Capítulo III

Teoría de las curvas

1. Clasificación de curvas en $\mathbb{R}^3$

En esta sección veremos que, esencialmente, la curvatura y la torsión determinan las curvas de $\mathbb{R}^3$. Para ello necesitaremos las conocidas como "fórmulas de Frenet" (ó de Frenet-Serret), las cuales son fundamentales para el desarrollo de la teoría de las curvas (y por tanto deben aprenderse de memoria).

Teorema 1.1 (Fórmulas de Frenet) *Para una curva $\sigma = \sigma(t)$ de clase C^3 parametrizada por su longitud de arco, en los puntos de curvatura no nula se cumplen*

$$\left.\begin{array}{rcrcr} T' & = & & \kappa N & \\ N' & = & -\kappa T & + & \tau B \\ B' & = & & -\tau N & \end{array}\right\} .$$

Las anteriores fórmulas suelen expresarse matricialmente como

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} .$$

Demostración. La primera fórmula no es más que es la definición del vector unitario N, y la tercera se ha probado en el lema II.4.12. Para probar la segunda fórmula basta tener en cuenta que las coordenadas de N' en la base ortonormal $\{T, N, B\}$ son $\big(N' \cdot T\,,\ N' \cdot N\,,\ N' \cdot B\big)$:

$$\begin{aligned} &N' \cdot T = (N \cdot T)' - N \cdot T' = 0 - N \cdot (\kappa N) = -\kappa\,; \\ &N' \cdot N = \frac{1}{2}(N \cdot N)' = 0\,; \\ &N' \cdot B = \tau \quad \text{(por definición de torsión)}\,. \end{aligned}$$

Otra manera sencilla de obtener la segunda fórmula sería: se deriva primero en la igualdad $N = B \times T$, y se sustituye después la primera y tercera fórmulas. ∎

Teorema 1.2 *Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, para el que podemos suponer que $0 \in I$. Fijemos un punto P de $\mathbb{R}^3$ y una base ortonormal positiva $\{u_1, u_2, u_3\}$ en $\mathbb{R}^3$. Dadas funciones diferenciables $\kappa, \tau : I \to \mathbb{R}$ tales que $\kappa(t) > 0$ para todo $t \in I$, existe una única curva $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizada por su longitud de arco que cumple:*

(i) *κ es la función curvatura de σ y τ es la función torsión de σ;*

(ii) *$\sigma(0) = P$ y el triedro de Frenet de σ para $t = 0$ es $\{u_1, u_2, u_3\}$.*

Demostración. Escribamos $u_1 = (a_1, a_2, a_3)$, $u_2 = (b_1, b_2, b_3)$ y $u_3 = (c_1, c_2, c_3)$. Empecemos por determinar el triedro de Frenet de la futura curva σ. Serán tres funciones vectoriales

$$T = (f_1, f_2, f_3)\,, \quad N = (g_1, g_2, g_3) \quad \text{y} \quad B = (h_1, h_2, h_3)$$

con $f_i, g_i, h_i : I \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, que junto con las funciones dadas κ y τ deben cumplir las fórmulas de Frenet, es decir, deben ser solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left.\begin{aligned} f_i'(t) &= \kappa(t) g_i(t) \\ g_i'(t) &= -\kappa(t) f_i(t) + \tau(t) h_i(t) \\ h_i'(t) &= -\tau(t) g_i(t) \end{aligned}\right\} \qquad i = 1, 2, 3\,.$$

Imponiendo que el triedro de Frenet coincida para $t = 0$ con la base ortonormal dada $\{u_1, u_2, u_3\}$ obtenemos las siguientes condiciones iniciales para el anterior sistema:

$$f_i(0) = a_i\,, \quad g_i(0) = b_i\,, \quad h_i(0) = c_i\,, \qquad i = 1, 2, 3\,.$$

Aplicando el teorema de existencia y unicidad de soluciones para los sistemas de ecuaciones diferenciales, obtenemos que las funciones f_i, g_i, h_i están totalmente determinas por los datos dados en el enunciado del teorema.

Veamos ahora que el triedro obtenido $\{T, N, B\}$ es una base ortonormal para todo $t \in I$. Si consideramos la matriz A de las funciones coordenadas de estas funciones vectoriales,

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{pmatrix},$$

entonces la condición de que el triedro sea base ortonormal se expresa por la igualdad $A^t \cdot A = I_3$ (donde I_3 es la matriz cuadrada unidad de orden 3); esta igualdad es equivalente a que se cumpla $A \cdot A^t = I_3$, así que probemos esto último. Tenemos que ver que dados $i, j \in \{1, 2, 3\}$ se satisface

$$f_i f_j + g_i g_j + h_i h_j = \delta_{ij}\,,$$

donde $\delta_{ii} = 1$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Derivando tenemos

$$\begin{aligned} \big(f_i f_j + g_i g_j + h_i h_j\big)' &= f_i' f_j + f_i f_j' + g_i' g_j + g_i g_j' + h_i' h_j + h_i h_j' \\ &= \kappa g_i f_j + \kappa g_j f_i + (-\kappa f_i + \tau h_i) g_j \\ &\quad + (-\kappa f_j + \tau h_j) g_i + (-\tau g_i) h_j + (-\tau g_j) h_i \;=\; 0\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto $f_i f_j + g_i g_j + h_i h_j$ es constante, y como para $t = 0$ sabemos que vale δ_{ij}, entonces es igual a δ_{ij} para todo $t \in I$.

A continuación veamos que para todo $t \in I$ el triedro $\{T, N, B\}$ está orientado positivamente. Como I es conexo y el determinante

$$\begin{vmatrix} f_1(t) & g_1(t) & h_1(t) \\ f_2(t) & g_2(t) & h_2(t) \\ f_3(t) & g_3(t) & h_3(t) \end{vmatrix}$$

no se anula nunca, dicho determinante debe ser siempre positivo o siempre negativo; basta tener en cuenta que en $t = 0$ es positivo para obtener lo que queremos.

Sea ahora $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t), \sigma_3(t))$ la curva buscada parametrizada por la longitud de arco. Escribamos $P = (\alpha, \beta, \gamma)$. Si imponemos que $\sigma(0) = P$ y que el vector tangente unitario a la curva sea el T obtenido en la primera parte de la demostración, entonces $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ son solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1'(t) &= f_1(t) \\ \sigma_2'(t) &= f_2(t) \\ \sigma_3'(t) &= f_3(t) \end{aligned}\right\}$$

con las condiciones iniciales

$$\sigma_1(0) = \alpha\,, \qquad \sigma_2(0) = \beta\,, \qquad \sigma_3(0) = \gamma\,.$$

Aplicando de nuevo el teorema de existencia y unicidad de soluciones para los sistemas de ecuaciones diferenciales obtenemos la existencia y unicidad de la curva σ.

Por construcción es $\sigma' = T$, luego $\sigma = \sigma(t)$ está parametrizada por la longitud de arco. Por definición, la curvatura de σ es el módulo de la derivada del vector tangente:

$$\text{curvatura de } \sigma = \left|T'\right| = |\kappa N| = |\kappa||N| = |\kappa| = \kappa\,.$$

El vector normal principal es, por definición, la derivada del vector tangente dividido por su módulo:

$$\text{vector normal principal de } \sigma = \frac{T'}{\left|T'\right|} = \frac{T'}{\kappa} = N\,.$$

El vector binormal es el único vector que junto al tangente unitario y al normal principal forman una base ortonormal positiva, luego es B. Además tenemos

$$\begin{aligned} \text{torsión de } \sigma &= (\text{derivada del normal principal de } \sigma) \cdot (\text{binormal de } \sigma) \\ &= \left(N'\right) \cdot B = (-\kappa T + \tau B) \cdot B = \tau\,, \end{aligned}$$

con lo que termina la demostración. ∎

1.3 Sean $\sigma, \bar{\sigma} : I \to \mathbb{R}^3$ dos curvas parametrizadas por su longitud de arco (con $0 \in I$) que tienen curvatura no nula en todos los puntos. Aplicando un giro lineal a $\bar{\sigma}$ (lo que no altera la curvatura y la torsión de $\bar{\sigma}$) podemos hacer coincidir los triedros de Frenet de ambas curvas para $t = 0$ (los giros lineales de $\mathbb{R}^3$ son, por definición, los automorfismos lineales de $\mathbb{R}^3$ que transforman bases ortonormales positivas en bases ortonormales positivas; véase el problema 5.1); realizando después una traslación de $\bar{\sigma}$ (lo cual tampoco altera su curvatura y su torsión) podemos suponer que se cumple $\sigma(0) = \bar{\sigma}(0)$. Aplicando ahora el teorema 1.2 obtenemos: "las dos curvas son iguales (esto es, $\sigma(t) = \bar{\sigma}(t)$ para todo $t \in I$) si y sólo si tienen la misma función curvatura y la misma función torsión".

Las composiciones de traslaciones y giros lineales se denominan *movimientos directos* (los movimientos directos de $\mathbb{R}^3$ pueden caracterizarse como las biyecciones de $\mathbb{R}^3$ en sí mismo que conservan las distancias y la orientación). Lo dicho en el párrafo anterior significa entonces que el anterior teorema clasifica las curvas de $\mathbb{R}^3$ "módulo" los movimientos directos. Es decir, podemos reformular el teorema 1.2 del siguiente modo:

Teorema 1.4 (Clasificación de curvas en $\mathbb{R}^3$) *Dos curvas de $\mathbb{R}^3$, parametrizadas por su longitud de arco y con curvatura no nula en todo punto, poseen las mismas funciones curvatura y torsión, si y sólo si existe un movimiento directo que transforma una curva en la otra.*

Ejemplo 1.5 Una curva de $\mathbb{R}^3$ es una circunferencia si y sólo si su curvatura es constante positiva y su torsión es constante nula.

Ejercicio 1.6 Una curva de $\mathbb{R}^3$ es una hélice circular si y sólo si su curvatura es constante positiva y su torsión es constante no nula.

Para una curva cuya curvatura no se anula en ningún punto, en el corolario II.4.13 probamos que el que su torsión sea idénticamente nula significa que la curva es plana. Terminaremos esta sección interpretando geométricamente el signo de la torsión en los puntos en los que no se anula.

1.7 Supongamos que la curvatura de σ es no nula en todo punto, y sea $t_0 \in I$ tal que $\tau(t_0) \neq 0$. La ecuación del plano osculador a la curva en el punto $\sigma(t_0)$ tiene por ecuación $B_{t_0} \cdot X = \lambda$ para cierta constante $\lambda \in \mathbb{R}$; concretamente es $\lambda = B_{t_0} \cdot \sigma(t_0)$. Dicho plano divide el espacio $\mathbb{R}^3$ en tres regiones:

- donde $B_{t_0} \cdot X > \lambda$ (esta región es hacia la que apunta el vector B_{t_0} puesto en el punto $\sigma(t_0)$, es decir, donde está el punto $B_{t_0} + \sigma(t_0)$; en efecto, tenemos $B_{t_0} \cdot \big(B_{t_0} + \sigma(t_0)\big) = B_{t_0} \cdot B_{t_0} + B_{t_0} \cdot \sigma(t_0) = 1 + \lambda > \lambda$);
- donde $B_{t_0} \cdot X = \lambda$ (el plano osculador);
- donde $B_{t_0} \cdot X < \lambda$ (región hacia la que apunta el vector $-B_{t_0}$).

Hagamos las derivadas sucesivas de la función $f(t) = B_{t_0} \cdot \sigma(t)$ en el punto t_0:

$$
\begin{aligned}
f'(t_0) &= B_{t_0} \cdot T_{t_0} = 0\,, \\
f''(t_0) &= B_{t_0} \cdot \kappa(t_0) N_{t_0} = 0\,, \\
f'''(t_0) &= B_{t_0} \cdot \kappa'(t_0) N_{t_0} + B_{t_0} \cdot \kappa(t_0)\big[-\kappa(t_0) T_{t_0} + \tau(t_0) B_{t_0}\big] = \kappa(t_0)\tau(t_0)\,.
\end{aligned}
$$

La tercera derivada de f tiene en t_0 el mismo signo que $\tau(t_0)$ porque $\kappa(t_0) > 0$, y como $f'(t_0) = f''(t_0) = 0$ obtenemos: si $\tau(t_0) > 0$ entonces f es estrictamente creciente en t_0, y si $\tau(t_0) < 0$ entonces f es estrictamente decreciente en t_0.

Si suponemos que es $\tau(t_0) > 0$, entonces que f sea estrictamente creciente en t_0 significa que existe $\varepsilon > 0$ tal que cuando $0 < \alpha < \varepsilon$ se cumple $f(t_0 - \alpha) < f(t_0) < f(t_0 + \alpha)$, es decir,

$$0 < \alpha < \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad B_{t_0} \cdot \sigma(t_0 - \alpha) < \lambda < B_{t_0} \cdot \sigma(t_0 + \alpha)\,.$$

Lo anterior quiere decir que (cuando t crece) la curva atraviesa su plano osculador en el punto $\sigma(t_0)$ en el sentido del vector binormal B_{t_0}, esto es, pasando de la región $B_{t_0} \cdot X < \lambda$ a la región $B_{t_0} \cdot X > \lambda$.

Del mismo modo, cuando $\tau(t_0) < 0$ la curva atraviesa su plano osculador en $\sigma(t_0)$ en el sentido opuesto al del vector binormal B_{t_0}.

2. Curvas de pendiente constante

Definición 2.1 Se dice que una curva regular $\sigma = \sigma(t)$, $t \in I$, es una *curva de pendiente constante* (ó que es una *hélice general*, ó *hélice cilíndrica*, o simplemente *hélice*), si existen un vector no nulo $e \in \mathbb{R}^3$ y un ángulo $\alpha \in (0, \pi)$ tales que $\alpha = \measuredangle\big(e, \sigma'(t)\big)$ para todo $t \in I$; el vector e se llama *eje de la hélice*.[1] Claramente, todo vector no nulo $\bar{e}$ del subespacio $\langle e \rangle$ es también eje de la hélice: dado $\bar{e} = \lambda e$, si $\lambda > 0$ entonces $\measuredangle\big(\bar{e}, \sigma'(t)\big) = \measuredangle\big(e, \sigma'(t)\big)$ para todo $t \in I$, y si $\lambda < 0$ entonces $\measuredangle\big(\bar{e}, \sigma'(t)\big) = \pi - \measuredangle\big(e, \sigma'(t)\big)$ para todo $t \in I$.

Proposición 2.2 *Toda curva de pendiente constante admite, aplicándole si fuera preciso un movimiento directo, una parametrización de la forma*

$$\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t), t\,\cos\alpha)$$

para cierta constante $\alpha \in (0, \pi)$.

Demostración. Partamos de una parametrización natural $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ de la hélice. Aplicando un giro a la curva y a su eje podemos suponer que dicho eje es $e = (0, 0, 1)$, en cuyo caso existe $\alpha \in (0, \pi)$ tal que $\measuredangle\big(e, \sigma'(t)\big) = \alpha$ para todo $t \in I$. Si escribimos $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ tenemos

$$\cos\alpha = |\sigma'|\,|e|\,\cos\alpha = \sigma' \cdot e = \big(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'\big) \cdot (0, 0, 1) = \sigma_3'\,,$$

es decir, $\sigma_3' = \cos\alpha$, e integrando concluimos que debe ser $\sigma_3(t) = t\,\cos\alpha + c$ para cierta constante $c \in \mathbb{R}$.

Si $\alpha = \pi/2$, entonces $\sigma_3 = c$ y haciendo una traslación podemos suponer que es $c = 0$ (se trataría de una curva plana que yace en el plano $z = c$, y con una traslación nos la llevamos al plano $z = 0$). Así tendríamos

$$\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t), 0) = \big(\sigma_1(t), \sigma_2(t), t\,\cos\tfrac{\pi}{2}\big)\,.$$

[1] Los casos $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi$ los quitamos; es decir, una recta cuya dirección está determinada por el vector e no la consideramos hélice cilíndrica de eje e.

Si $\alpha \neq \pi/2$, entonces $\cos\alpha \neq 0$ y $s = t + \frac{c}{\cos\alpha}$ es otro parámetro natural para la hélice que cumple

$$\sigma_3(s) = \sigma_3(t(s)) = \left(s - \frac{c}{\cos\alpha}\right)\cos\alpha + c = s\,\cos\alpha\,,$$

lo que termina la demostración. ∎

2.3 Interpretemos geométricamente la anterior proposición. Si consideramos en el plano $z = 0$ la curva (σ_1, σ_2), entonces las rectas que pasan por los puntos de dicha curva con la dirección del vector $e = (0, 0, 1)$ forman un "cilindro" (por definición de cilindro); (σ_1, σ_2) es la curva base ó "directriz" del cilindro, y las rectas mencionadas son las "generatrices" del cilindro. La curva $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t), t\,\cos\alpha)$ yace sobre el cilindro y corta a todas las generatrices con el mismo ángulo α.

Teorema 2.4 (Lancret, 1802) *Sea $\sigma = \sigma(t)$ una curva (regular de clase C^3) con curvatura no nula en todo punto. La condición necesaria y suficiente para que σ sea una curva de pendiente constante es que la razón de la torsión a la curvatura sea constante.*

Demostración. Podemos suponer para simplificar los cálculos que la curva $\sigma : I \to \mathbb{R}$ está parametrizada por la longitud de arco.

Supongamos en primer lugar que la curva es una hélice: existen $\alpha \in (0, \pi)$ y un vector $e \in \mathbb{R}^3$ de módulo 1 tales que $\measuredangle\big(\sigma'(t), e\big) = \alpha$ para todo $t \in I$. En cada punto de la curva tenemos

$$e = aT + bN + cB$$

para ciertas funciones $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$. Concretamente será

$$a = e \cdot T\,, \qquad b = e \cdot N\,, \qquad c = e \cdot B\,.$$

Es claro que la función a es constante,

$$a = e \cdot T = |e|\,|T|\,\cos\alpha = \cos\alpha\,.$$

Además

$$0 = \big(e \cdot T\big)' = e \cdot T' = \kappa(e \cdot N)\,,$$

y por lo tanto $b = e \cdot N = 0$ (porque $\kappa \neq 0$). Así tenemos $e = \cos\alpha T + cB$, y como $\{T, B\}$ es una base ortonormal del subespacio $\langle T, B\rangle$ concluimos que debe ser

$$e = \cos\alpha\,T \,\pm\, \operatorname{sen}\alpha\,B\,.$$

Derivando en la anterior igualdad tenemos

$$0 = \kappa\,\cos\alpha\,N \mp \tau\,\operatorname{sen}\alpha\,N \qquad \Rightarrow \qquad 0 = \kappa\,\cos\alpha \mp \tau\,\operatorname{sen}\alpha$$

y por lo tanto

$$\frac{\tau}{\kappa} = \pm\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \pm\operatorname{cotg}\alpha = \text{constante}$$

(como dijimos en la demostración de la proposición 2.2, el caso $\alpha = \frac{\pi}{2}$ se corresponde con una curva plana: $\alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \operatorname{cotg}\alpha = 0 \Leftrightarrow \tau = 0$).

Recíprocamente, supongamos ahora que el cociente τ/κ es constante. Como la aplicación $\operatorname{cotg} : (0,\pi) \to \mathbb{R}$ es una biyección, existe $\alpha \in (0,\pi)$ tal que $\tau/\kappa = \operatorname{cotg}\alpha = \cos\alpha/\operatorname{sen}\alpha$, en cuyo caso $\kappa\,\cos\alpha\, -\, \tau\,\operatorname{sen}\alpha = 0$, es decir,

$$0 = \kappa\,\cos\alpha\,N\, -\, \tau\,\operatorname{sen}\alpha\,N = \big(\cos\alpha\,T\, +\, \operatorname{sen}\alpha\,B\big)'.$$

Entonces el vector $e = \cos\alpha\,T\, +\, \operatorname{sen}\alpha\,B$ es constante, tiene módulo 1 y cumple $e\cdot T = \cos\alpha$, por lo que debe ser $\measuredangle(T,e) = \alpha$. ∎

Ejercicio 2.5 Una hélice circular es un caso particular de hélice cilíndrica. Dada la hélice circular $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, bt)$, donde $a > 0$ y $b \neq 0$, ¿cuál es el eje e de σ? Calcúlese el ángulo $\alpha \in (0,\pi)$ tal que $\angle\big(e,\sigma'(t)\big) = \alpha$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

3. Curvas esféricas

Fijemos en esta sección una curva regular $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ de clase C^3.

Consideremos un punto $\sigma(t_0)$, $t_0 \in I$, tal que $\kappa(t_0) > 0$ y $\tau(t_0) \neq 0$. En esas condiciones podemos tomar $t_1,t_2,t_3 \in I$ "tan próximos como queramos" a t_0 de manera que los puntos $\sigma(t_0),\sigma(t_1),\sigma(t_2),\sigma(t_3)$ no son coplanarios y por lo tanto determinan una esfera (téngase en cuenta el corolario II.4.13).[2]

Definición 3.1 Llamaremos *esfera osculatriz* a la curva en el punto $\sigma(t_0)$, a la esfera límite cuando $t_1,t_2,t_3 \to t_0$ de la esfera que pasa por los puntos $\sigma(t_0)$, $\sigma(t_1)$, $\sigma(t_2)$, $\sigma(t_3)$. Es decir, la esfera osculatriz es la esfera que pasa por cuatro puntos infinitesimalmente próximos de la curva.

3.2 Calculemos la esfera osculatriz a la curva en $\sigma(t_0)$, para lo cual supondremos que tenemos la curva parametrizada por su longitud de arco.

Sean C_{t_1,t_2,t_3} y R_{t_1,t_2,t_3} el centro y el radio, respectivamente, de la esfera que pasa por los puntos $\sigma(t_0)$, $\sigma(t_1)$, $\sigma(t_2)$ y $\sigma(t_3)$; denotemos por $C(t_0)$ el centro de la esfera osculatriz a la curva en $\sigma(t_0)$ y por $R(t_0)$ su radio. Por definición será

$$C(t_0) = \lim_{t_1,t_2,t_3\to t_0} C_{t_1,t_2,t_3}\,, \qquad\qquad R(t_0) = \lim_{t_1,t_2,t_3\to t_0} R_{t_1,t_2,t_3}\,.$$

Fijados t_1,t_2,t_3 consideremos la función

$$f(t) = \big(\sigma(t) - C_{t_1,t_2,t_3}\big)\cdot\big(\sigma(t) - C_{t_1,t_2,t_3}\big).$$

Como $f(t_i) = R^2_{t_1,t_2,t_3}$ para $i = 0,1,2,3$, del teorema de Rolle se sigue que existen valores $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3$ que están "entre" t_0,t_1,t_2,t_3 tales que

$$f'(\varepsilon_1) = f'(\varepsilon_2) = f'(\varepsilon_3) = 0\,.$$

[2] Dados cuatro puntos no coplanarios $P_1,P_2,P_3,P_4 \in \mathbb{R}^3$, para cada par de índices $i,j \in \{1,2,3,4\}$ distintos, el conjunto $\Pi_{ij} = \big\{e \in \mathbb{R}^3 : |P_i - e| = |P_j - e|\big\}$ es un plano perpendicular al segmento P_iP_j que pasa por el punto medio del segmento; la condición de no ser coplanarios implica que $C = \Pi_{12}\cap\Pi_{23}\cap\Pi_{34}$ es un punto que equidista de P_1, P_2, P_3 y P_4; ese punto es el centro de la única esfera que pasa por los puntos dados.

Del mismo modo, existen μ_1 y μ_2 tales que

$$\varepsilon_1 < \mu_1 < \varepsilon_2 < \mu_2 < \varepsilon_3 \,, \qquad\qquad f''(\mu_1) = f''(\mu_2) = 0 \,,$$

y existe α tal que

$$\mu_1 < \alpha < \mu_2 \,, \qquad\qquad f'''(\alpha) = 0 \,.$$

Derivando tenemos

$$\begin{aligned} f' &= 2T \cdot \big(\sigma - C_{t_1,t_2,t_3}\big) \,, \\ f'' &= 2\kappa N \cdot \big(\sigma - C_{t_1,t_2,t_3}\big) + 2 \,, \\ f''' &= 2\Big\{\kappa' N \cdot \big(\sigma - C_{t_1,t_2,t_3}\big) - \kappa^2 T \cdot \big(\sigma - C_{t_1,t_2,t_3}\big) + \kappa\tau B \cdot \big(\sigma - C_{t_1,t_2,t_3}\big)\Big\} \,, \end{aligned}$$

y tomando valores obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= T_{\varepsilon_i} \cdot \big(\sigma(\varepsilon_i) - C_{t_1,t_2,t_3}\big) \,, \qquad\qquad i = 1,2,3 \,, \\ -1 &= \kappa(\mu_j) N_{\mu_j} \cdot \big(\sigma(\mu_j) - C_{t_1,t_2,t_3}\big) \,, \qquad\qquad j = 1,2 \,, \\ 0 &= \kappa'(\alpha) N_\alpha \cdot \big(\sigma(\alpha) - C_{t_1,t_2,t_3}\big) - \kappa^2(\alpha) T_\alpha \cdot \big(\sigma(\alpha) - C_{t_1,t_2,t_3}\big) \\ &\qquad + \kappa(\alpha)\tau(\alpha) B_\alpha \cdot \big(\sigma(\alpha) - C_{t_1,t_2,t_3}\big) \,. \end{aligned}$$

Tomando límite para $t_1,t_2,t_3 \to t_0$ (lo que implica $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\mu_1,\mu_2,\alpha \to t_0$) resulta que

$$\begin{aligned} 0 &= T_{t_0} \cdot \big(\sigma(t_0) - C(t_0)\big) \,, \\ -1 &= \kappa(t_0) N_{t_0} \cdot \big(\sigma(t_0) - C(t_0)\big) \,, \\ 0 &= \kappa'(t_0) N_{t_0} \cdot \big(\sigma(t_0) - C(t_0)\big) + \kappa(t_0)\tau(t_0) B_{t_0} \cdot \big(\sigma(t_0) - C(t_0)\big) \,. \end{aligned}$$

Ahora tenemos $C(t_0) - \sigma(t_0) = \lambda T_{t_0} + \gamma N_{t_0} + \delta B_{t_0}$ donde

$$\begin{aligned} \lambda &= T_{t_0} \cdot \big(C(t_0) - \sigma(t_0)\big) = 0 \,, \\ \gamma &= N_{t_0} \cdot \big(C(t_0) - \sigma(t_0)\big) = \frac{1}{\kappa(t_0)} \,, \\ \delta &= B_{t_0} \cdot \big(C(t_0) - \sigma(t_0)\big) = \frac{-\kappa'(t_0)}{\kappa(t_0)\tau(t_0)} N_{t_0} \cdot \big(C(t_0) - \sigma(t_0)\big) = \frac{-\kappa'(t_0)}{\kappa^2(t_0)\tau(t_0)} \,. \end{aligned}$$

Por lo tanto el centro de la esfera osculatriz es

$$C(t_0) = \sigma(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)} N_{t_0} + \frac{-\kappa'(t_0)}{\kappa^2(t_0)\tau(t_0)} B_{t_0} \,,$$

y el radio es

$$R(t_0) = \big|C(t_0) - \sigma(t_0)\big| = \sqrt{\frac{1}{\kappa^2(t_0)} + \left(\frac{-\kappa'(t_0)}{\kappa^2(t_0)\tau(t_0)}\right)^2} \,.$$

Haciendo abstracción del punto y teniendo en cuenta que la derivada de $1/\kappa$ es $-\kappa'/\kappa^2$, obtenemos las fórmulas

$$C = \sigma + \frac{1}{\kappa} N + \left(\frac{1}{\kappa}\right)' \frac{1}{\tau} B \,, \qquad\qquad R = \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} + \left[\left(\frac{1}{\kappa}\right)' \frac{1}{\tau}\right]^2} \,.$$

Lema 3.3 *Supongamos que la curva $\sigma = \sigma(t)$ es esférica y sea $R > 0$ el radio de la esfera sobre la que yace.*

(i) *La curvatura de σ es positiva en todos sus puntos: $\kappa(t) \geq \frac{1}{R} > 0$ para todo $t \in I$.*

(ii) *Si la curvatura de σ es constante, entonces σ es una circunferencia (de radio $\leq R$).*

Demostración. Supongamos que la curva está parametrizada por la longitud de arco y sea $C \in \mathbb{R}^3$ el centro de la esfera que contiene a la curva. Tenemos

$$(\sigma - C) \cdot (\sigma - C) = R^2 \,,$$

y derivando dos veces obtenemos

$$T \cdot (\sigma - C) = 0 \qquad \text{y} \qquad T' \cdot (\sigma - C) = -1 \,.$$

En particular

$$1 = \left|T' \cdot (\sigma - C)\right| \leq \left|T'\right| \left|\sigma - C\right| = \kappa R \,,$$

es decir, $\kappa \geq \frac{1}{R} > 0$. Esto prueba (i).

Ahora, como $T \cdot (\sigma - C) = 0$, existen funciones $f = f(t)$ y $g = g(t)$ tales que $\sigma - C = fN + gB$. Derivando tenemos

$$T = f'N + f(-\kappa T + \tau B) + g'B + g(-\tau N)$$

y por lo tanto

$$\left.\begin{aligned} 1 + \kappa f &= 0 \\ f' - \tau g &= 0 \\ f\tau + g' &= 0 \end{aligned}\right\} . \tag{3.1}$$

En particular será $f = -1/\kappa < 0$.

Probemos ya (ii). Si la curvatura κ es constante, entonces $f' = 0$ y por lo tanto $\tau g = 0$. Si existiera $t_0 \in I$ tal que $\tau(t_0) \neq 0$, entonces $\tau(t) \neq 0$ para todo t en algún intervalo abierto $J \subset I$ con $t_0 \in J$. En dicho intervalo J será $g = 0$ y por tanto $g'(t_0) = 0$. De la tercera ecuación del sistema (3.1) obtenemos $\tau(t_0) f(t_0) = 0$, lo cual es absurdo.

Entonces debe ser $\tau(t) = 0$ para todo $t \in I$, y el teorema de clasificación de curvas nos asegura que σ es una circunferencia (véase el ejemplo 1.5). ∎

Ejercicio 3.4 Supongamos ahora que la curva $\sigma = \sigma(t)$ tiene curvatura y torsión no nulas en todos los puntos, de modo que está definida la esfera osculatriz a la curva en todos sus puntos. Supongamos además que la curva está parametrizada por su longitud de arco, en cuyo caso el centro $C(t)$ y el radio $R(t)$ de la circunferencia osculatriz a la curva en el punto $\sigma(t)$ cumplen las igualdades

$$C = \sigma + \frac{1}{\kappa} N + \left(\frac{1}{\kappa}\right)' \frac{1}{\tau} B \,, \qquad R^2 = \frac{1}{\kappa^2} + \left[\left(\frac{1}{\kappa}\right)' \frac{1}{\tau}\right]^2 .$$

(a) Pruébese que el centro C de las esferas osculatrices de la curva σ es constante si y sólo si se cumple

$$\frac{\tau}{\kappa} + \left[\left(\frac{1}{\kappa}\right)' \frac{1}{\tau}\right]' = 0 \,.$$

(b) Pruébese que si el centro C es constante, entonces el radio R también es constante.

(c) Póngase un ejemplo que muestre que el recíproco del apartado anterior es falso (esto es, que el radio sea constante no implica que el centro sea constante).

(d) Supóngase ahora que $\kappa'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Pruébese que si el radio R es constante, entonces el centro C también es constante.

Lema 3.5 *Supongamos que la curva $\sigma = \sigma(t)$ está parametrizada por su longitud de arco, y que tiene curvatura y torsión no nulas en todos sus puntos. Entonces σ es esférica si y sólo si se cumple*

$$\frac{\tau}{\kappa} + \left[\left(\frac{1}{\kappa}\right)' \frac{1}{\tau}\right]' = 0 \,.$$

Demostración. Se sigue de los apartados (a) y (b) del ejercicio 3.4 anterior, pues que la curva sea esférica significa que la esfera osculatriz es constante a lo largo de la curva. ∎

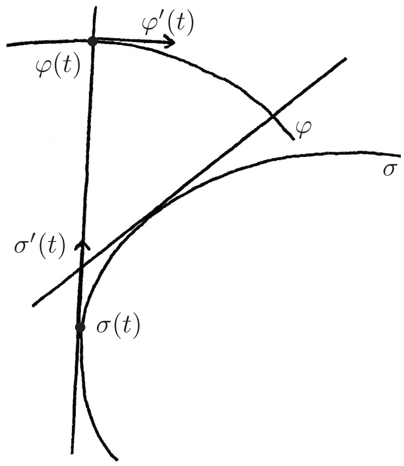
4. Evolventes y evolutas

Definición 4.1 Dada una curva regular $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ de clase C^2, la familia de rectas tangentes a ella forman una superficie que se denomina “desarrollable tangencial” de σ. Se denomina *evolvente* (ó *involuta*) de σ a toda curva que esté sobre dicha superficie y corte perpendicularmente a las rectas tangentes de σ.

4.2 Supongamos que la parametrización $\sigma = \sigma(t)$ de la curva es natural y calculemos sus evolventes.

Sea $\varphi : I \to \mathbb{R}^3$ una evolvente de σ de modo que para cada $t \in I$, $\varphi(t)$ está sobre la recta tangente a σ en el punto $\sigma(t)$. Existirá una función diferenciable $\lambda : I \to \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(t) = \sigma(t) + \lambda(t) T_t \,.$$



Los vectores φ' y T son ortogonales para que φ sea una evolvente de σ:

$$0 = \varphi' \cdot T = \big(T + \lambda' T + \lambda T'\big) \cdot T = 1 + \lambda'$$

(pues siempre se cumple $T' \cdot T = 0$); integrando obtenemos $\lambda = -t + a$ para cierta constante $a \in \mathbb{R}$.

Así pues, existe una familia infinita de evolventes de σ, una para cada valor de a:

$$\varphi_a(t) = \sigma(t) + (a - t) T_t \,, \qquad t \in I \,.$$

Nótese que la curva φ_a puede no ser regular:

$$\varphi_a' = T - T + (a - t) T' = (a - t) T' \,,$$

y por lo tanto $\varphi_a'(a) = 0$ (cuando $a \in I$), y $\varphi_a'(t) = 0$ si $t \in I$ tal que $\kappa(t) = 0$. Por este motivo supondremos que la curvatura de σ es positiva cuando estudiemos sus evolventes.

Ejemplo 4.3 Obtengamos las evolventes de la hélice $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$.

Como $\sigma' = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$ tenemos $|\sigma'| = \sqrt{2}$, por lo que con un sencillo cálculo llegamos a que si cambiamos el parámetro t por el parámetro $t/\sqrt{2}$, entonces obtenemos una nueva parametrización de la hélice,

$$\sigma(t) = \left(\cos \tfrac{t}{\sqrt{2}}\,, \operatorname{sen} \tfrac{t}{\sqrt{2}}\,, \tfrac{t}{\sqrt{2}}\right),$$

que es natural. Ahora, para esta nueva parametrización es $T = \sigma' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\operatorname{sen} \frac{t}{\sqrt{2}}\,, \cos \frac{t}{\sqrt{2}}\,, 1\right)$, y por lo tanto para cada $a \in \mathbb{R}$ tenemos la siguiente evolvente de σ:

$$\begin{aligned} \varphi_a(t) &= \left(\cos \tfrac{t}{\sqrt{2}}\,, \operatorname{sen} \tfrac{t}{\sqrt{2}}\,, \tfrac{t}{\sqrt{2}}\right) + \tfrac{a-t}{\sqrt{2}}\left(-\operatorname{sen} \tfrac{t}{\sqrt{2}}\,, \cos \tfrac{t}{\sqrt{2}}\,, 1\right) \\ &= \left(\cos \tfrac{t}{\sqrt{2}} - \tfrac{a-t}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \tfrac{t}{\sqrt{2}}\,, \operatorname{sen} \tfrac{t}{\sqrt{2}} + \tfrac{a-t}{\sqrt{2}} \cos \tfrac{t}{\sqrt{2}}\,, \tfrac{a}{\sqrt{2}}\right) \qquad (t \neq a). \end{aligned}$$

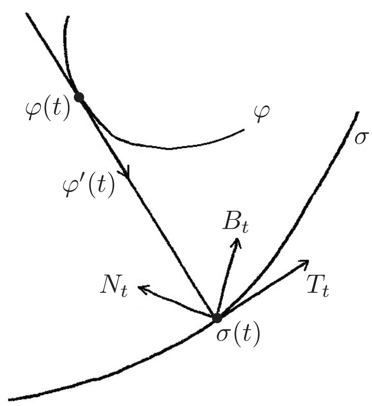
Nótese que todas las evolventes de la hélice circular son curvas planas.

Definición 4.4 Sea $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. Diremos que otra curva $\varphi : I \to \mathbb{R}^3$ es una *evoluta* de σ, cuando σ sea una evolvente de φ, es decir, si para cada $t \in I$, la recta tangente a φ en el punto $\varphi(t)$ corta perpendicularmente a σ en el correspondiente punto $\sigma(t)$.

4.5 Supongamos que la curva $\sigma = \sigma(t)$ está parametrizada por la longitud de arco y calculemos sus evolutas. Supongamos también que σ es de clase C^3 y que su curvatura no se anula en ningún punto; de ese modo están definidos su triedro de Frenet y su torsión.

Sea $\varphi : I \to \mathbb{R}^3$ una evoluta de σ. Por definición, dado $t \in I$ la recta tangente a φ en $\varphi(t)$ corta perpendicularmente a σ en $\sigma(t)$, es decir, $\varphi(t) - \sigma(t)$ es un vector proporcional a $\varphi'(t)$ que está en el subespacio $\langle N_t, B_t\rangle$: existen funciones diferenciables $f, g : I \to \mathbb{R}$ tales que

$$\varphi = \sigma + fN + gB\,.$$



Derivando tenemos

$$\begin{aligned} \varphi' &= \sigma' + f'N + f(-\kappa T + \tau B) + g'B - g\tau N \\ &= (1 - f\kappa)T + (f' - g\tau)N + (g' + f\tau)B\,, \end{aligned}$$

y como $\langle \varphi' \rangle = \langle \varphi - \sigma \rangle$, debe ser igual a 1 el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & f & g \\ 1 - f\kappa & f' - g\tau & g' + f\tau \end{pmatrix};$$

por lo tanto deben cumplirse:

$$1 - f\kappa = 0\,, \qquad \begin{vmatrix} f' - g\tau & f \\ g' + f\tau & g \end{vmatrix} = 0\,. \tag{4.1}$$

En particular será $f = 1/\kappa > 0$. Calculemos g:

$$g\big(f' - g\tau\big) - f\big(g' + f\tau\big) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \tau = \frac{gf' - fg'}{f^2 + g^2} = \left(\operatorname{arc\,cotg}\left(\frac{g}{f}\right)\right)'$$

y por lo tanto $g/f = \operatorname{cotg}\big(\int \tau \mathrm{d}t + b\big)$, donde $\int \tau \mathrm{d}t$ es una primitiva de la función torsión de σ y $b \in \mathbb{R}$ es una constante. Así pues, existe una familia infinita de evolutas de σ:

$$\varphi = \sigma + \frac{1}{\kappa} N + \frac{1}{\kappa} \operatorname{cotg}\left(\int \tau \mathrm{d}t + b\right) B\,, \qquad b \in \mathbb{R}\,.$$

Como $\varphi' = (f' - g\tau)N + (g' + f\tau)B$, la evoluta φ de σ no es regular en los puntos en los que se cumpla

$$\big(f' - g\tau\big)^2 + \big(g' + f\tau\big)^2 = 0\,. \tag{4.2}$$

4.6 Veamos cómo son las evolutas cuando σ es una curva plana (seguimos suponiendo que σ es de clase C^3 y que su curvatura no se anula nunca). Como $\tau = 0$, según las igualdades (4.1) tenemos $f'g = fg'$, es decir,

$$\frac{f'}{f} = \frac{g'}{g} \qquad \Rightarrow \qquad \ln g = \ln f + \text{cte.} \qquad \Rightarrow \qquad g = \mu f = \frac{\mu}{\kappa}$$

para cierta constante positiva $\mu = \mathrm{e}^{\text{cte.}}$. En este caso la ecuación (4.2) que determina los puntos no regulares de la evoluta es

$$0 = \big(f' - g\tau\big)^2 + \big(g' + f\tau\big)^2 = \big(f'\big)^2 + \big(g'\big)^2 = \big(1 + \mu^2\big)\big(f'\big)^2 = \big(1 + \mu^2\big)\left(\frac{\kappa'}{\kappa^2}\right)^2,$$

y por lo tanto los puntos singulares de una evoluta $\varphi = \varphi(t)$ de σ son los que se corresponden con valores $t \in I$ tales que $\kappa'(t) = 0$. Por otra parte, las primitivas de $\tau = 0$ son las funciones constantes y por lo tanto $\operatorname{cotg}\big(\int \tau \mathrm{d}t + b\big)$ es constante para todo $b \in \mathbb{R}$.

Resumiendo: Si σ es una curva plana tal que la función κ' no tiene ceros, entonces las evolutas de σ son la siguiente familia de curvas regulares:

$$\varphi_c = \sigma + \frac{1}{\kappa} N + \frac{c}{\kappa} B\,, \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

En el problema 5.13 se obtienen más propiedades de esta familia de curvas.

5. Problemas

5.1 Sea $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ una curva y sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un giro lineal (isomorfismo lineal que trasforma bases ortonormales positivas en bases ortonormales positivas). Considérese la curva $\bar\sigma$ que se obtiene al aplicar a σ el giro φ, esto es, $\bar\sigma : I \to \mathbb{R}^3$, $\bar\sigma(t) = \varphi(\sigma(t))$. Pruébense:

(a) Las curvas σ y $\bar\sigma$ son de la misma clase, y una de ellas es regular si y sólo si lo es la otra.

(b) La parametrización $\sigma = \sigma(t)$ es natural si y sólo si la parametrización $\bar\sigma = \bar\sigma(t)$ es natural.

Supongamos en los apartados que siguen que las curvas son regulares (de la clase que sea necesaria) y que $t \in I$ es un parámetro longitud de arco para ellas.

(c) Pruébese que las curvas tienen la misma curvatura.

(d) Pruébese que en los puntos de curvatura no nula, las dos curvas tienen la misma torsión.

5.2 Una circunferencia tiene curvatura no nula en todos sus puntos y todas sus rectas normales principales pasan por su centro.

Recíprocamente, si una curva de $\mathbb{R}^3$ tiene curvatura no nula en todo punto y todas sus rectas normales principales pasan por un punto dado, pruébese que entonces la curva es un arco de circunferencia con centro en el punto dado.

5.3 En teoría se ha probado que si todos los planos osculadores de una curva de $\mathbb{R}^3$ son paralelos entre sí, entonces la curva es plana. Pruébense:

(a) Si todos los planos osculadores de una curva de $\mathbb{R}^3$ pasan por un punto dado, entonces la curva es plana.

(b) Si las direcciones de todos los planos normales a una curva de $\mathbb{R}^3$ contienen a un mismo vector no nulo, entonces la curva es plana.

5.4 Sea $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una hélice circular, y para cada $t \in \mathbb{R}$ sea $c(t) \in \mathbb{R}^3$ el centro de curvatura de la hélice en el punto $\sigma(t)$ (esto es, el centro de la circunferencia osculatriz a la hélice en $\sigma(t)$). [3]

(a) Pruébese que $c = c(t)$, $t \in \mathbb{R}$, es otra hélice circular con el mismo eje que la hélice de partida. ¿Cuál es el paso de esta nueva hélice?

(b) Demuéstrese que el lugar geométrico de los centros de curvatura de la nueva hélice c es la hélice original σ.

5.5 Pruébese que la curva $\sigma(t) = (2t, t^2, t^3/3)$, $t \in \mathbb{R}$, es una hélice general. Calcúlese su eje e, y calcúlese también el ángulo constante que e forma con las tangentes a la hélice. ¿Es σ una hélice circular?

5.6 Sea $\sigma = \sigma(t)$, $t \in I$, una curva con curvatura no nula en todo punto. Pruébese que σ es una hélice general si y sólo si su indicatriz esférica tangente es una circunferencia.

5.7 Una curva esférica tiene curvatura no nula en todos sus puntos y todos sus planos normales pasan por el centro de la esfera sobre la que yace.

Recíprocamente, si una curva de $\mathbb{R}^3$ tiene curvatura no nula en todo punto y todas sus planos normales pasan por un punto dado, pruébese que entonces la curva es esférica, y yace sobre uns esfera centrada en el punto dado.

5.8 Sea $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ una curva esférica parametrizada por la longitud de arco, y sea R el radio de la esfera que contiene a la curva. Con la notación utilizada en la demostración del lema 3.3, nótese que debe cumplirse $f^2 + g^2 = R^2$. Pruébense:

[3] Para la hélice circular tenemos dos nociones de "eje": (i) la dada para cualquier curva de pendiente constante (se trata de una "dirección"; véase la definición 2.1); (ii) la "recta" que pasa por el centro de la circunferencia directriz del cilindro circular sobre el que yace dicha hélice, cuya dirección es el eje como curva de pendiente constante.

(a) Las dos últimas ecuaciones del sistema (3.1) son equivalentes. Por lo tanto podemos quitar la tercera ecuación y obtenemos un sistema con dos ecuaciones que es equivalente al sistema (3.1).

(b) A lo largo de toda la curva se cumple

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)' = \pm\,\tau\sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{\kappa}\right)^2}\,.$$

(La anterior relación es más general que la igualdad

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left[\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\frac{1}{\tau}\right]^2 = R^2$$

probada en teoría, para cuya demostración era necesaria la hipótesis adicional "$\tau(t) \neq 0$ para todo t" porque se utilizaban las esferas osculatrices.)

5.9 Sea $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la longitud de arco y tal que $\kappa(t) \neq 0 \neq \tau(t)$ para todo $t \in I$, en cuyo caso está definido el centro $C(t) \in \mathbb{R}^3$ de la esfera osculatriz de la curva en el punto $\sigma(t)$ para todo $t \in I$.

Supóngase que la curva $C : I \to \mathbb{R}^3$ es regular (esto es, que $C'(t) \neq 0$ para todo t) y que tiene curvatura no nula en todo punto, de modo que C tiene su triedro de Frenet en todo punto. Pruébese que el vector tangente a σ en un punto $\sigma(t)$ es proporcional al vector binormal a C en el punto correspondiente $C(t)$.

5.10 Sea $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por su longitud de arco para la que se cumple $\kappa(t) > 0$ para todo $t \in I$ (en cuyo caso las evolventes de σ son curvas regulares). Dado $a \in \mathbb{R}$ considérese la evolvente $\varphi = \sigma + (a-t)T$ $(t \in I,\ t \neq a)$ de σ.

(a) Si $\bar{T}$ y $\bar{\kappa}$ denotan respectivamente el vector tangente unitario y la curvatura de φ, pruébense las igualdades

$$\bar{T} = \mathrm{sig}\{(a-t)\}\,N\,, \qquad \bar{\kappa}^2 = \frac{\kappa^2+\tau^2}{(a-t)^2\,\kappa^2}\,.$$

En particular $\bar{\kappa}(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

(b) Si $\bar{N}$, $\bar{B}$ y $\bar{\tau}$ son, respectivamente, el vector normal principal, el vector binormal y la torsión de φ, pruébense las igualdades

$$\bar{N} = \frac{\mathrm{sig}\{a-t\}}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\Big(-\kappa T + \tau B\Big)\,,$$

$$\bar{B} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\Big(\tau T + \kappa B\Big)\,, \qquad \bar{\tau} = \frac{\kappa\tau' - \tau\kappa'}{(a-t)\,\kappa\,(\kappa^2+\tau^2)}\,.$$

(c) Dados $t_0, t_1 \in I$, si $d_0 = \mathrm{d}(\sigma(t_0), \varphi(t_0))$ y $d_1 = \mathrm{d}(\sigma(t_1), \varphi(t_1))$, pruébese la igualdad

$$d_0 = d_1 + (t_1 - t_0)\,.$$

¿Cómo puede usar un jardinero la anterior igualdad para construir la evolvente de un seto?

5.11 Obténganse las evolventes de la circunferencia $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\,t, 0)$, de radio $r > 0$.

5.12 Sea $\sigma = \sigma(t)$, $t \in I$, una curva parametrizada por su longitud de arco, con curvatura no nula en todo punto para que estén definidas sus evolutas.

(a) Pruébese que el ángulo bajo el cual dos evolutas de σ son vistas desde σ es constante.

(b) Si $\varphi = \varphi(t)$, $t \in I$, es una evoluta de σ, entonces la recta normal principal a φ en un punto suyo es paralela a la recta tangente a σ en el punto correspondiente de σ.

5.13 Sea $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ una curva plana de clase C^3 que está parametrizada por la longitud de arco, y supóngase que se cumplen $\kappa(t) > 0$ y $\kappa'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. En ese caso las evolutas de σ son la familia de curvas regulares $\{\varphi_c\}_{c\in\mathbb{R}}$, donde

$$\varphi_c = \sigma + \frac{1}{\kappa} N + \frac{c}{\kappa} B\,.$$

Fijado $c \in \mathbb{R}$ pruébense:

(a) La curvatura de φ_c no se anula en ningún punto ($\varphi_c'(t) \times \varphi_c''(t) \neq 0$ para todo $t \in I$).

(b) La curva φ_c es plana si y sólo si $c = 0$ (es decir, $[\varphi_c', \varphi_c'', \varphi_c'''] = 0$ si y sólo si $c = 0$).

(c) La curva φ_c es una hélice general.

Nota: Sea σ la curva plana del problema anterior. La desarrollable tangencial de σ está contenida en el plano sobre el que yace, y por lo tanto es claro que las evolventes de σ son también planas (y coplanarias con σ). Según el ejemplo 4.3, una curva no plana puede tener evolventes que son planas, y como consecuencia se sigue que las evolutas de una curva plana no necesariamente son planas.

El apartado (b) del problema 5.13 dice que la única evoluta plana de σ es la curva que describen sus centros de curvatura: $\varphi_0 = \sigma + \frac{1}{\kappa}N$. Por ser B constante, las restantes evolutas de σ se hallan sobre el cilindro cuya curva directriz es la evoluta plana, y cuyas rectas generatrices tienen la dirección del vector B.

5.14 Considérese la curva $\sigma(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Dado $t \in \mathbb{R}$, pruébese que la curvatura de σ en el punto $\sigma(t)$ es no nula y obténgase la ecuación del plano osculador de la curva en dicho punto.

(b) Dados tres puntos distintos $P_1 = \sigma(t_1)$, $P_2 = \sigma(t_2)$ y $P_3 = \sigma(t_3)$ de la curva, sean Π_1, Π_2 y Π_3 los respectivos planos osculadores a σ. Pruébese que la intersección $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$ es un punto que yace sobre el plano determinado por P_1, P_2 y P_3.

5.15 Considérese la curva $\sigma(t) = \big(t, 2(1-\cos t), 3(t^2 - \mathrm{sen}^2\, t)\big)$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Calcúlese el plano osculador a la curva en $t = 0$.

(b) Calcúlese la circunferencia osculatriz a la curva en $t = 0$.

(c) ¿Cuál es la torsión de σ en $t = 0$?

5.16 En $\mathbb{R}^2$ (el plano $z = 0$ de $\mathbb{R}^3$), obténgase la circunferencia osculatriz a la elipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1\,.$$

en su punto $(0, 5)$.

5.17 Dos curvas de $\mathbb{R}^3$ (con curvatura no nula en todo punto) se dice que son de Bertrand, si pueden ponerse en correspondencia biunívoca de modo que en puntos correspondientes ambas curvas tengan la misma recta normal principal (véase el problema II.5.19).

Sean $\sigma = \sigma(t)$ y $\sigma^* = \sigma^*(t)$, $t \in I$, curvas de Bertrand. Dado $t \in I$, pruébese que la distancia entre los puntos correspondientes $\sigma(t)$ y $\sigma^*(t)$ es constante, y que el ángulo que forman los vectores tangentes a las curvas en dichos puntos también es constante.

5.18 Una curva (con curvatura no nula en todo punto) se dice que es de Bertrand, si existe otra curva con la que forma una pareja de curvas de Bertrand.

Sea $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la longitud de arco para la que se cumple $\kappa(t) > 0$ y $\tau(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

(a) Pruébese que σ es una curva de Bertrand si y sólo si existen constantes α y β tales que $\kappa + \beta\tau = 1/\alpha$.

(b) Pruébese que existe más de una curva σ^* tal que σ y σ^* son curvas de Bertrand si y sólo si σ es una hélice circular.

5.19 Demuéstrese que toda curva plana (con curvatura no nula en todo punto) es de Bertrand.

5.20 Pruébese que si dos curvas de $\mathbb{R}^3$ (con curvatura no nula en todo punto) están en correspondencia biunívoca de modo que en puntos correspondientes ambas tienen la misma recta binormal, entonces las curvas son planas.

5.21 Demuéstrese que dos evolventes de una curva plana son curvas de Bertrand.