, en el punto $\sigma(1) = (2, -1, 2)$. Hállese la intersección de dicha recta con el plano $z = 0$

5.3 Hállense la curvatura y la torsión (donde esté definida) de las curvas:

(a) $\sigma(t) = \big(t, t^2, t^3\big)$, $t \in \mathbb{R}$;

(b) $\sigma(t) = \Big(t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t}\Big)$, $t > 0$;

(c) $\sigma(t) = \big(a(t - \operatorname{sen} t), a(1 - \cos t), bt\big)$, $t \in \mathbb{R}$;

(d) $\sigma(t) = \big(a(3t - t^3), 3at^2, a(3t + t^3)\big)$, $t \in \mathbb{R}$;

(e) $\sigma(t) = \big(t, f(t), g(t)\big)$, donde f y g son dos funciones reales definidas en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$.

5.4 Estúdiese cuáles de las curvas del problema 5.3 son planas.

5.5 Pruébese que la binormal de una hélice circular forma ángulo constante con el eje del cilindro sobre el que yace.

5.6 Determínese la forma general de la función $f = f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, para que la curva $\sigma(t) = \big(a\cos t, a \operatorname{sen} t, f(t)\big)$ tenga todos sus rectas normales principales paralelas al plano $z = 0$ (a constante no nula).

5.7 Determínese la forma general de la función $f = f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, para que la curva $\sigma(t) = \big(a\cos t, a \operatorname{sen} t, f(t)\big)$ sea plana (a constante no nula).

5.8 Dada la curva $\sigma(t) = (at, bt^2, t^3)$ ($t \in \mathbb{R}$), ¿qué deben cumplir las constantes a y b para que sea regular?

Supuesto que la curva es regular, ¿qué relación deben cumplir a y b para que el vector tangente σ' forme a lo largo de la curva un ángulo constante con el vector $v = (1, 0, 1)$?

5.9 Indicatrices esféricas: Dada una curva $\sigma = \sigma(t)$ ($t \in I$), regular de clase C^2, los vectores tangentes unitarios a ella definen otra curva $\sigma_T(t) = T_t$ ($t \in I$) que se llama *indicatriz esférica tangente* (o simplemente *indicatriz esférica* si no hay motivo de confusión) de la curva de partida σ. Es claro que la curva σ_T se encuentra sobre la esfera de $\mathbb{R}^3$ centrada en el origen de radio 1; también es claro que σ_T es regular si y sólo si la curvatura de σ no se anula en ningún punto.

Cuando σ_T es regular de clase C^1, entonces está definido a lo largo de σ su triedro de Frenet y por lo tanto tenemos otras dos curvas que yacen sobre la mencionada esfera: la *indicatriz esférica normal* de σ, dada por la igualdad $\sigma_N(t) := N_t$ ($t \in I$), y la *indicatriz esférica binormal* de σ, definida como $\sigma_B(t) := B_t$ ($t \in I$).

Pruébese que las tres indicatrices esféricas de la hélice $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$ ($a > 0$ y $b \neq 0$) son circunferencias. ¿Cuales son los radios de dichas circunferencias?

5.10 Sea $\sigma = \sigma(t)$ ($t \in I$) una curva regular de clase C^2 con curvatura no nula en todo punto, en cuyo caso su indicatriz esférica σ_T es una curva regular de clase C^1.

(a) Pruébese que la curvatura de σ_T es

$$\kappa_T = \sqrt{\frac{\kappa^2 + \tau^2}{\kappa^2}}\,.$$

(b) ¿Cuándo es también una curva regular la indicatriz esférica binormal σ_B?

(c) Supuesto que σ_B es regular, pruébese que su curvatura es

$$\kappa_B = \sqrt{\frac{\kappa^2 + \tau^2}{\tau^2}}\,.$$

5.11 Ya se ha dicho en la teoría que si todas las rectas tangentes a una curva de $\mathbb{R}^3$ son paralelas entonces la curva es un segmento de recta. Pruébese que si todas las rectas tangentes a una curva de $\mathbb{R}^3$ pasan por un punto dado, entonces la curva es un segmento de recta.

5.12 Considérese una curva $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ regular de clase C^3.

(a) Pruébese que si la curva es plana entonces $\big[\sigma', \sigma'', \sigma'''\big] = 0$.

(b) Póngase un ejemplo que muestre que la implicación " $\big[\sigma', \sigma'', \sigma'''\big] = 0 \ \Rightarrow$ la curva es plana" es falsa.

(c) Pruébese que si la curvatura no se anula en ningún punto y $\big[\sigma', \sigma'', \sigma'''\big] = 0$, entonces la curva es plana.

5.13 Considérese una curva $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ regular de clase C^2.

(a) Pruébese que si la curva yace sobre un plano que pasa por el origen de $\mathbb{R}^3$ entonces $\big[\sigma, \sigma', \sigma''\big] = 0$.

(b) Póngase un ejemplo que muestre que es falsa la implicación " $\big[\sigma, \sigma', \sigma''\big] = 0 \ \Rightarrow$ la curva yace sobre un plano que pasa por el origen de $\mathbb{R}^3$".

(c) Pruébese que si $\sigma \times \sigma' \neq 0$ en todo punto y $\big[\sigma, \sigma', \sigma''\big] = 0$, entonces la curva yace sobre un plano que pasa por el origen de $\mathbb{R}^3$.

5.14 Calcúlese la expresión de la curvatura de una curva plana situada en el plano $z = 0$ en los siguientes casos:

(a) se conoce una parametrización de la curva $\sigma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ $(t \in I)$;

(b) la curva es la gráfica de una función en coordenadas cartesianas $y = f(x)$ $(x \in I)$;

(c) la curva es la gráfica de una función en coordenadas polares $r = g(\theta)$ $(\theta \in I)$.

5.15 Calcúlense el plano osculador, la normal principal y la recta binormal a la curva definida implícitamente por las ecuaciones

$$\mathcal{C} \equiv \left\{ \begin{array}{l} y^2 = x \\ x^2 = z \end{array} \right.$$

en el punto $p_0 = (1, 1, 1)$.

5.16 Dados los "cardioides" $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ cuyas ecuaciones implícitas en coordenadas polares son $(a > 0)$

$$\mathcal{C}_1 \equiv \ r - a(1 + \cos\theta) = 0\,, \qquad \mathcal{C}_2 \equiv \ r - a(1 - \cos\theta) = 0\,,$$

pruébese que se cortan perpendicularmente.

5.17 Por el efecto de su propio peso, toda cadena o cuerda sujetada por sus extremos adopta la forma de una cierta curva llamada *catenaria*. Estúdiese la ecuación de dicha curva.

5.18 Se denomina *espiral logarítmica* a toda curva plana que corta bajo ángulo constante a las semirrectas que parten del origen. Dada una espiral logarítmica $\sigma : I \to \mathbb{R}^2$, obténgase ...

(a) ... una parametrización de σ por la longitud de arco.

(b) ... la curvatura de σ.

5.19 Pruébese que si dos curvas tienen las mismas normales principales, entonces sus planos osculadores se cortan bajo ángulo constante, y lo mismo sucede para los planos normales.

5.20 Pruébese que la indicatriz esférica de la curva $\sigma(t) = \big(\operatorname{sen}^2 t, \cos^2 t, \operatorname{sen} t \cos t\big)$ $(t \in \mathbb{R})$ es una circunferencia.

5.21 Considérese la curva $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = \left(\frac{3}{4}t^2, t\,, \frac{1}{4}t^3 + at\right)$, donde a es un número real arbitrario.

(a) Pruébese que la curvatura de σ es positiva en todos los puntos.

(b) Si dado $t \in \mathbb{R}$, $\alpha(t)$ denota el ángulo que forma el vector $v = (0,0,1)$ con el vector binormal B_t a la curva en el punto $\sigma(t)$, demuéstrese que entonces la torsión de σ en dicho punto es $\tau(t) = -\cos^2\alpha(t)$.

5.22 Considérese la curva $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (3t, 3t^2, t^3)$.

(a) Calcúlese el plano osculador a la curva σ en el punto $\sigma(1) = (3,3,1)$. Denotemos por Π el plano obtenido.

(b) Para cada $t \in \mathbb{R}$, obténgase la intersección de Π con la recta tangente a σ en el punto $\sigma(t)$. Denotemos por $\phi(t)$ dicho punto intersección.

(c) Pruébese que la aplicación $\phi = \phi(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ es una curva regular.

(d) Calcúlese la curvatura de ϕ.

5.23 Pruébese que la curva $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (3\operatorname{sen} t, 3\cos t - 5, 4t + 1)$, tiene curvatura positiva en todos sus puntos. Además:

(a) Calcúlese la torsión y el triedro de Frenet a lo largo de la curva.

(b) Dado $t \in \mathbb{R}$, calcúlense el plano normal, el plano osculador y el plano rectificante de la curva en el punto $\sigma(t)$.

5.24 Sea $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular de clase C^1. Pruébese que si los vectores σ y σ' son ortogonales a lo largo de la curva, entonces ésta se encuentra sobre una esfera centrada en el origen de $\mathbb{R}^3$.