Capítulo IV

Concepto de superficie

1. Parametrizaciones regulares

Intuitivamente, una superficie de $\mathbb{R}^3$ es un subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ con la siguiente propiedad: cada punto $P \in S$ tiene un entorno abierto en S que es imagen biyectiva de un abierto del plano [1]. Como queremos aplicar a S los métodos del cálculo diferencial, supondremos que dichas biyecciones locales son al menos de clase C^1. Esta es la idea que conduce a la noción de superficie como "subvariedad diferenciable" de dimensión 2, la cual estudiaremos en capítulos próximos. Ahora vamos a trabajar con la noción ligeramente distinta de "superficie parametrizada".

Definición 1.1 Una *representación paramétrica* de clase C^m ($m \geq 1$) es una aplicación $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ de clase C^m definida sobre un abierto conexo U de $\mathbb{R}^2$. Recordemos que φ es de clase C^m cuando todas sus derivadas parciales hasta el orden m existen y son continuas. Utilizaremos la notación habitual

$$\varphi_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\,, \quad \varphi_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}\,, \quad \varphi_{uv} = \big(\varphi_u\big)_v = \frac{\partial \varphi_u}{\partial v} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u}\,, \quad \varphi_{vu} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}\,, \quad \varphi_{uu} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\,, \quad \dots\,,$$

donde (u, v) son las coordenadas cartesianas de $\mathbb{R}^2$. Se dice que la representación paramétrica φ es *regular* cuando el vector $\varphi_u \times \varphi_v$ no se anula en ningún punto del abierto U.

Definición 1.2 Sea $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ una representación paramétrica regular de clase C^m. Si $S = \operatorname{Im} \varphi$, entonces diremos que S es una *superficie parametrizada* por φ. A veces hablaremos un poco vagamente e identificaremos la superficie con su parametrización, aunque una superficie puede ser parametrizada de distintas maneras.

Lema 1.3 *Toda representación paramétrica regular es una aplicación localmente inyectiva.*

Demostración. Sea $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ una representación paramétrica regular de clase C^m y fijemos un punto $P_0 = \varphi(u_0, v_0) \in S$, $(u_0, v_0) \in U$. La "diferencial" de φ en el punto (u_0, v_0) es la aplicación lineal $\mathrm{d}_{(u_0,v_0)}\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz en las bases usuales de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ es la llamada "matriz jacobiana" de φ en (u_0, v_0): si escribimos $\varphi(u, v) = \big(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v)\big)$ con $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : U \to \mathbb{R}$ funciones de clase C^m, entonces

[1] Todo subconjunto de $\mathbb{R}^3$ se considerará dotado de la topología inducida por la topología usual de $\mathbb{R}^3$.

$$\varphi_u = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial u}\right), \qquad \varphi_v = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial v}\right),$$

y dicha matriz es

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial u}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial v}(u_0,v_0) \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la condición de regularidad $\varphi_u(u_0,v_0)\times\varphi_v(u_0,v_0)\neq 0$ significa justamente que la diferencial $\mathrm{d}_{(u_0,v_0)}$ es inyectiva, y en los cursos de cálculo se prueba que en ese caso la aplicación diferenciable φ es inyectiva en un entorno de (u_0,v_0). ∎

Ejemplos 1.4 (a) Si $g : U \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^m sobre un abierto conexo U de $\mathbb{R}^2$ y $S = \{(u,v,g(u,v)) \,:\, (u,v)\in U\}$ es su gráfica, entonces S es una superficie parametrizada del modo evidente

$$\begin{array}{rcl} \varphi : U & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (u,v,g(u,v)) \,. \end{array}$$

Es inmediato comprobar que la aplicación φ anterior es de clase C^m y regular. Si, como es habitual, (x,y,z) denotan las coordenadas cartesianas sobre $\mathbb{R}^3$, entonces la superficie S de $\mathbb{R}^3$ tiene por ecuación $z = g(x,y)$.

Nótese que también podemos considerar la superficie $\bar{S}$ de ecuación $y = g(z,x)$; esto es, $\bar{S}$ es la superficie de $\mathbb{R}^3$ parametrizada como

$$\begin{array}{rcl} \varphi : U & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (v,g(v,u),u) \,. \end{array}$$

(b) El conjunto de puntos S de $\mathbb{R}^3$ que cumplen la ecuación $x^2+y^2=2z$ es un “paraboloide elíptico”, y una parametrización suya la obtenemos como la gráfica de la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = \frac{1}{2}\big(x^2+y^2\big)$. Otra parametrización de S podemos obtenerla considerando el “cambio de coordenadas” $x = u+v$, $y = u-v$, para el que se cumple

$$u = \tfrac{1}{2}(x+y)\,, \qquad v = \tfrac{1}{2}(x-y)\,, \qquad u^2+v^2 = z\,;$$

por tanto tenemos la siguiente parametrización regular de clase C^∞ de S:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & \big(u+v\,, u-v\,, u^2+v^2\big)\,. \end{array}$$

(c) Fijado un escalar $r>0$, sea ahora X la esfera de $\mathbb{R}^3$ de radio r centrada en el origen; la ecuación de X es $x^2+y^2+z^2=r^2$. Si $S = \{(x,y,z)\in X \,:\, z>0\}$ es el “hemisferio norte” de la esfera, es fácil poner S como la gráfica de una función: si $P=(x,y,z)\in S$, entonces $x^2+y^2 = r^2-z^2 < r^2$ y z debe ser la raíz cuadrada positiva de $r^2-x^2-y^2$, de modo que si $D = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \,:\, u^2+v^2<r^2\}$ es el disco abierto de $\mathbb{R}^2$ de radio r centrado en el origen,

entonces S es la gráfica de la función $f : D \to \mathbb{R}$, $f(u,v) = \sqrt{r^2 - u^2 - v^2}$. Nótese que la función f es de clase C^∞.

(d) Consideremos de nuevo la esfera $X \equiv x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ y sea ahora S dicha esfera menos los "polos", esto es,

$$S = X - \{(0,0,r),(0,0,-r)\} = \big\{(x,y,z) \in X \,:\, x^2 + y^2 > 0\big\}.$$

Dado $P = (x,y,z) \in S$, sus dos primeras coordenadas definen un punto (x,y) de $\mathbb{R}^2$ distinto de $(0,0)$ y por tanto tenemos coordenadas polares para él (véase I.1.7): existe $\theta \in \mathbb{R}$, único salvo múltiplos enteros de 2π, tal que $x = \bar{r}\cos\theta$ e $y = \bar{r}\operatorname{sen}\theta$, donde $\bar{r} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Tenemos

$$r^2 = z^2 + x^2 + y^2 = z^2 + \bar{r}^2 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{z}{r}\right)^2 + \left(\frac{\bar{r}}{r}\right)^2 = 1\,;$$

en particular $(z/r)^2 < 1$. Como la aplicación seno establece una biyección entre los intervalos abiertos $\big(\frac{-\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\big)$ y $(-1,1)$ de la recta real, tenemos que existe un único ángulo $\varphi \in \big(\frac{-\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\big)$ tal que $z/r = \operatorname{sen}\varphi$. Además $(\bar{r}/r)^2 = \cos^2\varphi$, y como sobre el intervalo $\big(\frac{-\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\big)$ el coseno es una función positiva concluimos que debe ser $\bar{r} = r\cos\varphi$. De todo lo dicho se sigue que las coordenadas del punto P de partida son

$$x = r\cos\theta\cos\varphi\,, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,, \qquad z = r\operatorname{sen}\varphi\,.$$

Hemos probado que una parametrización de S es la aplicación

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R} \times \big(\frac{-\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\big) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\theta,\varphi) & \longmapsto & (r\cos\theta\cos\varphi\,, r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,, r\operatorname{sen}\varphi)\,, \end{array}$$

que es de clase C^∞. Compruébese que h es regular (y por tanto localmente inyectiva, aunque no es inyectiva).

(e) Sea Π el plano de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $ax + by + cz = d$, donde $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. Podemos poner el plano como la gráfica de una función de clase C^∞: si por ejemplo es $b \neq 0$, entonces $y = d - \frac{a}{b}x - \frac{c}{b}z$.

(f) Fijado un escalar $r > 0$, la superficie de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ es un cilindro (circular de radio r centrado en el eje z). Utilizando la conocida parametrización de la circunferencia de radio r, $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = (r\cos t\,, r\operatorname{sen}t)$, obtenemos fácilmente una parametrización del cilindro:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (r\cos u\,, r\operatorname{sen}u\,, v)\,, \end{array}$$

que es regular de clase C^∞.

(g) Sea S la "parte superior" del cono $x^2 + y^2 = z^2$ de $\mathbb{R}^3$, esto es

$$S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 - z^2 = 0\,,\ z \geq 0\big\}\,.$$

Es claro que S es la gráfica de la función $g(u,v) = \sqrt{u^2 + v^2}$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$; es decir, una parametrización de S es

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & \big(u\,, v\,, \sqrt{u^2 + v^2}\,\big)\,. \end{array}$$

La anterior no es una parametrización regular porque la función g no es diferenciable en $(0,0)$. Si $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ y $\bar{S}$ es el abierto de S que se obtiene al quitarle al cono su "vértice", $\bar{S} = S - \{(0,0,0)\}$, entonces la aplicación $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(u,v) = \big(u\,, v\,, \sqrt{u^2+v^2}\,\big)$, es una parametrización regular de clase C^∞ de $\bar{S}$.

Definición 1.5 Una *transformación de coordenadas* (ó *cambio de coordenadas*, ó *cambio de parámetros*) de clase C^m, es una aplicación $U \to V$ de clase C^m entre abiertos conexos de $\mathbb{R}^2$, que es biyectiva y cuya inversa es también de clase C^m.

1.6 Consideremos dos abiertos conexos U y V en $\mathbb{R}^2$, denotemos las coordenadas cartesianas sobre U con (u_1,u_2), y las coordenadas cartesianas sobre V con (v_1,v_2). De este modo una aplicación de clase C^m de U en V la podemos escribir del modo

$$\begin{array}{rcl} U & \xrightarrow{(v_1,v_2)} & V \\ (u_1,u_2) & \longmapsto & \big(v_1(u_1,u_2)\,, v_2(u_1,u_2)\big); \end{array}$$

la matriz jacobiana de esta aplicación es

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial u_j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial v_1}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial u_2} \end{pmatrix},$$

y el "jacobiano" de la aplicación (el determinante de la matriz jacobiana) es

$$\left|\frac{\partial v_i}{\partial u_j}\right| = \frac{\partial v_1}{\partial u_1}\frac{\partial v_2}{\partial u_2} - \frac{\partial v_1}{\partial u_2}\frac{\partial v_2}{\partial u_1}\,.$$

Si la aplicación $U \to V$ es biyectiva, entonces el conocido "teorema de la función inversa" afirma que para que esta aplicación sea un cambio de coordenadas de clase C^m es condición necesaria y suficiente que su jacobiano no se anule en ningún punto.

1.7 Supongamos que tenemos un cambio de coordenadas $U \to V$ de clase C^m, y que tenemos una representación paramétrica regular de clase C^m sobre V de una superficie S de $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{array}{rcl} \varphi : V & \longrightarrow & S \subset \mathbb{R}^3 \\ (v_1,v_2) & \longmapsto & \varphi(v_1,v_2) = \big(\varphi_1(v_1,v_2), \varphi_2(v_1,v_2), \varphi_3(v_1,v_2)\big)\,. \end{array}$$

Utilizando el cambio de coordenadas podemos parametrizar S sobre U; en efecto, basta componer φ con la biyección $U \to V$ para obtener una aplicación que denotaremos $\bar{\varphi}$,

$$\begin{array}{rcccl} U & \xrightarrow{(v_1,v_2)} & V & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^3 \\ (u_1,u_2) & \longmapsto & \big(v_1(u_1,u_2)\,, v_2(u_1,u_2)\big) & \longmapsto & \varphi\big(v_1(u_1,u_2)\,, v_2(u_1,u_2)\big)\,; \end{array}$$

es decir, $\bar{\varphi}(u_1,u_2) = \big(\bar{\varphi}_1(u_1,u_2), \bar{\varphi}_2(u_1,u_2), \bar{\varphi}_3(u_1,u_2)\big)$, donde las funciones $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_2 : U \to \mathbb{R}$ están definidas por las igualdades

$$\bar{\varphi}_k(u_1,u_2) = \varphi_k\big(v_1(u_1,u_2)\,, v_2(u_1,u_2)\big)\,, \qquad k = 1,2,3\,.$$

Es claro que $\bar{\varphi}$ es de clase C^m (porque es composición de aplicaciones de clase C^m), así que nos falta comprobar que es regular.

Por una parte, derivar la aplicación $\bar{\varphi}$ respecto de un parámetro u_i consiste en derivar cada una de sus funciones componentes,

$$\bar{\varphi}_{u_i} = \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_1}{\partial u_i}, \frac{\partial \bar{\varphi}_2}{\partial u_i}, \frac{\partial \bar{\varphi}_3}{\partial u_i} \right);$$

por otra parte, aplicando a cada función $\bar{\varphi}_k(u_1, u_2) = \varphi_k\big(v_1(u_1, u_2), v_2(u_1, u_2)\big)$ la regla de la cadena tenemos

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial u_i} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial u_i} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial u_i}.$$

De todo lo dicho se siguen las siguientes igualdades entre vectores

$$\left.\begin{aligned} \bar{\varphi}_{u_1} &= \frac{\partial v_1}{\partial u_1}\varphi_{v_1} + \frac{\partial v_2}{\partial u_1}\varphi_{v_2} \\ \bar{\varphi}_{u_2} &= \frac{\partial v_1}{\partial u_2}\varphi_{v_1} + \frac{\partial v_2}{\partial u_2}\varphi_{v_2} \end{aligned}\right\},$$

y haciendo el producto vectorial obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{u_1} \times \bar{\varphi}_{u_2} &= \left(\frac{\partial v_1}{\partial u_1}\varphi_{v_1} + \frac{\partial v_2}{\partial u_1}\varphi_{v_2}\right) \times \left(\frac{\partial v_1}{\partial u_2}\varphi_{v_1} + \frac{\partial v_2}{\partial u_2}\varphi_{v_2}\right) \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial u_1}\frac{\partial v_1}{\partial u_2}(\varphi_{v_1} \times \varphi_{v_1}) + \frac{\partial v_1}{\partial u_1}\frac{\partial v_2}{\partial u_2}(\varphi_{v_1} \times \varphi_{v_2}) \\ &\quad + \frac{\partial v_2}{\partial u_1}\frac{\partial v_1}{\partial u_2}(\varphi_{v_2} \times \varphi_{v_1}) + \frac{\partial v_2}{\partial u_1}\frac{\partial v_2}{\partial u_2}(\varphi_{v_2} \times \varphi_{v_2}) \\ &= 0 + \frac{\partial v_1}{\partial u_1}\frac{\partial v_2}{\partial u_2}(\varphi_{v_1} \times \varphi_{v_2}) - \frac{\partial v_2}{\partial u_1}\frac{\partial v_1}{\partial u_2}(\varphi_{v_1} \times \varphi_{v_2}) + 0 \\ &= \left(\frac{\partial v_1}{\partial u_1}\frac{\partial v_2}{\partial u_2} - \frac{\partial v_1}{\partial u_2}\frac{\partial v_2}{\partial u_1}\right)(\varphi_{v_1} \times \varphi_{v_2}) = \left|\frac{\partial v_i}{\partial u_j}\right|(\varphi_{v_1} \times \varphi_{v_2}) \neq 0. \end{aligned}$$

Ejemplos 1.8 (a) En el ejemplo 1.4 (b) hemos visto dos parametrizaciones de un paraboloide elíptico, y la segunda se obtenía de la primera haciendo el cambio de parámetros $v_1 = u_1 + u_2$, $v_2 = u_1 - u_2$, donde $V = \mathbb{R}^2 = U$.

(b) Sea $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la "esfera unidad" de $\mathbb{R}^3$, y sobre ella consideremos el trozo $S = \{(x, y, z) \in S_2 \,:\, y > 0,\ z > 0\}$. En los ejemplos 1.4 (c) y 1.4 (d) hamos dado dos parametrizaciones regulares de clase C^∞ de S,

$$\begin{aligned} f : V = (0, \pi) \times \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right) &\longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \varphi) &\longmapsto (\cos\theta\cos\varphi, \operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{f} : U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, v > 0,\ u^2 + v^2 < 1\} &\longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \left(u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}\right). \end{aligned}$$

Si $P = (x, y, z) \in S$ es tal que $P = f(\theta, \varphi) = \bar{f}(u, v)$, entonces debe ser $u = \cos\theta\cos\varphi$, $v = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi$. Es decir, la primera parametrización se obtiene de la segunda mediante el cambio de parámetros

$$\begin{array}{ccl} V & \xrightarrow{(u,v)} & U \\ (\theta,\varphi) & \longmapsto & \big(u(\theta,\varphi)\,, v(\theta,\varphi)\big) = (\cos\theta\cos\varphi\,, \operatorname{sen}\theta\cos\varphi)\,. \end{array}$$

Compruébese que, en efecto, la anterior aplicación es un cambio de coordenadas de clase C^∞.

2. Superficies en forma implícita

2.1 Hemos visto varios ejemplos de superficies que son los ceros de una función diferenciable $F = F(x, y, z)$ definida sobre un abierto de $\mathbb{R}^3$. Algunas de ellas admiten parametrizaciones globales:

(i) para un plano es $F(x, y, z) = ax + by + cz - d$ con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$;

(ii) para el paraboloide elíptico del ejemplo 1.4 (b) es $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z$;

(iii) para la gráfica de una función g es $F(x, y, z) = g(x, y) - z$ (véase el ejemplo 1.4 (a)).

En otros casos sólo tenemos parametrizaciones parciales:

(iv) para la esfera de $\mathbb{R}^3$ de radio $r > 0$ centrada en el origen es $F(x, y, z) = x^2+y^2+z^2-r^2$ (véanse los ejemplos (c) y (d) de 1.4).

Aparece entonces de modo natural la siguiente cuestión: dados un abierto W de $\mathbb{R}^3$ y una función diferenciable $F : W \to \mathbb{R}$, ¿cuándo el conjunto $\{(x, y, z) \in W \ : \ F(x, y, z) = 0\}$ de los ceros de F es (al menos localmente) una superficie parametrizable? Veremos en la próxima proposición que la respuesta la da el conocido "teorema de la función implícita" del cálculo diferencial.

Definición 2.2 Sea W un abierto de $\mathbb{R}^3$ y sea $F : W \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Se define el *gradiente* de F como la aplicación $\operatorname{grad} F : W \to \mathbb{R}^3$ cuyas componentes son $\big(F_x, F_y, F_z\big)$, es decir,

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{grad} F : W & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & \big(F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z)\big)\,. \end{array}$$

Proposición 2.3 *Sean W un abierto de $\mathbb{R}^3$ y $F : W \to \mathbb{R}$ una función de clase C^m, y consideremos el conjunto $Z = \{(x, y, z) \in W \ : \ F(x, y, z) = 0\}$ de los ceros de F.*

Si $P_0 \in Z$ es tal que $\operatorname{grad} F(P_0) \neq 0$, entonces existe un entorno abierto S de P_0 en Z que admite una parametrización regular de clase C^m.

Demostración. Sea $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in Z$ tal que $\big(F_x(P_0), F_y(P_0), F_z(P_0)\big) \neq (0, 0, 0)$; supongamos que es por ejemplo $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Aplicando el teorema de la función implícita tenemos: existe un entorno abierto U de (x_0, y_0) en $\mathbb{R}^2$, existe un entorno abierto I de z_0 en $\mathbb{R}$, y existe una función diferenciable $f : U \to I$ de clase C^m, cumpliéndose: $S := Z \cap (U \times I)$ es un entorno abierto de P_0 en Z tal que S es la gráfica de f. Por lo tanto la aplicación

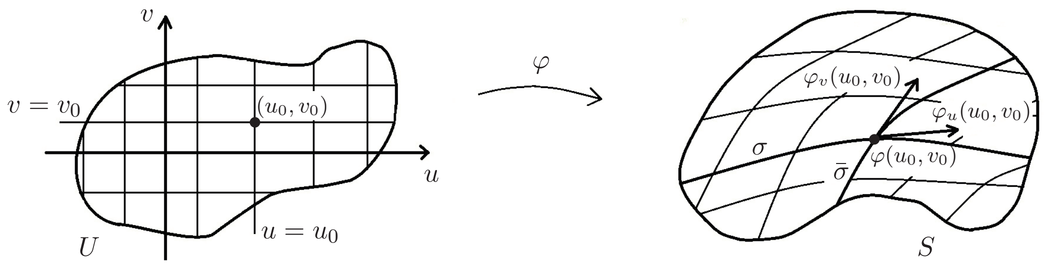
$$\begin{array}{rcl} U & \longrightarrow & S \subset \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & \big(x, y, f(x, y)\big) \end{array}$$

es una parametrización regular de clase C^m. ∎

Nota **2.4** La condición de la proposición 2.3 es suficiente pero no es necesaria: considérese por ejemplo la función $F(x, y, z) = x^2$, cuyos ceros son los puntos del plano $x = 0$.

3. Curvas paramétricas

3.1 Consideremos una representación paramétrica regular $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$, $\varphi = \varphi(u, v)$, de clase C^m de una superficie S. Podemos representarla con el dibujo siguiente:



La imagen de la recta $v = v_0$ dentro del abierto U de $\mathbb{R}^2$ es la curva $\sigma(u) = \varphi(u, v_0)$ que está sobre S; u es un parámetro para esta curva, y su vector tangente en un punto $\sigma(u_0) = \varphi(u_0, v_0)$ es

$$\sigma'(u_0) = \varphi_u(u_0, v_0) \neq 0\,.$$

Análogamente, la imagen de la recta $u = u_0$ es la curva $\bar{\sigma}(v) = \varphi(u_0, v)$ que yace sobre S, para la cual v es un parámetro, y cuyo vector tangente en un punto $\bar{\sigma}(v_0) = \varphi(u_0, v_0)$ es

$$\bar{\sigma}'(v_0) = \varphi_v(u_0, v_0) \neq 0\,.$$

Definición 3.2 Las dos familias de curvas regulares de clase C^m descritas en el punto 3.1 anterior, y que recubren la superficie S, se denominan *curvas paramétricas*. Obviamente, dichas curvas sobre S dependen de la parametrización. La condición de regularidad para la parametrización significa que, dado el punto $P_0 = \varphi(u_0, v_0) \in S$, las dos curvas paramétricas que pasan por él son tales que sus vectores tangentes en P_0 son linealmente independientes.

Ejemplos 3.3 (a) Si S es la gráfica de una función diferenciable $g : U \to \mathbb{R}$, entonces tenemos para S la parametrización $\varphi(u, v) = (u, v, g(u, v))$, $(u, v) \in U$. En este caso las curvas paramétricas son planas. Por ejemplo, fijado $v = v_0$, la curva $\sigma(u) = \varphi(u, v_0)$ es el corte de la superficie S con el plano $y = v_0$ de $\mathbb{R}^3$. Compruébese cómo son esas curvas planas para los ejemplos (b) y (c) de 1.4.

(b) Sea X la esfera de $\mathbb{R}^3$ centrada en el origen y de radio $r > 0$, y sea S la superficie que se obtiene al quitarle a X los puntos $(0, 0, r)$ y $(0, 0, -r)$. En el ejemplo 1.4 (d) hemos obtenido para S la siguiente parametrización:

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R} \times \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \varphi) & \longmapsto & (r\cos\theta\cos\varphi\,, r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi\,, r\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,. \end{array}$$

En este caso, las curvas paramétricas $\theta = \theta_0$ son los llamados "meridianos" de S, y las curvas paramétricas $\varphi = \varphi_0$ son los "paralelos" de S. Dado $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tenemos sobre S el meridiano

$$\sigma : (\tfrac{-\pi}{2}\,,\tfrac{\pi}{2}) \to S\,, \qquad \sigma(\varphi) = (r\cos\theta_0\cos\varphi\,, r\,\mathrm{sen}\,\theta_0\cos\varphi\,, r\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,;$$

se trata de un arco de circunferencia recorrida desde el "polo sur" hasta el "polo norte". Dado $\varphi_0 \in (\frac{-\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2})$ tenemos sobre S el paralelo

$$\bar\sigma : \mathbb{R} \to S\,, \qquad \bar\sigma(\theta) = (r\cos\theta\cos\varphi_0\,, r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi_0\,, r\,\mathrm{sen}\,\varphi_0)\,,$$

que es una circunferencia paralela al plano $z = 0$; concretamente, es el corte de la esfera X con el plano $z = r\,\mathrm{sen}\,\varphi_0$.

4. Plano tangente y recta normal

Fijemos en esta sección una parametrización regular $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ de clase C^m de una superficie S, y un punto $P_0 = \varphi(u_0, v_0)$ sobre ella.

Definición 4.1 Se llaman *vectores tangentes* a la superficie S en el punto P_0, a los vectores del subespacio vectorial $T_{P_0}S := \big\langle \varphi_u(u_0,v_0), \varphi_v(u_0,v_0)\big\rangle$ de $\mathbb{R}^3$. Nótese que $T_{P_0}S$ tiene dimensión 2 porque $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ sobre toda la superficie, satisfaciéndose por ello

$$T_{P_0}S := \big\langle \varphi_u(u_0,v_0) \times \varphi_v(u_0,v_0)\big\rangle^{\perp}.$$

También se dice que $T_{P_0}S$ es el *espacio vectorial tangente* a la superficie S en el punto P_0.

4.2 El espacio vectorial $T_{P_0}S$ no depende de la parametrización $\varphi = \varphi(u,v)$ en el siguiente sentido: Si $u = u(\theta,\phi)$, $v = v(\theta,\phi)$ es un cambio de parámetros de clase C^m y consideramos la nueva parametrización de S que se obtiene aplicándolo,

$$\bar\varphi(\theta,\phi) = \varphi\big(u(\theta,\phi), v(\theta,\phi)\big)\,,$$

entonces en el punto 1.7 se ha probado que los vectores $\varphi_u \times \varphi_v$ y $\bar\varphi_\theta \times \bar\varphi_\phi$ son proporcionales en cada punto de la superficie, es decir, si $u_0 = u(\theta_0,\phi_0)$ y $v_0 = v(\theta_0,\phi_0)$ entonces

$$T_{P_0}S = \big\langle \varphi_u(u_0,v_0) \times \varphi_v(u_0,v_0)\big\rangle^{\perp} = \big\langle \bar\varphi_\theta(\theta_0,\phi_0) \times \bar\varphi_\phi(\theta_0,\phi_0)\big\rangle^{\perp}.$$

Nota **4.3** Cuando digamos "Sea $\sigma : I \to S$ una curva ... " estamos queriendo decir "Sea $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ una curva que yace sobre la superficie S ...".

Lema 4.4 *Todo vector tangente a S es el vector tangente a una curva sobre S. Con precisión: dado un vector no nulo $e \in T_{P_0}S$, existe una curva regular $\bar\sigma : I \to S$ de clase C^m que pasa por P_0 y cuyo vector tangente en P_0 es e.*

Demostración. Para un vector no nulo $e \in T_{P_0}S$ existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$, tal que $e = \lambda\varphi_u(u_0,v_0) + \mu\varphi_v(u_0,v_0)$. Consideremos dentro del abierto U de $\mathbb{R}^2$ en el que varían los parámetros (u,v), un segmento de recta que pasa por (u_0,v_0) con la dirección de (λ,μ): para un $\varepsilon > 0$ tenemos sobre U la curva $\sigma : I = (-\varepsilon,\varepsilon) \to U$, $\sigma(t) = (u_0,v_0) + t(\lambda,\mu)$; es decir, $\sigma(t) = \big(u(t), v(t)\big)$ con $u(t) = u_0 + t\lambda$, $v(t) = v_0 + t\mu$. Es claro que $\sigma'(t) = \big(u'(t), v'(t)\big) = (\lambda,\mu)$ para todo $t \in I$; además $\sigma(0) = (u_0,v_0)$.

Si $\bar{\sigma}$ denota la composición $I \xrightarrow{\sigma} U \xrightarrow{\varphi} S$, entonces tenemos sobre S la curva $\bar{\sigma}(t) = \varphi\big(u(t), v(t)\big)$, que es de clase C^m. Veamos que también es regular:

$$\bar{\sigma}' = \frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\varphi\big(u(t), v(t)\big)\Big) = \varphi_u\, u' + \varphi_v\, v' = \lambda\, \varphi_u + \mu\, \varphi_v \qquad \text{con} \quad (\lambda, \mu) \neq (0,0)\,,$$

y como los vectores φ_u y φ_v son linealmente independientes en todos los puntos de S, concluimos que debe ser $\bar{\sigma}'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Para terminar tenemos

$$\bar{\sigma}(0) = \varphi(u_0, v_0) = P_0\,, \qquad\qquad \bar{\sigma}'(0) = \lambda\, \varphi_u(u_0, v_0) + \mu\, \varphi_v(u_0, v_0) = e\,;$$

es decir, $\bar{\sigma}$ pasa por el punto P_0 y su vector tangente en dicho punto es e. ∎

Definición 4.5 Se define el *plano tangente* a la superficie S en el punto P_0, como el plano que pasa por P_0 cuya dirección es el subespacio $T_{P_0}S$ de $\mathbb{R}^3$. Claramente, la ecuación de dicho plano es

$$\big(\varphi_u(u_0, v_0) \times \varphi_v(u_0, v_0)\big) \cdot \big(X - P_0\big) = 0\,,$$

donde X denota un punto genérico de $\mathbb{R}^3$.

La recta que pasa por P_0 con la dirección del vector $\varphi_u(u_0, v_0) \times \varphi_v(u_0, v_0)$ es perpendicular al plano tangente a S en P_0, y se llama *recta normal* a la superficie S en el punto P_0.

4.6 Sea S una superficie de $\mathbb{R}^3$ que viene dada por los ceros de una función $F = F(x, y, z)$ de clase C^m definida sobre un abierto W de $\mathbb{R}^3$,

$$S = \{(x, y, z) \in W \,:\, F(x, y, z) = 0\} \qquad \text{ó abreviadamente} \qquad S \equiv\ F = 0\,,$$

siendo el gradiente de F no nulo en todos los puntos de S.

Fijado un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$, veamos que la dirección de la recta normal a S en P_0 viene dada por el vector no nulo $(\operatorname{grad} F)(P_0) = \big(F_x(P_0), F_y(P_0), F_z(P_0)\big)$, es decir,

$$T_{P_0}S = \big\langle \big(F_x(P_0), F_y(P_0), F_z(P_0)\big) \big\rangle^{\perp}.$$

En efecto, supongamos por ejemplo que es $F_z(P_0) \neq 0$, en cuyo caso un entorno de P_0 en S lo podemos parametrizar como la gráfica de una función $f : U \to \mathbb{R}$ de clase C^m definida en un entorno abierto U de (x_0, y_0) en $\mathbb{R}^2$ (véase la demostración de la proposición 2.3),

$$\begin{array}{rcl} \varphi : U & \longrightarrow & S \subset \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & (u, v, f(u, v))\,, \end{array} \qquad \text{con} \;\; \varphi(x_0, y_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = P_0\,.$$

Podemos escribir $\varphi(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$ con

$$x(u, v) = u\,, \qquad y(u, v) = v\,, \qquad z(u, v) = f(u, v)\,.$$

La composición $U \xrightarrow{G = F \circ \varphi} \mathbb{R}$, $G(u, v) = F\big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$, es la función nula porque la aplicación F se anula sobre la imagen de φ. Por lo tanto lo mismo ocurrirá para sus parciales,

$G_u = 0 = G_v$. Aplicando la regla de la cadena tenemos

$$\begin{aligned} G_u &= F_x \frac{\partial x}{\partial u} + F_y \frac{\partial y}{\partial u} + F_z \frac{\partial z}{\partial u} \\ &= \big(F_x, F_y, F_z\big) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) = \big(F_x, F_y, F_z\big) \cdot \big(1, 0, f_u\big)\,, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 = G_u(x_0, y_0) &= \big(F_x(\varphi(x_0, y_0)), F_y(\varphi(x_0, y_0)), F_z(\varphi(x_0, y_0))\big) \cdot \big(1, 0, f_u(x_0, y_0)\big) \\ &= \big(F_x(P_0), F_y(P_0), F_z(P_0)\big) \cdot \varphi_u(x_0, y_0)\,. \end{aligned}$$

Del mismo modo se obtiene la igualdad

$$\big(F_x(P_0), F_y(P_0), F_z(P_0)\big) \cdot \varphi_v(x_0, y_0) = 0\,.$$

Hemos probado que el vector $\big(F_x(P_0), F_y(P_0), F_z(P_0)\big)$ es ortogonal al subespacio $T_{P_0}S = \big\langle \varphi_u(x_0, y_0), \varphi_v(x_0, y_0)\big\rangle$, y como dicho vector es no nulo debe cumplirse

$$\big\langle \big(F_x(P_0), F_y(P_0), F_z(P_0)\big)\big\rangle = \big(T_{P_0}S\big)^{\perp},$$

lo que es equivalente a la igualdad $T_{P_0}S = \big\langle \big(F_x(P_0), F_y(P_0), F_z(P_0)\big)\big\rangle^{\perp}$, que es la que queríamos comprobar.

Ejemplo 4.7 Si S es la esfera de $\mathbb{R}^3$ centrada en el origen y de radio $r > 0$, entonces S es la superficie que viene dada por los ceros de la función $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$. Es claro que $\operatorname{grad} F = \big(F_x, F_y, F_z\big) = (2x, 2y, 2z)$ no se anula en ningún punto de S.

Consideremos el punto $P_0 = (0, 0, 1) \in S$. Tenemos $\big(F_x(P_0), F_y(P_0), F_z(P_0)\big) = (0, 0, 2)$ y por lo tanto

$$T_{P_0}S = \langle (0, 0, 2)\rangle^{\perp} = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0)\rangle\,;$$

es decir, el espacio tangente a S en el punto P_0 es el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $z = 0$. Entonces el plano tangente a la esfera S en el punto P_0 (esto es, el plano que pasa por $(0, 0, 1)$ y es paralelo al plano $z = 0$) tiene por ecuación $z = 1$.

Como consecuencia, la recta normal a la esfera S en su "polo norte" es el eje z, esto es, la recta de ecuaciones $x = 0$, $y = 0$.

5. Problemas

5.1 Dados números reales positivos a, b y c, pruébese que el elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

es una superficie de clase C^∞ que puede ser definida implícitamente como los ceros de una función.

5.2 Sea S la superficie que se obtiene al quitarle al elipsoide del problema 5.1 "los polos", esto es, los puntos $(0,0,c)$ y $(0,0,-c)$. Pruébese que la aplicación

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}\times\big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\big) & \longrightarrow & S \\ (\theta,\phi) & \longmapsto & \big(a\cos\theta\cos\phi\,,b\operatorname{sen}\theta\cos\phi\,,c\operatorname{sen}\phi\big) \end{array}$$

es una parametrización regular de clase C^∞ de S.

5.3 Se denomina *toro* a la superficie generada por una circunferencia que gira alrededor de una recta de su plano que no corta a la circunferencia.

Supóngase que la circunferencia se halla inicialmente en el plano $y=0$, que tiene su centro en el punto $(b,0,0)$ y tiene radio $a>0$, siendo $b>a$ para que la circunferencia no corte al eje z, y denotemos por S el toro que genera la circunferencia al girar alrededor del eje z.

(a) Pruébese que la aplicación

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & S \\ (\alpha,\beta) & \longmapsto & \big((b+a\cos\beta)\cos\alpha\,,(b+a\cos\beta)\operatorname{sen}\alpha\,,a\operatorname{sen}\beta\big) \end{array}$$

es una parametrización regular de clase C^∞ de S.

(b) Estúdiense las curvas paramétricas para la anterior parametrización.

(c) Pruébese que S puede definirse implícitamente como los ceros de la función $F(x,y,z)=\big(\sqrt{x^2+y^2}-b\big)^2+z^2-a^2$.

5.4 **Superficies de revolución:** Una superficie S de $\mathbb{R}^3$ se dice que es una *superficie de revolución*, si se obtiene al hacer girar una curva plana C alrededor de una recta L de su plano que no corta a C. Se dice que C es la *curva perfil* (ó *generatriz*) y que L es el *eje* (de revolución) de S. Las diferentes posiciones de la generatriz se llaman *meridianos*, y las circunferencias descritas por cada uno de los puntos de la generatriz reciben el nombre de *paralelos*.

Tomemos, por ejemplo, el eje z como eje de revolución y una curva C que se encuentra en el semiplano $\{y=0,\ x>0\}$. Una parametrización de C será de la forma $\sigma(t)=(f(t),0,g(t))$ con $f,g:I\to\mathbb{R}$ funciones de clase C^m definidas en un intervalo abierto I, con $f(t)>0$ para todo $t\in I$. Entonces la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \varphi:I\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (t,\theta) & \longmapsto & \big(f(t)\cos\theta\,,f(t)\operatorname{sen}\theta\,,g(t)\big) \end{array}$$

es una parametrización regular de clase C^m de la superficie de revolución S obtenida. Los paralelos son la familia de curvas

$$\sigma_{t_0}(\theta)=\big(f(t_0)\cos\theta\,,f(t_0)\operatorname{sen}\theta\,,g(t_0)\big)\,,\qquad t_0\in I\,,$$

y los meridianos son la familia de curvas

$$\bar\sigma_{\theta_0}(t)=\big(f(t)\cos\theta_0\,,f(t)\operatorname{sen}\theta_0\,,g(t)\big)\,,\qquad \theta_0\in\mathbb{R}\,.$$

(a) Pruébese que los meridianos y los paralelos se cortan ortogonalmente.

(b) Fijado un punto $P=\varphi(t_0,\theta_0)\in S$, pruébese que la recta normal a S en P coincide con la normal principal del meridiano que pasa por P. Además, dicha recta es coplanaria con el eje de revolución.

5.5 Una curva sobre una superficie de revolución se denomina *loxodroma* si corta bajo ángulo constante a los meridianos.

Calcúlense las loxodromas de la esfera unidad de $\mathbb{R}^3$. (A la esfera se le quita el “polo norte” y el “polo sur” para que sea una superficie de revolución.)

Nota: Una recta en $\mathbb{R}^3$ puede admitir una parametrización $\sigma = \sigma(t)$ de modo que $\sigma''(t) \neq 0$ (es decir puede ser recorrida en función del tiempo con aceleración no nula). Es el caso, por ejemplo, de $\sigma(t) = (\mathrm{e}^t, 0, 0)$.

En los siguientes ejercicios, cuando digamos que una curva parametrizada $\sigma = \sigma(t)$ es una recta, entenderemos que es una recta parametrizada del modo habitual (esto es, afínmente):

$$\sigma(t) = t\,(a, b, c) + (\alpha, \beta, \gamma)\,;$$

la anterior es la recta que pasa por el punto (α, β, γ), con la dirección del vector (a, b, c) y recorrida con velocidad constante $\sigma' = (a, b, c)$.

5.6 Superficies regladas: Diremos que una superficie S es *reglada*, si admite una parametrización regular $\varphi = \varphi(u, v)$ para la cual una de las dos familias de curvas paramétricas está compuesta por (segmentos de) rectas, en cuyo caso S es una unión de (segmentos de) rectas.

Veamos cómo debe ser una tal parametrización. Supongamos, por ejemplo, que $\varphi = \varphi(u, v)$ es tal que las curvas de la familia

$$\big\{\rho_{u_0}(v) = \varphi(u_0, v)\big\}_{u_0}$$

son rectas. Eso significa que para todo u_0 se cumple

$$0 = \rho''_{u_0}(v) = \varphi_{vv}(u_0, v) \qquad \text{para todo } v\,,$$

y haciendo abstracción del valor u_0 obtenemos que el vector φ_{vv} es idénticamente nulo. Integrando respecto de v la igualdad $\varphi_{vv} = 0$ obtenemos: existen vectores σ y g que no dependen de v (pero pueden depender de u),

$$\sigma(u) = \big(\sigma_1(u), \sigma_2(u), \sigma_3(u)\big) \qquad \text{y} \qquad g(u) = \big(g_1(u), g_2(u), g_3(u)\big)\,,$$

tales que

$$\varphi(u, v) = \sigma(u) + v\,g(u)\,. \tag{5.1}$$

¿En qué condiciones la igualdad (5.1) define una parametrización regular de clase C^m?

La interpretación geométrica de una parametrización de la forma (5.1) para una superficie S es clara: $\sigma = \sigma(u)$ es una curva y para cada punto suyo se considera un vector $g(u)$; fijado u_0 tenemos la recta r_{u_0} que pasa por el punto $\sigma(u_0)$ de la curva con la dirección del vector $g(u_0)$, cuya parametrización es $\rho_{u_0}(v) = \sigma(u_0) + v\,g(u_0)$; la superficie S es la unión de la familia de rectas $\{r_{u_0}\}_{u_0}$.

5.7 Cilindros: Se llama *cilindro* a una superficie generada por una recta l que se mueve paralelamente sobre los puntos de una curva C. Es el caso de superficie reglada en el que el vector que se considera en los puntos de la curva es constante. Se dice que C es una *curva directriz* (ó *curva base*) del cilindro; las copias de la recta l son las generatrices del cilindro.

Sea $\sigma = \sigma(u)$ una parametrización regular de la curva C y sea e_0 un vector que define la dirección de la recta l. La parametrización del cilindro será entonces

$$\varphi(u, v) = \sigma(u) + ve_0 \,.$$

Pruébese que la anterior parametrización es regular (de la misma clase que σ) si y sólo si e_0 no es tangente a la curva en ninguno de sus puntos.

Las curvas paramétricas $v = cte$ son traslaciones de la curva C por un vector proporcional a e_0, y las curvas paramétricas $u = cte$ son las generatrices del cilindro.

5.8 Conos: Dados en $\mathbb{R}^3$ una curva C y un punto P_0, se llama *cono* con *vértice* en P_0 y de *curva directriz* C, a la superficie que es unión de la familia de rectas que se obtienen al proyectar desde P_0 los puntos de C. Esas rectas son las generatrices del cono. Para esta superficie reglada, el vector que se pone en cada punto de la curva es el que va desde P_0 hasta dicho punto.

(a) Dada una parametrización regular $\sigma = \sigma(u)$ de la curva C, obténgase una parametrización del cono.

(b) ¿Qué relación debe existir entre el punto P_0 y la curva C para que la parametrización obtenida sea regular?

5.9 Desarrollables tangenciales: Se llama *desarrollable tangencial* de una curva C a la superficie unión de las rectas tangentes a C. Para esta superficie reglada, sobre cada punto de la curva se considera su vector tangente.

Dada una parametrización regular $\sigma = \sigma(u)$ de la curva C, obténgase una parametrización de su desarrollable tangencial y estúdiese su regularidad.

5.10 Conoides: Dados en $\mathbb{R}^3$ una curva C y una recta l, se llama *conoide* de *eje* la recta l y de *directriz* la curva C, a la superficie que es unión de la familia de rectas que se apoyan en C y cortan perpendicularmente a l.

Supóngase, para simplificar, que l es el eje z. Dada una parametrización regular $\sigma = \sigma(u)$ de la curva C, obténgase una parametrización del correspondiente conoide y estúdiese su regularidad.

5.11 Se llama *helicoide desarrollable* a una superficie que sea la desarrollable tangencial de una hélice circular.

Parametrícese la desarrollable tangencial de la hélice $\sigma(t) = (a\cos t\,, a\,\mathrm{sen}\,t\,, b\,t)$, $t \in \mathbb{R}$, siendo $a > 0$ y $b \neq 0$.

5.12 Se llama *helicoide recto* a una conoide cuya directriz es una hélice circular y cuyo eje es el eje de la hélice (véase el pie de página del problema III.5.4). Parametrícese el helicoide recto que define la hélice circular $\sigma(t) = (\cos t\,, \mathrm{sen}\,t\,, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Calcúlense sus planos tangentes y sus curvas paramétricas.

5.13 Pruébese que los cilindros, los conos y las desarrollables tangenciales son superficies regladas que tienen en común la siguiente propiedad: los planos tangentes a lo largo de una generatriz son paralelos (y por lo tanto son iguales, porque el plano tangente en un punto contiene a la generatriz que pasa por ese punto).

5.14 Pruébese que el plano tangente a lo largo de una generatriz de la desarrollable tangencial de una curva, coincide con el plano osculador de la curva en el punto de ésta por el que pasa la generatriz.

5.15 ¿Tienen todos los conoides la propiedad descrita en el problema 5.13 para otras superficies regladas?

5.16 Sea S el paraboloide hiperbólico de ecuación $x^2 - y^2 = z$. Pruébese, encontrando una parametrización apropiada, que S es una superficie reglada. (Esta superficie también se conoce como "paraboloide reglado", mientras que al paraboloide elíptico de ecuación $x^2 + y^2 = z$ se le llama "paraboloide no reglado".)

5.17 Sea S el hiperboloide de ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Pruébese, encontrando una parametrización apropiada, que S es una superficie reglada. (A esta superficie se le llama "hiperboloide reglado", o también "hiperboloide de una hoja" porque tiene una única componente conexa; el hiperboloide de ecuación $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ se dice no reglado, o también "hiperboloide de dos hojas" porque tiene dos componentes conexas.)