Capítulo V

Primera y segunda formas fundamentales

1. Preliminares

1.1 Sobre $\mathbb{R}^n$ se considerará su producto escalar usual, con el que es un espacio vectorial euclídeo. Si V es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, entonces la restricción a V del producto escalar de $\mathbb{R}^n$ define un producto escalar sobre V, y por tanto V tiene una estructura de espacio euclídeo inducida de modo natural por la de $\mathbb{R}^n$. Denotemos $m = \dim V$. Si $\{e_1, \dots, e_m\}$ es una base de V, entonces se define la "matriz del producto escalar" en dicha base como

$$A = \big(e_i \cdot e_j\big) \in M_m(\mathbb{R}) .$$

Se cumplen:

(i) la matriz cuadrada A es simétrica, $A^t = A$;
(ii) que la base $\{e_1, \dots, e_m\}$ sea ortogonal significa que la matriz A sea diagonal;
(iii) que la base $\{e_1, \dots, e_m\}$ sea ortonormal es equivalente a que sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} ;$$

(iv) dados vectores $v_1, v_2 \in V$, si conocemos sus coordenadas en la base $\{e_1, \dots, e_m\}$, entonces con la matriz A podemos calcular el producto escalar $v_1 \cdot v_2$:

$$v_1 = a_1e_1 + \cdots + a_me_m = (a_1, \dots, a_m) , \qquad v_2 = b_1e_1 + \cdots + b_me_m = (b_1, \dots, b_m) ,$$

$$\begin{aligned} v_1 \cdot v_2 &= \left(\sum_{i=1}^m a_ie_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^m b_je_j\right) = \sum_{i,j=1}^m a_i(e_i \cdot e_j)b_j \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_m \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} ; \end{aligned}$$

(v) si $\bar{A} = \big(\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j\big)$ es la matriz del producto escalar en una nueva base $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$ de V, entonces la relación que hay entre las matrices A y $\bar{A}$ es

$$\bar{A} = C^t A\, C\,,$$

donde $C = (c_{ij}) \in M_m(\mathbb{R})$ es la matriz de cambio de la base nueva a la antigua, esto es, la columna j-ésima de C son las coordenadas de $\bar{e}_j$ en la base $\{e_1, \dots, e_m\}$,

$$\bar{e}_j = \sum_{i=1}^{m} c_{ij} e_i\,, \qquad\qquad j = 1, \dots, m\,.$$

1.2 En este capítulo trabajaremos en $\mathbb{R}^3$, donde además tenemos definido el producto vectorial. Terminaremos esta sección inicial recordando la propiedad conocida como "identidad de Lagrange": para cualesquiera vectores $e, v, \bar{e}, \bar{v} \in \mathbb{R}^3$ se cumple

$$(e \times v) \cdot (\bar{e} \times \bar{v}) = \begin{vmatrix} e \cdot \bar{e} & v \cdot \bar{e} \\ e \cdot \bar{v} & v \cdot \bar{v} \end{vmatrix}.$$

En particular, dados $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^3$, si consideramos la matriz $A = (e_i \cdot e_j)$, entonces se cumple

$$|e_1 \times e_2| = \sqrt{\det A}\,.$$

2. Primera forma fundamental

2.1 Consideremos una parametrización regular $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ de clase C^m $(m \geq 2)$ de una superficie S de $\mathbb{R}^3$. Para cada punto $P = \varphi(u_0, v_0)$ de S, el espacio tangente a S en P es el subespacio vectorial $T_P S$ de dimensión 2 de $\mathbb{R}^3$, sobre el que tenemos la estructura euclídea inducida por la de $\mathbb{R}^3$; denotemos por g_P el producto escalar (métrica euclídea) sobre $T_P S$.

De la parametrización $\varphi = \varphi(u, v)$ obtenemos la base $\big\{\varphi_u(u_0, v_0), \varphi_v(u_0, v_0)\big\}$ del espacio tangente $T_P S$, y por tanto tenemos la matriz del producto escalar g_P en ella:

$$\begin{pmatrix} \varphi_u(u_0, v_0) \cdot \varphi_u(u_0, v_0) & \varphi_u(u_0, v_0) \cdot \varphi_v(u_0, v_0) \\ \varphi_v(u_0, v_0) \cdot \varphi_u(u_0, v_0) & \varphi_v(u_0, v_0) \cdot \varphi_v(u_0, v_0) \end{pmatrix}.$$

Es habitual denotar

$$g_{11} = \varphi_u \cdot \varphi_u\,, \qquad g_{12} = \varphi_u \cdot \varphi_v = \varphi_v \cdot \varphi_u = g_{21}\,, \qquad g_{22} = \varphi_v \cdot \varphi_v\,,$$

de modo que la anterior matriz se escribe como

$$\begin{pmatrix} g_{11}(u_0, v_0) & g_{12}(u_0, v_0) \\ g_{12}(u_0, v_0) & g_{22}(u_0, v_0) \end{pmatrix}.$$

Definición 2.2 Con la notación del punto 2.1, se define la *primera forma fundamental* de la superficie S como la familia de métricas euclídeas $g = \{g_P\}_{P \in S}$. Es claro que la primera forma fundamental de S no varía al hacer cambios de parámetros (pues por dichos cambios no varían los espacios tangentes en los puntos de S).

Podemos decir que $g = \{g_P\}_{P\in S}$ es una familia de métricas euclídeas sobre S que "varía de modo diferencable" en el siguiente sentido: haciendo abstracción del punto P de S, la expresión matricial de la primera forma fundamental g en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ es

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix},$$

donde $\{g_{ij}\}_{i,j}$ son funciones diferenciables (de clase C^{m-1}, $m-1 \geq 1$) sobre el abierto U donde varían los parámetros.

2.3 Para medir ángulos entre vectores tangentes a S en un mismo punto, o para medir longitudes de arcos de curvas que yacen sobre S, podemos ver los vectores y las curvas en $\mathbb{R}^3$ y proceder como en los primeros capítulos. La primera forma fundamental g permite hacer esos cálculos sin necesidad de salirse de los espacios tangentes a la superficie S: dados vectores tangentes a S en un punto $P = \varphi(u_0, v_0)$, pongamos $e_1, e_2 \in T_P S$, estos tendrán sus coordenadas en la base $\big\{\varphi_u(u_0, v_0), \varphi_v(u_0, v_0)\big\}$ de $T_P S$,

$$e_1 = \alpha\, \varphi_u(u_0, v_0) + \beta\, \varphi_v(u_0, v_0)\,, \qquad e_2 = \gamma\, \varphi_u(u_0, v_0) + \delta\, \varphi_v(u_0, v_0)\,,$$

y por lo tanto

$$e_1 \cdot e_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11}(u_0, v_0) & g_{12}(u_0, v_0) \\ g_{12}(u_0, v_0) & g_{22}(u_0, v_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}.$$

Si sobre S tenemos una curva $\sigma = \sigma(t)$, $t \in I$, expresada en la forma $\sigma(t) = \varphi\big(u(t), v(t)\big)$, entonces el vector tangente a la curva (que también es tangente a la superficie) es

$$\sigma' = u'\, \varphi_u + v'\, \varphi_v \;\equiv\; \big(u', v'\big)\,;$$

es decir, dado $t_0 \in I$, $\sigma'(t_0)$ es el vector tangente a S en el punto $\sigma(t_0) = \varphi\big(u(t_0), v(t_0)\big)$ cuyas coordenadas en la base $\big\{\varphi_u\big(u(t_0), v(t_0)\big), \varphi_v\big(u(t_0), v(t_0)\big)\big\}$ de $T_{\sigma(t_0)}S$ son $\big(u'(t_0), v'(t_0)\big)$. Haciendo abstracción del punto tenemos

$$\big|\sigma'\big|^2 \;=\; \sigma' \cdot \sigma' \;=\; \begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \;=\; g_{11}\big(u'\big)^2 + 2\, g_{12}\, u'\, v' + g_{22}\big(v'\big)^2\,;$$

por lo tanto, la longitud del arco de curva entre $t = t_0$ y $t = t_1$ ($t_0 < t_1$) es

$$\int_{t_0}^{t_1} \big|\sigma'\big|\, \mathrm{d}t \;=\; \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{11}\big(u'\big)^2 + 2\, g_{12}\, u'\, v' + g_{22}\big(v'\big)^2}\; \mathrm{d}t\,.$$

Ejemplo 2.4 Sea S la esfera de $\mathbb{R}^3$ centrada en el origen, de radio $r > 0$, a la que se le han quitado los polos,

$$S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = r^2\big\} - \{(0, 0, r), (0, 0, -r)\}\,.$$

Sabemos que una parametrización regular de S es

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times \left(\tfrac{-\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \phi) &\longmapsto (r\cos\theta\cos\phi\,, r\operatorname{sen}\theta\cos\phi\,, r\operatorname{sen}\phi)\,. \end{aligned}$$

Veamos cómo es la primera forma fundamental de S según esta parametrización. Tenemos

$$\varphi_\theta = (-r\operatorname{sen}\theta\cos\phi\,, r\cos\theta\cos\phi\,, 0)\,, \qquad \varphi_\phi = (-r\cos\theta\operatorname{sen}\phi\,, -r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,, r\cos\phi)\,,$$

y por lo tanto

$$g_{11} = \varphi_\theta \cdot \varphi_\theta = r^2\cos^2\phi\,, \qquad g_{12} = \varphi_\theta \cdot \varphi_\phi = 0\,,^1 \qquad g_{22} = \varphi_\phi \cdot \varphi_\phi = r^2\,;$$

luego

$$g = \begin{pmatrix} r^2\cos^2\phi & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Consideremos ahora una loxodroma de S que no es trivial (esto es, que no es meridiano ni paralelo; véase el problema IV.5.5). Una tal loxodroma tiene una ecuación de la forma

$$\theta = a\ln\left(\frac{1+\operatorname{sen}\phi}{1-\operatorname{sen}\phi}\right) + b\,, \qquad -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}\,,$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a \neq 0$. (Nótese que es $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\phi = 2a/\cos\phi$, con $\cos\phi > 0$ porque $-\pi/2 < \phi < \pi/2$; así que si $a > 0$, entonces θ crece cuando ϕ crece, y si $a < 0$, entonces θ decrece cuando ϕ crece.) Podemos parametrizar esta loxodroma del modo obvio (tomando ϕ como parámetro):

$$\begin{aligned} \sigma : I = \left(\tfrac{-\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \sigma(t) = \varphi\big(\theta(t), \phi(t)\big)\,, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \theta(t) &= a\ln\left(\tfrac{1+\operatorname{sen}t}{1-\operatorname{sen}t}\right) + b\,, \\ \phi(t) &= t\,. \end{aligned}$$

Como $g_{11} = r^2\cos^2 t$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = r^2$, $\theta' = 2a/\cos t$ y $\phi' = 1$ tenemos

$$\sigma' \cdot \sigma' \;=\; g_{11}(\theta')^2 + 2\,g_{12}\,\theta'\,\phi' + g_{22}(\phi')^2 \;=\; r^2\big(1+4a^2\big)$$

y por lo tanto $\left|\sigma'\right| = r\sqrt{1+4a^2}$. Ahora, dados valores $t_0, t_1 \in \left(\tfrac{-\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)$ con $t_0 < t_1$, la longitud del arco de loxodroma entre $\sigma(t_0)$ y $\sigma(t_1)$ es

$$\int_{t_0}^{t_1} \left|\sigma'\right| \mathrm{d}t \;=\; r\sqrt{1+4a^2}\int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \;=\; r\sqrt{1+4a^2}\,(t_1 - t_0)\,.$$

Ya veremos que el "aspecto" de la loxodroma es el siguiente (supuesto $a > 0$): parte desde el polo sur habiendo dado una infinidad de vueltas desenrollándose como una espiral, sube cortando los meridianos bajo ángulo constante, y se enrolla dando una infinidad de vueltas como una espiral alrededor del polo norte. A la vista de lo dicho puede parecer que la loxodroma entera tiene longitud infinita, pero no es así: dicha longitud es

$$\lim_{t_0 \to \frac{-\pi}{2},\; t_1 \to \frac{\pi}{2}} \int_{t_0}^{t_1} \left|\sigma'\right| \mathrm{d}t \;=\; \pi\, r\sqrt{1+4a^2}\,.$$

[1] La igualdad $\varphi_\theta \cdot \varphi_\phi = 0$ ya la conocíamos: los meridianos y los paralelos se cortan ortogonalmente (véase el problema IV.5.4).

3. Medida de áreas

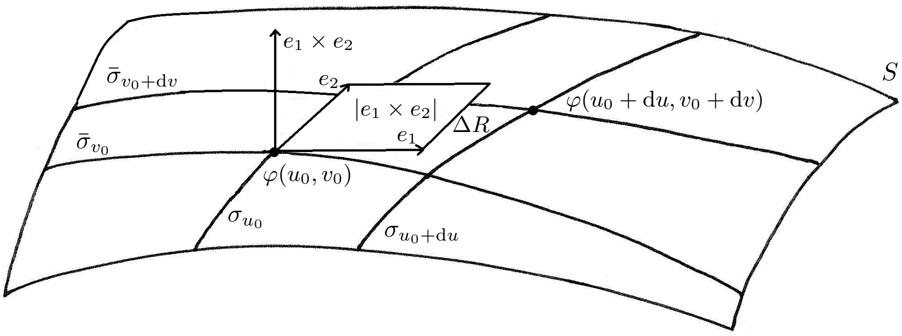
Consideremos fijada para toda esta sección una parametrización regular $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ de clase C^m $(m \geq 2)$ de una superficie S de $\mathbb{R}^3$. Veamos cómo podemos "medir áreas" sobre S utilizando su primera forma fundamental.

3.1 Supongamos en primer lugar que tenemos una región infinitesimal ΔR limitada por las curvas paramétricas que pasan por una punto $\varphi(u_0, v_0)$, y por otras dos curvas paramétricas infinitesimalmente próximas a las primeras:

$$\sigma_{u_0}(v) = \varphi(u_0, v)\,, \qquad \sigma_{u_0+\mathrm{d}u}(v) = \varphi(u_0 + \mathrm{d}u, v)\,,$$

$$\bar{\sigma}_{v_0}(u) = \varphi(u, v_0)\,, \qquad \bar{\sigma}_{v_0+\mathrm{d}v}(v) = \varphi(u, v_0 + \mathrm{d}v)\,.$$

Tenemos la situación del siguiente dibujo:



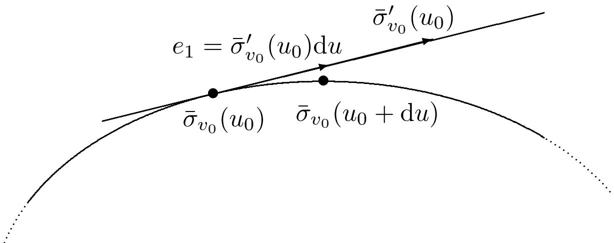
La recta tangente a la curva $\bar{\sigma}_{v_0}$ en el punto $\bar{\sigma}_{v_0}(u_0) = \varphi(u_0, v_0)$ es la que mejor aproxima a la curva en dicho punto: desarollando por Taylor en u_0 tenemos

$$\bar{\sigma}_{v_0}(u) \;=\; \bar{\sigma}_{v_0}(u_0) \;+\; \bar{\sigma}'_{v_0}(u_0)(u - u_0) \;+\; o\Big((u - u_0)^2\Big)\,,$$

y tomando $u = u_0 + \mathrm{d}u$ obtenemos

$$\bar{\sigma}_{v_0}(u_0 + \mathrm{d}u) \;=\; \bar{\sigma}_{v_0}(u_0) \;+\; \bar{\sigma}'_{v_0}(u_0)\mathrm{d}u \;+\; o\Big((\mathrm{d}u)^2\Big)\,. \tag{3.1}$$

Si $\mathrm{d}u$ es infinitesimalmente pequeño, entonces $\bar{\sigma}_{v_0}(u_0 + \mathrm{d}u)$ es un punto de la curva infinitesimalmente próximo a $\bar{\sigma}_{v_0}(u_0)$ y $o\Big((\mathrm{d}u)^2\Big)$ es un infinitésimo de orden 2 despreciable; por lo tanto la igualdad (3.1) dice que el punto $\bar{\sigma}_{v_0}(u_0)+\bar{\sigma}'_{v_0}(u_0)\mathrm{d}u$ de la recta tangente es una aproximación de primer orden del punto $\bar{\sigma}_{v_0}(u_0 + \mathrm{d}u)$ de la curva. En particular (véase la siguiente figura), el vector $e_1 = \bar{\sigma}'_{v_0}(u_0)\mathrm{d}u$ aproxima al arco de la curva $\bar{\sigma}_{v_0}$ desde $\bar{\sigma}_{v_0}(u_0)$ hasta $\bar{\sigma}_{v_0}(u_0 + \mathrm{d}u)$.



Análogamente, el vector $e_2 = \sigma'_{u_0}(v_0)\mathrm{d}v$ aproxima al arco de la curva σ_{u_0} comprendido entre los puntos $\sigma_{u_0}(v_0)$ y $\sigma_{u_0}(v_0 + \mathrm{d}v)$.

Como consecuencia de todo obtenemos que el paralelogramo del plano tangente a S en el punto $\varphi(u_0, v_0)$ determinado por los vectores e_1 y e_2 aproxima a la región ΔR, y podemos tomar el área del paralelogramo como aproximación del área de ΔR; teniendo en cuenta las igualdades

$$e_1 = \bar{\sigma}'_{v_0}(u_0)\mathrm{d}u = \varphi_u(u_0, v_0)\,\mathrm{d}u\,, \qquad e_2 = \sigma'_{u_0}(v_0)\mathrm{d}v = \varphi_v(u_0, v_0)\,\mathrm{d}v\,,$$

obtenemos

$$\text{área de } \Delta R = \big|e_1 \times e_2\big| = \big|\varphi_u(u_0, v_0) \times \varphi_v(u_0, v_0)\big|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

Todo lo dicho en el punto 3.1 justifica la siguiente definición:

Definición 3.2 Sea V un subconjunto del abierto U en el que varían los parámetros (u, v) que se aplica biyectivamente por la parametrización $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ sobre una región Ω de la superficie S. Se define el *área* de Ω como la integral doble

$$\iint_V |\varphi_u \times \varphi_v\big|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,,$$

cuando dicha integral exista.

Si consideramos la matriz de la primera forma fundamental de S,

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_u \cdot \varphi_u & \varphi_u \cdot \varphi_v \\ \varphi_v \cdot \varphi_u & \varphi_v \cdot \varphi_v \end{pmatrix},$$

entonces de la identidad de Lagrange descrita en el punto 1.2 obtenemos

$$\big|\varphi_u \times \varphi_v\big| = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

y llegamos a la conocida fórmula

$$\text{área de } \Omega = \iint_V \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

3.3 Debemos comprobar que la definición anterior es independiente de la parametrización $\varphi = \varphi(u, v)$ fijada para la superficie S. Supongamos que tenemos un cambio de coordenadas

$$\begin{array}{ccc} \bar{U} & \xrightarrow{(u,v)} & U \\ (\bar{u}, \bar{v}) & \longmapsto & \big(u(\bar{u}, \bar{v})\,, v(\bar{u}, \bar{v})\big)\,, \end{array}$$

que componemos con $\varphi = \varphi(u, v)$ para obtener la nueva parametrización de S (que denotaremos también φ)

$$\varphi(\bar{u}, \bar{v}) := \varphi\big(u(\bar{u}, \bar{v})\,, v(\bar{u}, \bar{v})\big)\,.$$

Si $\bar{V}$ es el conjunto de $\bar{U}$ que mediante el difeomorfismo $\bar{U} \xrightarrow{\sim} U$ se corresponde con el conjunto V de U (de modo que $\bar{V}$ se aplica biyectivamente por la parametrización $\varphi : \bar{U} \to \mathbb{R}^3$ sobre la región Ω), entonces debemos probar que se cumpla la igualdad

$$\iint_{\bar{V}} |\varphi_{\bar{u}} \times \varphi_{\bar{v}}\big|\,\mathrm{d}\bar{u}\,\mathrm{d}\bar{v} \;=\; \iint_V |\varphi_u \times \varphi_v\big|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,. \tag{3.2}$$

Hagamos un inciso para recordar la "fórmula de cambio de coordenadas en la integral": con la notación que estamos utilizando, para una función $f : U \to \mathbb{R}$, $f = f(u,v)$, se cumple la igualdad

$$\iint_V f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \;=\; \iint_{\bar V} f\big(u(\bar u,\bar v)\,,v(\bar u,\bar v)\big)\,|J|\,\mathrm{d}\bar u\,\mathrm{d}\bar v\,, \tag{3.3}$$

donde

$$J := \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \bar u} & \dfrac{\partial u}{\partial \bar v} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \bar u} & \dfrac{\partial v}{\partial \bar v} \end{vmatrix}$$

es el jacobiano del cambio de las coordenadas (u,v) a las coordenadas $(\bar u,\bar v)$, y $|J|$ es el valor absoluto de J. La igualdad (3.3) hay que entenderla en el sentido de que la integral de la izquierda existe si y sólo si existe la de la derecha, en cuyo caso ambas integrales coinciden.

Volviendo a la igualdad (3.2) que queremos demostrar, recordemos que en IV.1.7 vimos que se cumple $\varphi_{\bar u}\times\varphi_{\bar v} = J\,\big(\varphi_u\times\varphi_v\big)$; con detalle es

$$\varphi_{\bar u}(\bar u,\bar v)\times\varphi_{\bar v}(\bar u,\bar v) = J(\bar u,\bar v)\,\Big[\varphi_u\big(u(\bar u,\bar v)\,,v(\bar u,\bar v)\big)\times\varphi_v\big(u(\bar u,\bar v)\,,v(\bar u,\bar v)\big)\Big].$$

Si consideramos la función

$$f(u,v) = \big|\varphi_u(u,v)\times\varphi_v(u,v)\big|\,,$$

entonces

$$f\big(u(\bar u,\bar v)\,,v(\bar u,\bar v)\big) = \Big|\varphi_u\big(u(\bar u,\bar v)\,,v(\bar u,\bar v)\big)\times\varphi_v\big(u(\bar u,\bar v)\,,v(\bar u,\bar v)\big)\Big|$$

y por lo tanto

$$\big|\varphi_{\bar u}(\bar u,\bar v)\times\varphi_{\bar v}(\bar u,\bar v)\big| = \big|J(\bar u,\bar v)\big|\,f\big(u(\bar u,\bar v)\,,v(\bar u,\bar v)\big)\,.$$

Entonces, basta aplicar la fórmula (3.3) a esta función f para obtener la igualdad (3.2):

$$\begin{aligned}\iint_V \big|\varphi_u\times\varphi_v\big|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v &= \iint_V f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \iint_{\bar V} f\big(u(\bar u,\bar v)\,,v(\bar u,\bar v)\big)\,\big|J(\bar u,\bar v)\big|\,\mathrm{d}\bar u\,\mathrm{d}\bar v = \iint_{\bar V}\big|\varphi_{\bar u}\times\varphi_{\bar v}\big|\,\mathrm{d}\bar u\,\mathrm{d}\bar v\,.\end{aligned}$$

Ejemplo 3.4 Consideremos constantes $b > a > 0$ y sea S el toro cuya parametrización es (véase el problema IV.5.3)

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S \\ (\alpha,\beta) &\longmapsto \big((b + a\cos\beta)\cos\alpha\,, (b + a\cos\beta)\,\mathrm{sen}\,\alpha\,, a\,\mathrm{sen}\,\beta\big)\,.\end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha &= \big(-(b + a\cos\beta)\,\mathrm{sen}\,\alpha\,, (b + a\cos\beta)\cos\alpha\,, 0\big)\,,\\ \varphi_\beta &= (-a\,\mathrm{sen}\,\beta\,\mathrm{sen}\,\alpha\,, a\cos\beta\,\mathrm{sen}\,\alpha\,, a\cos\beta)\,,\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$g_{11} = \varphi_\alpha\cdot\varphi_\alpha = (b + a\cos\alpha)^2\,, \qquad g_{12} = \varphi_\alpha\cdot\varphi_\beta = 0\,, \qquad g_{22} = \varphi_\beta\cdot\varphi_\beta = a^2\,.$$

Entonces
$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} (b+a\cos\beta)^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}.$$
y obtenemos
$$|\varphi_\alpha \times \varphi_\beta| = |g_{ij}|^{1/2} = a(b+a\cos\beta)\,.$$
Como para el subconjunto $V = [0,2\pi)\times[0,2\pi)$ de $\mathbb{R}^2$ tenemos que $\varphi : V \to S$ es una biyección, obtenemos
$$\begin{aligned} \text{área de } S &= \iint_V a(b+a\cos\beta)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta = a\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}(b+a\cos\beta)\,\mathrm{d}\beta\right]\mathrm{d}\alpha \\ &= 2\pi a\int_0^{2\pi}(b+a\cos\beta)\,\mathrm{d}\beta \;= 2\pi a\Big[b\beta + a\operatorname{sen}\beta\Big]_0^{2\pi} = 4\pi^2 ab\,. \end{aligned}$$

Ejercicio 3.5 Calcúlese el área de una esfera de $\mathbb{R}^3$ de radio $r > 0$.

4. Derivada covariante en $\mathbb{R}^n$

4.1 Comencemos recordando la "derivada direccional" en $\mathbb{R}^n$. Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función definida sobre un abierto U de $\mathbb{R}^n$. Dados un vector $e \in \mathbb{R}^n$ y un punto $P \in U$, la "derivada direccional de la función f según el vector e en el punto P" se define como el escalar $D^e_P f$ dado por la fórmula
$$D^e_P f = \lim_{t\to 0}\frac{f(P+te)-f(P)}{t}\,,$$
cuando el anterior límite exista.

Cuando f es diferenciable (i.e., cuando todas las derivadas parciales de f existen), el escalar $D^e_P f$ existe para cualesquiera $P \in U$ y $e \in \mathbb{R}^n$. Concretamente, si $e = (a_1,\dots,a_n)$ entonces
$$D^e_P f = a_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(P) + \cdots + a_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(P)\,, \tag{4.1}$$
y haciendo abstracción del punto P de U tenemos la función
$$D^e f = a_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + a_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = \left(a_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)(f)\,.$$
Es claro entonces que $D^e f$ es de clase C^{m-1} si f es de clase C^m $(m \geq 1)$. Así, para cada vector $e = (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ tenemos el "operador diferencial" $D^e = a_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a_n\frac{\partial}{\partial x_n}$:
$$\begin{aligned} D^e : C^m(U) &\longrightarrow C^{m-1}(U) \\ f &\longmapsto D^e f = a_1\tfrac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + a_n\tfrac{\partial f}{\partial x_n}\,. \end{aligned}$$

4.2 Veamos que, efectivamente, se cumple la igualdad (4.1). Si consideramos un segmento de recta dentro de U que pasa por P con la dirección de e,
$$\begin{aligned} \sigma : I = (-\varepsilon,\varepsilon) &\longrightarrow U \\ t &\longmapsto P + te \end{aligned}$$

para algún $\varepsilon > 0$, entonces, por definición de derivada direccional se cumple $D^e_P f = \big(f\circ\sigma\big)'(0)$. Si escribimos $P = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y $e = (a_1, \ldots, a_n)$ tenemos

$$\sigma(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big) \qquad \text{con} \quad x_i(t) = \alpha_i + ta_i\,, \quad i = 1, \ldots, n\,,$$

y si denotamos $F(t) = \big(f\circ\sigma\big)(t)$ obtenemos

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\sigma(t))\, x_1'(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\sigma(t))\, x_n'(t) = a_1\, \frac{\partial f}{\partial x_1}(\sigma(t)) + \cdots + a_n\, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\sigma(t))\,.$$

Por lo tanto

$$D^e_P f = F'(0) = a_1\, \frac{\partial f}{\partial x_1}(\sigma(0)) + \cdots + a_n\, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\sigma(0)) = a_1\, \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) + \cdots + a_n\, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P)\,,$$

que es lo que queríamos ver.

Ejemplo 4.3 Para el vector $e_i = (0, \ldots, \overset{\overset{i}{\downarrow}}{1}, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$, el operador D^{e_i} es justamente la derivada parcial $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$.

Propiedades 4.4 Es inmediato comprobar que las derivadas direccionales cumplen las tres propiedades que tiene toda "derivación" (= "manera de derivar"): fijados un punto $P \in \mathbb{R}^n$ y un vector $e \in \mathbb{R}^n$, si f y g son funciones diferenciables en un entorno abierto de P, entonces se cumplen:

(i) $D^e_P f = 0$ si f es constante en algún entorno de P;

(ii) $D^e_P(f + g) = D^e_P f + D^e_P g$;

(iii) $D^e_P(fg) = g(P)\big(D^e_P f\big) + f(P)\big(D^e_P g\big)$ (regla de Leibniz para la derivada de un producto).

Además, si tenemos otro vector $\bar{e} \in \mathbb{R}^n$ y escalares $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces se cumple:

(iv) $D^{\lambda e + \mu \bar{e}}_P f = \lambda\big(D^e_P f\big) + \mu\big(D^{\bar{e}}_P f\big)$.

Las demostraciones son comprobaciones que se dejan como ejercicio.

4.5 Hemos visto que para obtener la derivada direccional de una función f según un vector e en el punto P, debemos "derivar" f sobre la recta que pasa por P con la dirección de e. Una observación importante es que podemos sustituir dicha recta por cualquier otra curva que pase por P y cuyo vector tangente en P sea e. Concretamente tenemos:

Lema 4.6 *Si $\sigma : I \to \mathbb{R}^n$, $\sigma = \sigma(t)$, es una curva diferenciable tal que para algún $t_0 \in I$ se cumplen $\sigma(t_0) = P$ y $\sigma'(t_0) = e$, entonces*

$$D^e_P f = \big(f\circ\sigma\big)'(t_0)\,.$$

Demostración. Se argumenta exactamente igual a como se ha hecho en el punto 4.2 para el caso particular $\sigma(t) = P + te$, en el que $t_0 = 0$. ∎

Definición 4.7 Un *campo de vectores* sobre un abierto U de $\mathbb{R}^n$ consiste en dar para cada punto $P \in U$ un vector $D_P \in \mathbb{R}^n$; denotaremos un tal campo por $D = \{D_P\}_{P \in U}$. Las coordenadas del vector D_P dependerán del punto P, de modo que existen funciones $f_1, \ldots, f_n : U \to \mathbb{R}$ tales que $D_P = \big(f_1(P), \ldots, f_n(P)\big)$; escribiremos entonces $D = (f_1, \ldots, f_n)$, y diremos que $f_1, \ldots, f_n$ son las funciones coordenadas de D. El campo de vectores D se dice que es diferenciable (de clase C^m) cuando sus funciones coordenadas son diferenciables (de clase C^m).

Un campo D sobre el abierto U no es más que una aplicación

$$\begin{aligned} D = (f_1, \ldots, f_n) : U &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ P &\longmapsto \big(f_1(P), \ldots, f_n(P)\big) \,, \end{aligned}$$

pero entendiendo que para cada punto $P \in U$, $D_P = D(P)$ es un vector en P.

4.8 Fijados un vector e y un punto P, la derivada direccional D_P^e determina una manera de derivar funciones definidas en un entorno del punto. Veamos ahora que, de manera análoga, un campo de vectores D sobre un abierto U nos dará un modo de derivar funciones definidas sobre todo el abierto U. Para cada función diferenciable $g : U \to \mathbb{R}$ definimos la función $Dg : U \to \mathbb{R}$ como

$$Dg(P) := D_P^{D_P} g \,, \qquad P \in U \,.$$

Si es $D = (f_1, \ldots, f_n)$, entonces aplicando la fórmula (4.1) obtenemos que para todo $P \in U$ se cumple

$$Dg(P) = f_1(P)\,\frac{\partial g}{\partial x_1}(P) + \cdots + f_n(P)\,\frac{\partial g}{\partial x_n}(P) \,,$$

y haciendo abstracción del punto P tenemos

$$Dg = f_1\,\frac{\partial g}{\partial x_1} + \cdots + f_n\,\frac{\partial g}{\partial x_n} = \left(f_1\,\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_n\,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)(g) \,.$$

Como consecuencia se sigue que si $D = (f_1, \ldots, f_n)$ es un campo de clase C^m sobre U y $g \in C^r(U)$ con $1 \le r \le m+1$, entonces $Dg \in C^{r-1}(U)$.

Ejercicio 4.9 Hemos visto en el punto anterior que un campo de vectores $D = (f_1, \ldots, f_n)$ sobre el abierto U define sobre dicho abierto un operador diferencial que denotaremos con la misma letra:

$$D = f_1\,\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_n\,\frac{\partial}{\partial x_n} \,.$$

Pruébese que el operador determina a su vez al campo; es decir, si conocemos el operador diferencial, entonces podemos obtener las funciones coordenadas $f_1, \ldots, f_n$ del campo de vectores.

Ejemplo 4.10 El operador que define el campo de vectores sobre U que es constantemente igual a un vector e de $\mathbb{R}^n$ es justamente D^e (véase el final del punto 4.1).

Ejercicio 4.11 Dado un abierto U de $\mathbb{R}^n$, para cada $m \ge 0$ denotemos

$$\mathcal{D}^m(U) := \{\text{campos de vectores de clase } C^m \text{ sobre } U\} \,.$$

Compruébese que el operador que define un campo $D \in \mathcal{D}^m(U)$ es una "derivación". Es decir, para cada $r \in \{1, \ldots, m+1\}$ la aplicación $D : C^r(U) \to C^{r-1}(U)$, $f \mapsto Df$, cumple las siguientes propiedades:

(i) $Df = 0$ si f es localmente constante;

(ii) $D(f+g) = Df + Dg$;

(iii) (regla de Leibniz) $D(fg) = (Df)\,g + f\,(Dg)$.

Ejercicio 4.12 Compruébense las afirmaciones siguientes. Dado un abierto U de $\mathbb{R}^n$, en el conjunto $\mathcal{D}^m(U)$ hay una suma natural que lo dota de estructura de grupo abeliano:

$$D = (f_1, \dots, f_n)\,,\ \bar{D} = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n) \in \mathcal{D}^m(U) \quad \Rightarrow \quad D + \bar{D} := (f_1 + \bar{f}_1, \dots, f_n + \bar{f}_n) \in \mathcal{D}^m(U)\,.$$

Además, el producto por funciones de clase C^m,

$$f \in C^m(U)\,, \quad D = (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{D}^m(U) \qquad \Rightarrow \qquad fD := (ff_1, \dots, ff_n) \in \mathcal{D}^m(U)\,,$$

dota al grupo abeliano $\mathcal{D}^m(U)$ de estructura de $C^m(U)$-módulo.

Definición 4.13 Fijemos un campo de vectores D sobre un abierto U de $\mathbb{R}^n$. Para cada campo diferenciable de vectores $\bar{D} = (f_1, \dots, f_n)$ sobre U, se define la *derivada covariante* de $\bar{D}$ respecto de D como el campo de vectores $D^\nabla \bar{D}$ dado por la igualdad

$$D^\nabla \bar{D} := (Df_1, \dots, Df_n)\,.$$

Si D es de clase C^m y $\bar{D}$ es de clase C^r con $r \in \{1, \dots, m+1\}$, entonces $D^\nabla \bar{D} \in C^{r-1}(U)$.

Propiedades 4.14 Dados m y $r \in \{1, \dots, m+1\}$, la derivada covariante define la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}^m(U) \times \mathcal{D}^r(U) & \xrightarrow{\nabla} & \mathcal{D}^{r-1}(U) \\ (D, \bar{D}) & \longmapsto & D^\nabla \bar{D}\,, \end{array}$$

para la cual tenemos: dados campos de vectores $D, D_1, D_2 \in \mathcal{D}^m(U)$, $\bar{D}, \bar{D}_1, \bar{D}_2 \in \mathcal{D}^r(U)$, y dadas funciones $f \in C^m(U)$ y $\bar{f} \in C^r(U)$, se cumplen

(a) $D^\nabla(\bar{D}_1 + \bar{D}_2) = D^\nabla \bar{D}_1 + D^\nabla \bar{D}_2$,

(b) $(D_1 + D_2)^\nabla \bar{D} = D_1^\nabla \bar{D} + D_2^\nabla \bar{D}$,

(c) $D^\nabla(\bar{f}\bar{D}) = (D\bar{f})\bar{D} + \bar{f}(D^\nabla \bar{D})$,

(d) $(fD)^\nabla \bar{D} = f(D^\nabla \bar{D})$.

La demostración de estas propiedades es directa a partir de la definición.

4.15 El producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$ podemos trasladarlo de modo natural a los campos de vectores: dados campos $D = (f_1, \dots, f_n)$, $\bar{D} = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n)$ sobre un abierto U de $\mathbb{R}^n$, el producto $D \cdot \bar{D}$ es la función sobre U que está definida por la fórmula

$$D \cdot \bar{D} := f_1\bar{f}_1 + \cdots + f_n\bar{f}_n = \sum_{i=1}^n f_i\bar{f}_i\,.$$

Tenemos de este modo una aplicación

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}^m(U) \times \mathcal{D}^m(U) & \longrightarrow & C^m(U) \\ (D, \bar{D}) & \longmapsto & D \cdot \bar{D} \end{array}$$

que hereda las propiedades del producto escalar de $\mathbb{R}^n$: es $C^m(U)$-bilineal, simétrica y "definida positiva" ($D \cdot D \geq 0$, y si $D \cdot D = 0$ entonces debe ser $D = 0$).

Lema 4.16 *Dados campos de vectores D, D_1, D_2 sobre un abierto U de $\mathbb{R}^n$, siendo D_1 y D_2 diferenciables, se cumple*

$$D(D_1 \cdot D_2) = (D^{\nabla} D_1) \cdot D_2 + D_1 \cdot (D^{\nabla} D_2)\,.$$

Demostración. Sean $D_1 = (f_1, \dots, f_n)$ y $D_2 = (g_1, \dots, g_n)$ con $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n$ funciones diferenciables sobre U. Tenemos

$$\begin{aligned} D(D_1 \cdot D_2) &= D\left(\sum_{i=1}^{n} f_i g_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(f_i g_i) = \sum_{i=1}^{n} \Big[(Df_i) g_i + f_i (Dg_i)\Big] \\ &= \sum_{i=1}^{n} (Df_i) g_i + \sum_{i=1}^{n} f_i (Dg_i) = (D^{\nabla} D_1) \cdot D_2 + D_1 \cdot (D^{\nabla} D_2)\,, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. ∎

La versión para la derivada covariante de la propiedad enunciada en el Lema 4.6 para la derivada direccional es:

Lema 4.17 *Sean $D, \bar{D}$ campos de vectores sobre un abierto U de $\mathbb{R}^n$, con $\bar{D}$ diferenciable. Dado un punto $P \in U$, el vector $(D^{\nabla}\bar{D})_P$ depende solamente del valor del campo $\bar{D}$ a lo largo de una curva diferenciable $\sigma = \sigma(t)$ en U que pase por el punto P y cuyo vector tangente en P sea D_P.*

Demostración. Sea $\bar{D} = (f_1, \dots, f_n)$ y denotemos $e = D_P$. Por una parte, por definición tenemos (véase el punto 4.8)

$$(D^{\nabla}\bar{D})_P = \big(Df_1(P), \dots, Df_n(P)\big) = \big(D^e_P f_1, \dots, D^e_P f_n\big)\,.$$

Por otra parte, si $\sigma : I \to U$, $\sigma = \sigma(t)$, es una curva diferenciable tal que para algún $t_0 \in I$ se cumplen $\sigma(t_0) = P$ y $\sigma'(t_0) = e$, entonces del lema 4.6 obtenemos

$$D^e_P f_i = \big(f_i \circ \sigma\big)'(t_0)\,, \qquad i \in \{1, \dots, n\}\,.$$

De todo se sigue que para calcular el vector $(D^{\nabla}\bar{D})_P$ basta conocer el valor de las funciones $f_1, \dots, f_n$ sobre los puntos de la curva σ. ∎

Observación **4.18** Cuando sobre un abierto U de $\mathbb{R}^n$ consideramos una función diferenciable f, hemos partido de las derivadas direccionales en cada punto para llegar a la derivada de f respecto de un campo de vectores D sobre U (véase de nuevo el punto 4.8).

Podríamos haber hecho lo mismo para llegar a la noción de derivada covariante de un campo diferenciable de vectores $\bar{D} = (f_1, \dots, f_n)$ sobre U: dados un punto $P \in U$ y un vector $e \in \mathbb{R}^n$, la "derivada covariante del campo $\bar{D}$ según e en P" es el vector $e^{\nabla_P}\bar{D} \in \mathbb{R}^n$ definido como

$$e^{\nabla_P}\bar{D} := \big(D^e_P f_1, \dots, D^e_P f_n\big)\,.$$

Ahora, la "derivada covariante de $\bar{D}$ respecto del campo D" es el campo de vectores $D^{\nabla}\bar{D}$ dado punto a punto por las igualdades

$$(D^{\nabla}\bar{D})_P = D_P^{\nabla_P}\bar{D}\,, \qquad P \in U.$$

5. Derivada covariante sobre una superficie de $\mathbb{R}^3$

Para llegar a la noción de "derivada covariante" sobre una superficie S de $\mathbb{R}^3$ siguiendo los pasos dados para el caso de $\mathbb{R}^n$, debemos comenzar definiendo la "derivada direccional de una función diferenciable sobre S en un punto P de S y según un vector tangente a S en P". Aquí nos encontramos con el problema de que carecemos de noción de "función diferenciable" sobre S. Para solucionarlo consideraremos superficies parametrizadas, y diremos que una función definida sobre ella es diferenciable cuando al expresarla en función de los parámetros resulte ser diferenciable. Fijemos entonces para toda la sección una parametrización regular $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$, $\varphi = \varphi(u,v)$, de clase C^m de una superficie $S = \operatorname{Im}\varphi$.

5.1 Sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función sobre S. Para cada punto $P = \varphi(u,v) \in S$, el valor $f(P) \in \mathbb{R}$ depende de P y por tanto depende de los parámetros (u,v): $f(P) = f(u,v)$. Con todo rigor: al componer f con la parametrización $\varphi = \varphi(u,v)$ obtenemos una función sobre el abierto U de los parámetros, que también denotaremos con la misma letra f,

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi}\ S \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & f(u\,,v)\,. \end{array}$$

Definición 5.2 Con la notación anterior, diremos que la función $f : S \to \mathbb{R}$ es *diferenciable* (de clase C^r, $1 \leq r \leq m$), si $f = f(u,v)$ es una función diferenciable (de clase C^r) de los parámetros (u,v), es decir, si la composición $f\circ\varphi : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el sentido usual ($f\circ\varphi \in C^r(U)$).

5.3 La definición 5.2 no depende de la parametrización fijada para S: dado un cambio de coordenadas de clase C^m,

$$\begin{array}{ccc} \bar{U} & \xrightarrow{(u,v)} & U \\ (\bar{u},\bar{v}) & \longmapsto & \big(u(\bar{u},\bar{v})\,,v(\bar{u},\bar{v})\big)\,, \end{array}$$

es claro que $U \xrightarrow{f\circ\varphi} \mathbb{R}$ es diferenciable (de clase C^r) si y sólo si su composición con el difeomorfismo que define dicho cambio,

$$\begin{array}{ccc} \bar{U} & \xrightarrow{\sim}\ U \xrightarrow{\varphi}\ S \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (\bar{u},\bar{v}) & \longmapsto & f(\bar{u}\,,\bar{v})\,, \end{array}$$

es diferenciable (de clase C^r); es decir, $f = f(u,v)$ es diferenciable respecto de los parámetros (u,v) si y sólo si $f = f(\bar{u},\bar{v})$ es diferenciable respecto de los parámetros $(\bar{u},\bar{v})$.

La definición de función diferenciable sobre un abierto de la superficie S es la obvia:

Definición 5.4 Una función $f : W \to \mathbb{R}$ definida sobre un abierto W de S se dice que es *diferenciable* si la composición

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(W) & \xrightarrow{\varphi}\ W \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & f(u\,,v) \end{array}$$

es una función diferenciable sobre el abierto $\varphi^{-1}(W)$ de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 5.5 Supongamos que S es el "hemisferio sur" de la esfera de $\mathbb{R}^3$ cuya ecuación es $x^2+y^2+z^2=1$,

$$S=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+y^2+z^2=1\,,\ z<0\big\}.$$

Una parametrización de S es

$$\begin{array}{rcl} U=\big\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\,:\,u^2+v^2<1\big\} & \xrightarrow{\ \varphi\ } & S \\ (u,v) & \longmapsto & \big(u,v,-\sqrt{1-u^2-v^2}\,\big)\,. \end{array}$$

Consideremos sobre S la función

$$\begin{array}{rcl} f:S & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & f(P)=\big(\text{distancia de } P \text{ al "polo norte"}\big)^2, \end{array}$$

donde "polo norte" $=(0,0,1)$. Dado $P=(x,y,z)\in S$ tenemos

$$f(P)=|(x,y,z-1)|^2=(x,y,z-1)\cdot(x,y,z-1)=x^2+y^2+z^2+1-2z=2(1-z)\,.$$

Expresemos f en función de los parámetros (u,v):

$$\begin{array}{rcl} f:S & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P=\varphi(u,v)=\big(u,v,-\sqrt{1-u^2-v^2}\big) & \longmapsto & 2\big(1+\sqrt{1-u^2-v^2}\,\big)\,; \end{array}$$

es decir, $f(u,v)=2\big(1+\sqrt{1-u^2-v^2}\,\big)$. Por tanto f es una función diferenciable sobre S.

5.6 Volvamos a la superficie parametrizada S fijada al comienzo de esta sección. Consideremos un punto $P=\varphi(u_0,v_0)\in S$ y un vector e tangente a S en P, $e\in T_PS\subseteq\mathbb{R}^3$. La propiedad descrita en el lema 4.6 para la derivada direccional en $\mathbb{R}^n$, y la existencia de curvas sobre S que nos dan las direcciones tangentes a S en P (véase el lema IV.4.4), sugieren cómo definir la derivada direccional sobre S.

Definición 5.7 Con la notación del punto 5.6, sea $f:W\to\mathbb{R}$ una función diferenciable sobre un entorno abierto W de P en la superficie S. Se define la "derivada direccional de f según el vector e en el punto P" como el escalar $D_P^e f$ dado por la fórmula

$$D_P^e f=(f\circ\sigma)'(t_0)\,,$$

donde $\sigma:I\to S$, $\sigma(t)=\varphi\big(u(t),v(t)\big)$, es una curva diferenciable sobre S y $t_0\in I$ es tal que $\sigma(t_0)=P$ y $\sigma'(t_0)=e$ (esto es, σ es una curva pasa por P cuyo vector tangente en P es e).

5.8 Veamos que la definición 5.7 no depende de la curva σ elegida. Recordemos que una base del espacio vectorial T_PS es $\big\{\varphi_u(u_0,v_0),\varphi_v(u_0,v_0)\big\}$, de modo que tenemos las coordenadas (a,b) del vector e es dicha base. Por una parte

$$a\,\varphi_u(u_0,v_0)+b\,\varphi_v(u_0,v_0)\;=\;e\;=\;\sigma'(t_0)\;=\;u'(t_0)\,\varphi_u(u_0,v_0)+v'(t_0)\,\varphi_v(u_0,v_0)\,,$$

es decir, $\big(u'(t_0),v'(t_0)\big)=(a,b)$. Por otra parte

$$(f\circ\sigma)'(t)=\frac{\mathrm{d}f\big(u(t),v(t)\big)}{\mathrm{d}t}=u'(t)\,f_u\big(u(t),v(t)\big)+v'(t)\,f_v\big(u(t),v(t)\big)\,.$$

Por lo tanto, valorando en $t = t_0$ obtenemos

$$D_P^e f = a\, f_u(P) + b\, f_v(P)\,, \tag{5.1}$$

con lo que la mencionada independencia queda probada.

5.9 Veamos ahora que el escalar $D_P^e f$ tampoco depende de la parametrización $\varphi = \varphi(u, v)$ fijada. Si consideramos un cambio de coordenadas

$$\begin{array}{ccc} \bar{U} & \xrightarrow{(u,v)} & U \\ (\bar{u}, \bar{v}) & \longmapsto & \big(u(\bar{u}, \bar{v})\,, v(\bar{u}, \bar{v})\big)\,, \end{array} \qquad (\bar{u}_0, \bar{v}_0) \longmapsto (u_0, v_0)\,,$$

entonces tenemos otra parametrización $\varphi(\bar{u}, \bar{v}) := \varphi\big(u(\bar{u}, \bar{v})\,, v(\bar{u}, \bar{v})\big)$ de la superficie, de la que obtenemos una nueva base $\big\{\varphi_{\bar{u}}(\bar{u}_0, \bar{v}_0), \varphi_{\bar{v}}(\bar{u}_0, \bar{v}_0)\big\}$ del espacio tangente $T_P S$. Como sabemos, la matriz de cambio de esta nueva base a la antigua es la matriz jacobiana del cambio de coordenadas:

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \bar{u}}(\bar{u}_0, \bar{v}_0) & \dfrac{\partial u}{\partial \bar{v}}(\bar{u}_0, \bar{v}_0) \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial \bar{u}}(\bar{u}_0, \bar{v}_0) & \dfrac{\partial v}{\partial \bar{v}}(\bar{u}_0, \bar{v}_0) \end{pmatrix};$$

en particular, si $(\bar{a}, \bar{b})$ son las coordenadas del vector fijado $e \in T_P S$ en la nueva base, entonces debe cumplirse

$$A \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad \text{es decir} \qquad \left.\begin{array}{r} a = \bar{a}\, \dfrac{\partial u}{\partial \bar{u}}(\bar{u}_0, \bar{v}_0) + \bar{b}\, \dfrac{\partial u}{\partial \bar{v}}(\bar{u}_0, \bar{v}_0) \\[2ex] b = \bar{a}\, \dfrac{\partial v}{\partial \bar{u}}(\bar{u}_0, \bar{v}_0) + \bar{b}\, \dfrac{\partial v}{\partial \bar{v}}(\bar{u}_0, \bar{v}_0) \end{array}\right\}. \tag{5.2}$$

Según la igualdad (5.1) obtenida en el punto 5.8, debemos probar que se cumple

$$\bar{a}\, f_{\bar{u}}(P) + \bar{b}\, f_{\bar{v}}(P) = a\, f_u(P) + b\, f_v(P)\,,$$

para lo que basta aplicar la regla de la cadena y tener en cuenta las igualdades (5.2):

$$\begin{aligned} \bar{a}\, f_{\bar{u}}(P) + \bar{b}\, f_{\bar{v}}(P) \;&=\; \bar{a}\left(f_u(P)\, \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}(\bar{u}_0, \bar{v}_0) + f_v(P)\, \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}(\bar{u}_0, \bar{v}_0)\right) \\ &\qquad + \bar{b}\left(f_u(P)\, \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}(\bar{u}_0, \bar{v}_0) + f_v(P)\, \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}(\bar{u}_0, \bar{v}_0)\right) \\ &=\; \left(\bar{a}\, \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}(\bar{u}_0, \bar{v}_0) + \bar{b}\, \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}(\bar{u}_0, \bar{v}_0)\right) f_u(P) \\ &\qquad + \left(\bar{a}\, \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}(\bar{u}_0, \bar{v}_0) + \bar{b}\, \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}(\bar{u}_0, \bar{v}_0)\right) f_v(P) \;=\; a\, f_u(P) + b\, f_v(P)\,. \end{aligned}$$

Nota **5.10** La propiedad descrita en el lema 4.6 para la derivada direccional en $\mathbb{R}^n$, es para la superficie S consecuencia directa de la definición dada en 5.7: *la derivada direccional $D_P^e f$ sólo depende del valor de la función f a lo largo de una curva que yace sobre S, que pasa por P y cuyo vector tangente en P es e.*

Ejercicio 5.11 Fijados $P \in S$ y $e \in T_P S$, la derivada direccional D_P^e es una derivación: dadas funciones diferenciables f y g en un entorno abierto de P en S, se cumplen:

(i) $D_P^e f = 0$ si f es constante en algún entorno de P;

(ii) $D_P^e(f+g) = D_P^e f + D_P^e g$;

(iii) (regla de Leibniz) $D_P^e(fg) = g(P)\big(D_P^e f\big) + f(P)\big(D_P^e g\big)$.

Además, dados $\bar{e} \in T_P S$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tenemos

(iv) $D_P^{\lambda e + \mu \bar{e}} f = \lambda\big(D_P^e f\big) + \mu\big(D_P^{\bar{e}} f\big)$.

Definición 5.12 Un *campo de vectores* D sobre la superficie S consiste en dar para cada punto $P \in S$ un vector $D_P \in \mathbb{R}^3$; denotaremos $D = \{D_P\}_{P \in S}$. Existen funciones f_1, f_2, f_3 sobre S de modo que para cada $P \in S$ es $D_P = \big(f_1(P), f_2(P), f_3(P)\big)$; de esta manera denotaremos también $D = (f_1, f_2, f_3)$. El campo D se dice que es diferenciable (de clase C^r) si f_1, f_2, f_3 son funciones diferenciables (de clase C^r) sobre S.

Nótese que, dado $P \in S$, D_P es un vector de $\mathbb{R}^3$ en el punto P que puede no ser tangente a la superficie, es decir, puede ocurrir que $D_P \notin T_P S$.

Ejemplo 5.13 Sobre S tenemos el campo diferenciable $D = \varphi_u \times \varphi_v$ que es "normal" a S: dado $P \in S$, $D_P = \varphi_u(P) \times \varphi_v(P) \in \big(T_P S\big)^{\perp} \subseteq \mathbb{R}^3$, y como $D_P \neq 0$ debe ser $D_P \notin T_P S$.

Definición 5.14 Un *campo tangente* a la superficie S es un campo de vectores D sobre S que en cada punto es tangente a S, esto es, tal que $D_P \in T_P S$ para todo $P \in S$.

Ejemplo 5.15 Los campos diferenciables sobre S que definen las derivadas parciales de la parametrización, $D = \varphi_u$ y $\bar{D} = \varphi_v$, son campos tangentes sobre S.

Ejercicio 5.16 Los campos de vectores sobre S se suman y se multiplican por funciones definidas sobre S del modo evidente (punto a punto), y dichas operaciones tienen las propiedades habituales. Además tenemos:

(a) si se suman dos campos tangentes a S, entonces se obtiene un campo tangente a S;

(b) si se multiplica un campo tangente a S por una función definida sobre S, entonces se obtiene un campo tangente a S;

(c) si se suman dos campos diferenciable sobre S, entonces se obtiene un campo diferenciable sobre S;

(d) si se multiplica un campo diferenciable sobre S por una función diferenciable sobre S, entonces se obtiene un campo diferenciable sobre S.

5.17 Fijemos un campo tangente D sobre la superficie S y veamos cómo expresarlo respecto de la parametrización $\varphi = \varphi(u, v)$ que estamos considerando.

Para cada $P \in S$, las coordenadas de $D_P \in T_P S$ en la base $\big\{\varphi_u(P), \varphi_v(P)\big\}$ de $T_P S$ son escalares $h_1(P), h_2(P) \in \mathbb{R}$ que dependen unívocamente del punto P; por lo tanto existen funciones únicas $h_1, h_2 : S \to \mathbb{R}$ tales que para todo P es $D_P = h_1(P)\,\varphi_u(P) + h_2(P)\,\varphi_v(P)$. Haciendo abstracción del punto P podemos escribir

$$D = h_1\,\varphi_u + h_2\,\varphi_v\,. \tag{5.3}$$

Lo anterior prueba que los campos de vectores φ_u y φ_v son "base" de campos tangentes sobre la superficie S, y la igualdad (5.3) podemos resumirla diciendo que la expresión del campo tangente D en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ es $D = (h_1, h_2)$.

Ejercicio 5.18 Para un campo tangente $D = h_1\,\varphi_u + h_2\,\varphi_v$ sobre S pruébese: D es diferenciable (de clase C^r) si y sólo si h_1 y h_2 son funciones diferenciables (de clase C^r) sobre S.

5.19 Un campo tangente D sobre la superficie S define una manera de derivar funciones sobre S: para cada función diferenciable $f : S \to \mathbb{R}$ definimos $Df : S \to \mathbb{R}$ por la igualdad

$$Df(P) := D_P^{D_P} f\,, \qquad P \in S\,.$$

Ya sabemos que Df es una función bien definida (porque para cada $P \in S$, el escalar $D_P^{D_P} f$ está determinado independientemente de la parametrización de S). Veamos cómo expresar dicha función respecto de la parametrización $\varphi = \varphi(u, v)$ de S, para lo cual utilizaremos la expresión de f en función de los parámetros, $f = f(u, v)$. Será $D = h_1\varphi_u + h_2\varphi_v$ para ciertas funcionas h_1, h_2 sobre S, y teniendo en cuenta la igualdad (5.1) obtenida de la definición de derivada direccional (véase el punto 5.8), dado $P \in S$ tenemos

$$Df(P) = D_P^{D_P} f = h_1(P)\, f_u(P) + h_2(P)\, f_v(P) = \big(h_1\, f_u + h_2\, f_v\big)(P)\,;$$

haciendo abstracción del punto obtenemos

$$Df = h_1\, f_u + h_2\, f_v = \left(h_1\,\frac{\partial}{\partial u} + h_2\,\frac{\partial}{\partial v}\right)(f)\,.$$

Como consecuencia, si el campo tangente D es de clase C^r (esto es, las funciones h_1 y h_2 son de clase C^r) y la función f es de clase C^{r+1}, entonces $Df : S \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^r.

5.20 Hemos visto en el punto anterior que un campo tangente diferenciable $D = (h_1, h_2)$ sobre S define un operador diferencial, que denotaremos con la misma letra:

$$D = h_1\,\frac{\partial}{\partial u} + h_2\,\frac{\partial}{\partial v}\,.$$

Nótese que el operador determina al campo, pues para las funciones $f_1(u, v) = u$ y $f_2(u, v) = v$ sobre S tenemos $Df_1 = h_1$ y $Df_2 = h_2$. Además, es fácil ver que dicho operador es una derivación: dadas funciones diferenciables f y g sobre S se cumplen:

(i) $Df = 0$ si f es localmente constante;

(ii) $D(f + g) = Df + Dg$;

(iii) (regla de Leibniz) $D(fg) = (Df)\,g + f\,(Dg)$.

Definición 5.21 Sea D un campo tangente sobre S y sea $D' = (f_1, f_2, f_3)$ un campo diferenciable de vectores sobre S (no necesariamente tangente). Se define la *derivada covariante* de D' respecto de D como el campo de vectores $D^\nabla D'$ sobre S dado por la igualdad

$$D^\nabla D' := (Df_1, Df_2, Df_3)\,.$$

Nótese que aunque D' fuera tangente a S, el campo $D^\nabla D'$ podría no ser tangente a S.

Ejemplo 5.22 El campo tangente básico $D = \varphi_u$ define el operador diferencial "parcial respecto del parámetro u" :

$$f : S \to \mathbb{R} \ \text{ diferenciable} \qquad \rightsquigarrow \qquad Df = \frac{\partial f}{\partial u} = f_u$$

(aquí es $(h_1, h_2) = (1, 0)$). Por este motivo, cuando este campo se piensa como operador suele denotarse $\frac{\partial}{\partial u}$, ó abreviadamente ∂_u: $\partial_u f = f_u$.

De este modo, para un campo diferenciable de vectores $D' = (f_1, f_2, f_3)$ sobre S (donde $f_i = f_i(u, v)$, $i = 1, 2, 3$ son funciones diferenciables sobre S) tenemos

$$\partial_u{}^{\nabla} D' = \big((f_1)_u, (f_2)_u, (f_3)_u\big) \, .$$

Del mismo modo, para el otro campo tangente básico que nos da la parametrización, $\partial_v = \varphi_v$, tenemos

$$\partial_v{}^{\nabla} D' = \big((f_1)_v, (f_2)_v, (f_3)_v\big) \, .$$

Por ejemplo, supongamos que S es el paraboloide de ecuación $z = xy$ parametrizado como $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(u, v) = (u, v, uv)$. Tenemos los campos $\partial_u = \varphi_u = (1, 0, v)$ y $\partial_v = \varphi_v = (0, 1, u)$, que son tangentes a S. Sin embargo el campo de vectores

$$\partial_u{}^{\nabla} \partial_v = \partial_u{}^{\nabla}(0, 1, u) = (0, 0, 1)$$

no es tangente a S (compruébese).

Propiedades 5.23 Respecto a la suma y al producto por funciones, la derivada covariante sobre S tiene las siguientes propiedades. Sean D, D_1, D_2 campos tangentes sobre S, sean $\bar{D}, \bar{D}_1, \bar{D}_2$ campos diferenciables sobre S, y sean $f, \bar{f} : S \to \mathbb{R}$ funciones sobre S con $\bar{f}$ diferenciable; se cumplen:

(a) $D^{\nabla}(\bar{D}_1 + \bar{D}_2) = D^{\nabla}\bar{D}_1 + D^{\nabla}\bar{D}_2$,

(b) $(D_1 + D_2)^{\nabla}\bar{D} = D_1^{\nabla}\bar{D} + D_2^{\nabla}\bar{D}$,

(c) $D^{\nabla}(\bar{f}\bar{D}) = (D\bar{f})\bar{D} + \bar{f}(D^{\nabla}\bar{D})$,

(d) $(fD)^{\nabla}\bar{D} = f(D^{\nabla}\bar{D})$.

Las demostraciones se obtienen directamente de la definición.

5.24 A los campos de vectores sobre S se extiende de manera natural el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$: dados campos de vectores $D_1 = (f_1, f_2, f_3)$ y $D_2 = (g_1, g_2, g_3)$ sobre S, se define la función $D_1 \cdot D_2 : S \to \mathbb{R}$ por la igualdad

$$D_1 \cdot D_2 := f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_3 g_3 = \sum_{i=1}^{3} f_i g_i \, .$$

Además, si los campos D_1 y D_2 son diferenciables, entonces para todo campo tangente D sobre S tenemos la importante relación

$$D(D_1 \cdot D_2) = (D^{\nabla} D_1) \cdot D_2 + D_1 \cdot (D^{\nabla} D_2)$$

(compruébese la anterior igualdad).

5.25 Terminaremos esta sección señalando una importante propiedad que se sigue de modo inmediato de lo dicho en la nota 5.10 (véase el lema 4.17 y su demostración, donde se enuncia la propiedad análoga para la derivada covariante de $\mathbb{R}^n$):

Sea D un campo tangente a S y sea D' un campo diferenciable sobre S. Dado un punto $P \in S$, el vector $(D^\nabla D')_P$ depende únicamente del valor del campo D' a lo largo de una curva diferenciable $\sigma = \sigma(t)$ sobre S que pase por el punto P y cuyo vector tangente en P sea D_P.

6. Segunda forma fundamental

Igual que hicimos en la anterior, para toda esta sección fijaremos una parametrización regular $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$, $\varphi = \varphi(u, v)$, de clase C^m de una superficie $S = \operatorname{Im} \varphi$ de $\mathbb{R}^3$.

Definición 6.1 Llamaremos *campo normal unitario* a la superficie S al campo de vectores N dado por la igualdad

$$N := \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\left|\varphi_u \times \varphi_v\right|}\,.$$

Como su nombre indica, para cada $P \in S$, N_P es un vector de $\mathbb{R}^3$ cuyo módulo es igual a 1 y que es normal a S en el punto P (esto es, ortogonal al subespacio T_PS de $\mathbb{R}^3$); en particular tenemos $\langle N_P \rangle^\perp = T_PS$.

6.2 El campo normal unitario a la superficie S está determinado salvo el signo, el cual depende de la parametrización: si tenemos un cambio de parámetros

$$\begin{array}{ccc} \bar{U} & \xrightarrow{(u,v)} & U \\ (\bar{u}, \bar{v}) & \longmapsto & \big(u(\bar{u}, \bar{v})\,, v(\bar{u}, \bar{v})\big) \end{array}$$

y consideramos la nueva parametrización $\varphi(\bar{u}, \bar{v}) = \varphi\big(u(\bar{u}, \bar{v})\,, v(\bar{u}, \bar{v})\big)$, entonces sabemos que se cumple

$$\varphi_{\bar{u}} \times \varphi_{\bar{v}} = J\left(\varphi_u \times \varphi_v\right),$$

donde $J \neq 0$ es el jacobiano (determinante de la matriz jacobiana) del cambio de coordenadas, y por lo tanto

$$\bar{N} = \frac{\varphi_{\bar{u}} \times \varphi_{\bar{v}}}{\left|\varphi_{\bar{u}} \times \varphi_{\bar{v}}\right|} = \frac{J\left(\varphi_u \times \varphi_v\right)}{|J|\left|\varphi_u \times \varphi_v\right|} = \pm\frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\left|\varphi_u \times \varphi_v\right|} = \pm N\,.$$

6.3 Sea $\bar{D} = (f_1, f_2, f_3)$ un campo diferenciable de vectores sobre S. Como dijimos en la observación 4.18 para el caso de $\mathbb{R}^n$, podemos definir la derivada covariante de $\bar{D}$ en cada punto: dado $P \in S$, la derivada covariante de $\bar{D}$ en P según un vector $e \in T_PS$ es el vector $e^{\nabla_P}\bar{D} \in \mathbb{R}^3$ dado por la igualdad

$$e^{\nabla_P}\bar{D} := \left(D^e_P f_1, D^e_P f_2, D^e_P f_3\right).$$

De ese modo, si D es un campo tangente a S, entonces la derivada covariante de $\bar{D}$ respecto de D es el campo de vectores $D^\nabla\bar{D}$ sobre S dado punto a punto por las igualdades

$$(D^\nabla\bar{D})_P = D_P{}^{\nabla_P}\bar{D}\,, \qquad P \in S.$$

En efecto, basta aplicar las definiciones: dado $P \in S$ tenemos

$$(D^{\nabla}\bar{D})_P := \big(Df_1(P), Df_2(P), Df_3(P)\big) := \big(D_P^{D_P} f_1, D_P^{D_P} f_2, D_P^{D_P} f_3\big) := D_P{}^{\nabla_P}\bar{D}\,.$$

Nota **6.4** Lo dicho en el punto anterior significa que si sabemos derivar covariantemente en cada punto de la superficie, entonces sabemos derivar globalmente. Una consecuencia importante del siguiente lema es que el recíproco también es cierto: la derivada covariante global sobre S determina la derivada covariante en cada punto de S.

Lema 6.5 *Todo vector $e \in T_PS$ puede extenderse diferenciablemente a un campo tangente sobre toda la superficie S: existe un campo tangente diferenciable D sobre S tal que $D_P = e$.*

Demostración. Si las coordenadas del vector e en la base $\big\{\varphi_u(P), \varphi_v(P)\big\}$ de T_PS son (a, b), basta tomar el campo tangente D cuyas funciones coordenadas (h_1, h_2) en la base $\big\{\varphi_u, \varphi_v\big\}$ de campos tangentes a S son las funciones constantes $h_1 = a$ y $h_2 = b$: $D = a\,\varphi_u + b\,\varphi_v$. ∎

Notas **6.6** (a) En adelante, todos los campos de vectores sobre S que consideremos (tangentes o no) los supondremos diferenciables (de la clase que necesitemos).

(b) Dado $1 \leq r \leq m$ denotaremos

$$\mathcal{D}^r(S) := \{\text{campos tangentes sobre } S \text{ de clase } C^r\}\,.$$

(c) Como el campo normal unitario N es de clase C^{m-1}, supondremos que $m \geq 2$ para que N sea al menos de clase C^1.

Ejercicio 6.7 Dado un punto $P \in S$, pruébese que es lineal la aplicación

$$\begin{aligned} \phi_P : T_PS &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ e &\longmapsto -e^{\nabla_P}N\,. \end{aligned}$$

Nótese que esta aplicación ϕ_P está bien definida porque el campo N es diferenciable.

Proposición 6.8 *Dado $P \in S$, la aplicación lineal ϕ_P definida en el ejercicio 6.7 valora en el subespacio T_PS de $\mathbb{R}^3$.*

Demostración. Fijemos un punto $P \in S$ y un vector $e \in T_PS$. Como $T_PS = \langle N_P\rangle^{\perp}$, para ver que el vector $\phi_P(e) = -e^{\nabla_P}N$ es tangente a S en P debemos comprobar que se cumple $\big(e^{\nabla_P}N\big)\cdot N_P = 0$. Consideremos un campo tangente D a S tal que $D_P = e$ (véase el lema 6.5); en particular será $e^{\nabla_P}N = (D^{\nabla}N)_P$ (véase el punto 6.3). Como $N \cdot N = 1$ tenemos

$$0 = D(N\cdot N) = (D^{\nabla}N)\cdot N + N\cdot(D^{\nabla}N) = 2(D^{\nabla}N)\cdot N\,,$$

y por lo tanto $(D^{\nabla}N)\cdot N = 0$. Valorando en el punto P obtenemos

$$0 = (D^{\nabla}N)_P\cdot N_P = \big(e^{\nabla_P}N\big)\cdot N_P\,,$$

que es lo que queríamos probar. ∎

Definición 6.9 Según la proposición 6.8, para cada punto P de S tenemos un endomorfismo $\phi_P : T_PS \to T_PS$, el cual se conoce como *endomorfismo de Weingarten* de la superficie S en el punto P.

6.10 Fijado un punto P en la superficie S, para cada vector e tangente a S en P tenemos que $\phi_P(e)$ es (salvo el signo) la derivada del vector normal unitario a la superficie en P en la dirección de e. Por lo tanto el endomorfismo ϕ_P mide cómo varía N (esto es, la dirección del plano tangente a S) en las vecindades de P. Es decir, ϕ_P describe "cómo se curva" S en P.

Definición 6.11 Hemos definido el endomorfismo de Weingarten de S punto a punto, pero podemos definirlo globalmente. Si D es un campo tangente a S, entonces en la demostración de la proposición 6.8 hemos visto que el campo de vectores $D^\nabla N$ sobre S también es tangente a S. De este modo, como N es de clase C^{m-1}, dado $1 \leq r \leq m-1$ tenemos el operador

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{D}^r(S) &\longrightarrow \mathcal{D}^{r-1}(S) \\ D &\longmapsto \phi(D) := -D^\nabla N\,. \end{aligned}$$

Es trivial comprobar que esta aplicación ϕ es $C^r(S)$-lineal, es decir, dados campos tangentes D_1 y D_2 sobre S y dada una función diferenciable $f : S \to \mathbb{R}$, se cumplen

$$\phi(D_1 + D_2) = \phi(D_1) + \phi(D_2)\,, \qquad \phi(fD_1) = f\phi(D_1)\,.$$

La aplicación ϕ se denomina *operador de Weingarten* de la superficie S.

6.12 Si conocemos los endomorfismos $\{\phi_P\}_{P\in S}$, entonces conocemos también el operador ϕ, ya que dado un campo D tangente a S tenemos

$$\phi(D)_P = -\big(D^\nabla N\big)_P = -D_P^{\nabla_P} N = \phi_P(D_P)\,, \qquad P \in S\,.$$

Recíprocamente, si conocemos el operador ϕ, entonces aplicando el lema 6.5 podemos obtener la familia de endomorfismos $\{\phi_P\}_{P\in S}$.

6.13 Antes de continuar haremos un inciso para recordar algunas propiedades de las métricas simétricas sobre un espacio vectorial real de dimensión finita.

Consideremos un $\mathbb{R}$-espacio vectorial E de dimensión finita n y fijemos en él un "producto escalar" (esto es, una "métrica simétrica definida positiva") que llamaremos T_2. Como es habitual, el producto de dos vectores $e, v \in E$ según T_2 lo denotaremos con un punto "$\cdot$": $e \cdot v := T_2(e, v)$.

(a) Sea $\bar{T}_2$ otra métrica simétrica sobre E. Existe un único endomorfismo $T : E \to E$ con la siguiente propiedad:

$$\bar{T}_2(e, v) = T(e) \cdot v \qquad \forall\, e, v \in E\,. \tag{6.1}$$

Se dice que T es el "endomorfismo asociado" a la pareja de métricas $(T_2, \bar{T}_2)$. Nótese que de la simetría de $\bar{T}_2$ se obtiene la siguiente propiedad para el endomorfismo T:

$$T(e) \cdot v = e \cdot T(v) \qquad \forall\, e, v \in E\,. \tag{6.2}$$

(b) Supongamos ahora que tenemos un endomorfismo $T : E \to E$ que tiene la propiedad (6.2). Entonces es fácil comprobar que la aplicación

$$\begin{aligned} \bar{T}_2 : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (e, v) &\longmapsto \bar{T}_2(e, v) := T(e) \cdot v \end{aligned}$$

es una métrica simétrica sobre E, y que el endomorfismo asociado a la pareja de métricas $(T_2, \bar{T}_2)$ es el endomorfismo T de partida.

Por linealidad, para comprobar si el endomorfismo T tiene la propiedad (6.2) basta verlo para los vectores de una base: dada una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E, T tiene la propiedad (6.2) si y sólo si se cumple

$$T(e_i) \cdot e_j = e_i \cdot T(e_j) \qquad \forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\}\,,\ i \neq j\,.$$

(c) Fijemos una métrica simétrica $\bar{T}_2$ sobre E y consideremos el correspondiente endomorfismo T. Dada una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ en E, de la relación (6.1) existente entre las métricas y el endomorfismo se obtiene fácilmente la igualdad

$$\begin{pmatrix} \text{matriz de la mé-} \\ \text{trica } \bar{T}_2 \text{ en la} \\ \text{base } \{e_1, \ldots, e_n\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{matriz de la mé-} \\ \text{trica } T_2 \text{ en la} \\ \text{base } \{e_1, \ldots, e_n\} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{matriz del endo-} \\ \text{morfismo } T \text{ en la} \\ \text{base } \{e_1, \ldots, e_n\} \end{pmatrix}.$$

Como T_2 es una métrica euclídea su matriz es invertible, de modo que de la anterior igualdad se obtiene la expresión matricial del endomorfismo T en función de las matrices de las métricas:

$$\begin{pmatrix} \text{matriz del endo-} \\ \text{morfismo } T \text{ en la} \\ \text{base } \{e_1, \ldots, e_n\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{matriz de la mé-} \\ \text{trica } T_2 \text{ en la} \\ \text{base } \{e_1, \ldots, e_n\} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \text{matriz de la mé-} \\ \text{trica } \bar{T}_2 \text{ en la} \\ \text{base } \{e_1, \ldots, e_n\} \end{pmatrix}.$$

(d) La importancia del endomorfismo T asociado a la pareja de métricas $(T_2, \bar{T}_2)$ se pone de manifiesto con la siguiente propiedad:

El endomorfismo T es diagonalizable. Concretamente, T diagonaliza en una base de E que es ortonormal para la métrica euclídea T_2 y es ortogonal para la métrica simétrica $\bar{T}_2$. Es decir existe una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ en E tal que

$$\begin{matrix} \textit{matriz de la métrica } T_2 \\ \textit{en la base } \{e_1, \ldots, e_n\} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{matrix} \textit{matriz de la métrica } \bar{T}_2 \\ \textit{en la base } \{e_1, \ldots, e_n\} \end{matrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{matrix} \textit{matriz del endomorfismo} \\ T \textit{ en la base } \{e_1, \ldots, e_n\}\,. \end{matrix}$$

6.14 Volvamos a nuestra superficie S. Para cada punto $P \in S$, en el espacio tangente T_PS tenemos la primera forma fundamental g_P, que es una métrica euclídea, y el endomorfismo de Weingarten $\phi_P : T_PS \to T_PS$. Queremos ver que dicho endomorfismo cumple la propiedad (6.2) respecto de la métrica g_P, y que por lo tanto existe una métrica simétrica asociada a g_P y ϕ_P (téngase en cuenta lo dicho en el apartado (b) del punto 6.13).

Las métricas $\{g_P\}_{P\in S}$ y los endomorfismos $\{\phi_P\}_{P\in S}$ los hemos definido punto a punto y luego los hemos dado globalmente (la primera forma fundamental es globalmente $g(D_1, D_2) = D_1 \cdot D_2$ para D_1, D_2 campos tangentes a S). Para variar, ahora definiremos la nueva métrica globalmente y luego pasaremos a cada punto.

Comencemos reformulando en nuestro contexto el conocido "lema de Schwarz" sobre las parciales cruzadas.

Lema 6.15 *Los campos tangentes ∂_u y ∂_v sobre S cumplen $\partial_u{}^\nabla\partial_v = \partial_v{}^\nabla\partial_u$.*

Demostración. Si escribimos $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, entonces $\partial_v = \varphi_v = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial v}\right)$ y por lo tanto

$$\partial_u{}^\nabla\partial_v = \partial_u{}^\nabla\varphi_v = \left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial u\partial v}, \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial u\partial v}, \frac{\partial^2\varphi_3}{\partial u\partial v}\right).$$

Del mismo modo tenemos

$$\partial_v{}^\nabla\partial_v = \left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial v\partial u}, \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial v\partial u}, \frac{\partial^2\varphi_3}{\partial v\partial u}\right).$$

Para concluir la demostración basta tener en cuenta que en virtud del lema de Schwarz para funciones definidas en el abierto U de $\mathbb{R}^2$ se cumple $\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial u\partial v} = \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial v\partial u}$, $i = 1, 2, 3$. ∎

Proposición 6.16 *El operador de Weingarten ϕ satisface la propiedad* (6.2) *respecto de la primera forma fundamental g, es decir, dados campos tangentes D_1 y D_2 sobre S se cumple*

$$\phi(D_1) \cdot D_2 = D_1 \cdot \phi(D_2)\,.$$

Demostración. Como ya se dijo al final del apartado (b) del punto 6.13, bastará probar que para los campos tangentes básicos $\{\partial_u, \partial_v\}$ se cumple $\phi(\partial_u) \cdot \partial_v = \partial_u \cdot \phi(\partial_v)$.

Como $\partial_u \cdot N = 0 = \partial_v \cdot N$ tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_u\big(\partial_v \cdot N\big) = \big(\partial_u{}^\nabla\partial_v\big) \cdot N + \partial_v \cdot \big(\partial_u{}^\nabla N\big)\,, \\ 0 &= \partial_v\big(\partial_u \cdot N\big) = \big(\partial_v{}^\nabla\partial_u\big) \cdot N + \partial_u \cdot \big(\partial_v{}^\nabla N\big)\,, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \phi(\partial_u) \cdot \partial_v &= -\big(\partial_u{}^\nabla N\big) \cdot \partial_v = \big(\partial_u{}^\nabla\partial_v\big) \cdot N\,, \\ &= \big(\partial_v{}^\nabla\partial_u\big) \cdot N = -\partial_u \cdot \big(\partial_v{}^\nabla N\big) = \partial_u \cdot \phi(\partial_v)\,, \end{aligned}$$

con lo que termina la demostración. ∎

Definición 6.17 Según la proposición 6.16, sobre los campos tangentes a S tenemos definida la métrica simétrica ϕ_2 por la igualdad

$$\phi_2(D_1, D_2) := \phi(D_1) \cdot D_2 = -\big(D_1^\nabla N\big) \cdot D_2\,, \qquad D_1, D_2 \text{ campos tangentes sobre } S\,.$$

Dicha métrica ϕ_2 se denomina *segunda forma fundamental* de la superficie S.

6.18 En cada punto $P \in S$, la segunda forma fundamental es la siguiente métrica simétrica sobre el espacio vectorial T_PS:

$$\begin{array}{rcl} \phi_{2,P} : T_PS \times T_PS & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (e, v) & \longmapsto & \phi_{2,P}(e, v) := \phi_P(e) \cdot v = -\big(e^{\nabla_P} N\big) \cdot v\,. \end{array}$$

Por construcción, es claro que $\phi_P : T_PS \to T_PS$ es el endomorfismo asociado a la pareja de métricas $\big(g_P, \phi_{2,P}\big)$.

De la relación existente entre el operador de Weingarten definido globalmente y los endomorfismo de Weingarten en cada punto, se sigue de modo inmediato la relación entre la segunda forma fundamental dada globalmente y dada en cada punto: si $e, v \in T_PS$ y $D, \bar{D}$ son campos tangentes sobre S tales que $D_P = e$ y $\bar{D}_P = v$, entonces tenemos

$$\phi_{2,P}(e, v) = \phi_2(D, \bar{D})(P)\,.$$

6.19 (Interpretación geométrica) Fijado un punto $P \in S$, para ver el significado geométrico de la segunda forma fundamental $\phi_{2,P}$ vamos a estudiar su "forma cuadrática" asociada

$$\begin{array}{rcl} T_PS & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ e & \longmapsto & \phi_{2,P}(e, e)\,. \end{array}$$

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos $\phi_{2,P}(\lambda e, \lambda e) = \lambda^2 \phi_{2,P}(e, e)$, de modo que la forma cuadrática está determinada por su valor sobre los vectores unitarios de T_PS. Fijemos entonces un vector $e \in T_PS$ tal que $|e| = 1$.

Recordemos que si $\sigma : I \to S$ es una curva diferenciable que cumple $\sigma(t_0) = P$ y $\sigma'(t_0) = e$ para cierto $t_0 \in I$, entonces tenemos (véanse la definición 5.7 y el punto 6.3)

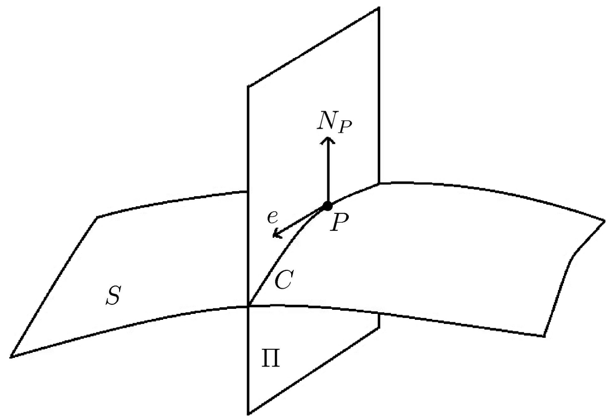
$$\phi_P(e) = -\big(e^{\nabla_P} N\big) \overset{\text{definición}}{=\!=\!=} -\frac{\mathrm{d}(N \circ \sigma)}{\mathrm{d}t}(t_0) = -N'(t_0)\,, \tag{6.3}$$

donde $N = N(t)$ denota la restricción del campo normal unitario N a los puntos de la curva, es decir, la composición

$$\begin{array}{ccl} I \xrightarrow{\ \sigma\ } S \xrightarrow{\ N\ } & & \mathbb{R}^3 \\ t \longmapsto\!\!\longrightarrow & & N(t) := N(\sigma(t))\,. \end{array}$$

Ahora, en el punto P tenemos los vectores e y N_P que son linealmente independientes, y por lo tanto tenemos el plano $\Pi = P + \langle e, N_P \rangle$.

El plano Π corta a S en una curva C que se conoce como la *sección plana* de S en P en la dirección del vector tangente e. Por una parte, un vector tangente a C en P pertenece al subespacio $\langle e, N_P \rangle$ de $\mathbb{R}^3$ porque C está contenida en Π. Por otra parte, como C también yace sobre S, un vector tangente a la curva en P es tangente a S en P, es decir, es ortogonal a N_P. De todo lo anterior se sigue que el vector e es tangente a la curva C en P.



Teorema 6.20 *Con las hipótesis y notación anteriores, se cumple*

$$\phi_{2,P}(e,e) = \pm(\textit{curvatura de } C \textit{ en } P)\,.$$

Demostración. Supondremos (sin justificarlo) que la curva C admite una parametrización regular $\sigma = \sigma(t)$ en un entorno de P; será $P = \sigma(t_0)$ para cierto valor t_0 del parámetro.

Podemos suponer que la parametrización $\sigma = \sigma(t)$ es natural, en cuyo caso el vector tangente unitario a la curva es $T = \sigma'$ y su curvatura es $\kappa = |T'|$. Donde la curvatura sea no nula tenemos el vector normal principal de σ, que lo denotaremos $\bar{N}$ para distinguirlo del campo normal N a la superficie. Como el vector unitario e es tangente a σ en P debe ser $\sigma'(t_0) = \pm e$; cambiando si fuera necesario el sentido de recorrido de la curva, supondremos que se cumple $\sigma'(t_0) = e$.

En cada punto de la curva el vector T es tangente a la superficie porque la curva yace sobre S. Por lo tanto, para el campo normal unitario a S a lo largo de la curva, $N = N(t)$, se cumple $T \cdot N = 0$, y derivando respecto de t tenemos

$$0 = T' \cdot N + T \cdot N' \qquad \Rightarrow \qquad -N' \cdot T = T' \cdot N\,.$$

Valorando en el punto $P = \sigma(t_0)$ obtenemos (véase la igualdad (6.3)):

$$\phi_{2,P}(e,e) = \phi_P(e) \cdot e = \big(-N'(t_0)\big) \cdot T_{t_0} = T'_{t_0} \cdot N_P\,.$$

Si la curvatura de σ en P es cero, $0 = \kappa(t_0) = |T'_{t_0}|$, tenemos

$$\phi_{2,P}(e,e) = T'_{t_0} \cdot N_P = 0 = \kappa(t_0)\,.$$

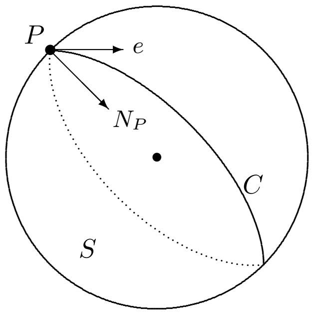
Si $\kappa(t_0) \neq 0$, entonces en un entorno de P en la curva está definido su triedro de Frenet $\{T, \bar{N}, B\}$. Por una parte tenemos $T'_{t_0} = \kappa(t_0)\bar{N}_{t_0}$. Por otra parte, como la curva está sobre el plano $\Pi = P + \langle e, N_P\rangle$ debe ser $\bar{N}_{t_0} \in \langle e, N_P \rangle$, y como $e = T_{t_0}$ concluimos que $\bar{N}_{t_0} = \pm N_P$. De todo lo dicho obtenemos

$$\phi_{2,P}(e,e) = T'_{t_0} \cdot N_P = \kappa(t_0)\big(\bar{N}_{t_0} \cdot N_P\big) = \pm\kappa(t_0)\,,$$

con lo que termina la demostración. ∎

Observación **6.21** En relación con la anterior demostración, nótese que en el caso del dibujo de la página 87 se cumple $\bar{N}_{t_0} = -N_P$, es decir, la sección plana C está en el lado opuesto de N_P respecto del plano tangente a S en P. Si N_P y C estuvieran al mismo lado del plano tangente, entonces sería $\bar{N}_{t_0} = N_P$.

Ejemplo 6.22 Supongamos que S es un abierto de una esfera de radio $R > 0$, parametrizada de modo que el vector normal unitario apunta hacia el centro de la esfera. Dados un punto $P \in S$ y un vector unitario $e \in T_P S$, el plano $\Pi = P + \langle e, N_P \rangle$ pasa por el centro de la esfera y por lo tanto la correspondiente sección plana C es un círculo máximo de la esfera (esto es, una circunferencia cuyo centro coincide con el centro de la esfera).



Con la elección hecha del campo N, en este caso tenemos que N_P es también vector normal principal a la curva C en P. Como C es una circunferencia de radio R, su curvatura es constantemente igual a $1/R$, por lo que tenemos

$$\phi_{2,P}(e,e) = \kappa(P) = 1/R > 0\,.$$

En este caso la métrica simétrica $\phi_{2,P}$ ha resultado ser definida positiva, pero si hubiéramos tomado la otra elección del vector normal unitario a S, entonces hubiéramos obtenido que $\phi_{2,P}$ es definida negativa.

Lo importante no es el signo, sino que sea definida, en cuyo caso tenemos que hay un entorno del punto P en la superficie S que queda todo a un mismo lado del plano tangente a S en P.

Definiciones 6.23 Se define la *curvatura de Gauss* de la superficie S en un punto suyo P como el determinante del endomorfismo $\phi_P : T_P S \to T_P S$,

$$K_G(P) := \det \phi_P\,.$$

Sabemos que ϕ_P diagonaliza en una base de $T_P S$ que es ortonormal para la primera forma fundamental g_P (es decir, ortonormal para el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$), y es ortogonal para la segunda forma fundamental $\phi_{2,P}$. Es decir, existe una base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ en $T_P S$ y existen escalares $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{array}{c}\text{matriz de la métrica}\\ \phi_{2,P} \text{ en la base } \{e_1,e_2\}\end{array} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{array}{c}\text{matriz del endomorfismo}\\ \phi_P \text{ en la base } \{e_1,e_2\}\,.\end{array}$$

Los valores propios k_1 y k_2 de ϕ_P se llaman *curvaturas principales* de la superficie en el punto P. Se llaman *direcciones principales* de S en P a los vectores propios de ϕ_P ($\{e_1, e_2\}$ es una base ortonormal de $T_P S$ formada por direcciones principales de S en P). Nótese que por definición se cumple

$$K_G(P) = k_1 k_2\,.$$

6.24 Sabemos que el endomorfismo ϕ_P está determinado salvo el signo. Como consecuencia, las curvaturas principales de S en P están determinadas salvo un cambio de signo en las dos: si k_1 y k_2 son los valores propios de ϕ_P, entonces los valores propios de $-\phi_P$ son $-k_1$ y $-k_2$.

Es importante observar que la curvatura de Gauss sí es un invariante de la superficie, ya que como la dimensión del espacio vectorial T_PS es igual a 2 se cumple

$$\det\big(-\phi_P\big) = (-1)^2 \det\phi_P = \det\phi_P\,;$$

de otro modo: $k_1k_2 = (-k_1)(-k_2)$.

6.25 (Fórmula de Euler) Siguiendo con la notación de los puntos anteriores, veamos una interpretación geométrica de las curvaturas principales.

Supongamos ordenadas las curvaturas principales de modo que $k_1 \geq k_2$. Consideremos una dirección tangente a S en el punto P que vendrá determinada por un vector unitario $u \in T_PS$. Como $\{e_1, e_2\}$ es una base ortonormal de T_PS, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $u = \cos\theta\, e_1 + \operatorname{sen}\theta\, e_2$, y como $\phi_P(e_1) = k_1e_1$ y $\phi_P(e_2) = k_2e_2$ obtenemos

$$\phi_P(u) = \phi_P(\cos\theta\, e_1 + \operatorname{sen}\theta\, e_2) = k_1\cos\theta\, e_1 + k_2\operatorname{sen}\theta\, e_2\,.$$

Por lo tanto, la curvatura (con signo) k de la sección plana de S en P dada por el vector u es

$$\begin{aligned} k &= \phi_{2,P}(u,u) = \phi_P(u)\cdot u \\ &= (k_1\cos\theta\, e_1 + k_2\operatorname{sen}\theta\, e_2)\cdot(\cos\theta\, e_1 + \operatorname{sen}\theta\, e_2) = k_1\cos^2\theta + k_2\operatorname{sen}^2\theta\,. \end{aligned}$$

La fórmula obtenida, $k = k_1\cos^2\theta + k_2\operatorname{sen}^2\theta$, se conoce como “teorema de Euler”. De ella se deduce que siempre se cumple $k_1 \geq k \geq k_2$, alcanzándose el valor k_1 en la dirección de e_1 y el valor k_2 en la dirección de e_2.

6.26 (Cálculos) Veamos cómo es, globalmente, la expresión matricial de la segunda forma fundamental de S en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ de campos tangentes a la superficie.

Por definición, la matriz de ϕ_2 en dicha base es

$$\begin{pmatrix} \phi_2(\partial_u,\partial_u) & \phi_2(\partial_u,\partial_v) \\ \phi_2(\partial_v,\partial_u) & \phi_2(\partial_v,\partial_v) \end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

Es habitual denotar

$$L_{11} = \phi_2(\partial_u,\partial_u)\,, \qquad L_{12} = \phi_2(\partial_u,\partial_v) = \phi_2(\partial_v,\partial_u) = L_{21}\,, \qquad L_{22} = \phi_2(\partial_v,\partial_v)\,.$$

Calculemos por ejemplo la función L_{11}. Si escribimos $N = (N_1, N_2, N_3)$, entonces

$$\phi(\partial_u) = -\partial_u{}^{\nabla} N = -\big(\partial_u N_1, \partial_u N_2, \partial_u N_3\big) = -N_u$$

y obtenemos

$$L_{11} = \varphi_2(\partial_u,\partial_u) = \phi(\partial_u)\cdot\varphi_u = -\,\varphi_u\cdot N_u\,.$$

Procediendo de esta manera llegamos a que la matriz (6.4) es

$$(L_{ij}) = \begin{pmatrix} -\,\varphi_u\cdot N_u & -\,\varphi_v\cdot N_u \\ -\,\varphi_u\cdot N_v & -\,\varphi_v\cdot N_v \end{pmatrix}.$$

En la práctica suelen hacerse los cálculos utilizando otra expresión para ϕ_2. Si D_1 y D_2 son campos tangentes a S, como $D_2 \cdot N = 0$ tenemos $0 = D_1(D_2 \cdot N) = \big(D_1^\nabla D_2\big) \cdot N + \big(D_1^\nabla N\big) \cdot D_2$, y por lo tanto $\phi_2(D_1, D_2) = \phi(D_1) \cdot D_2 = -\,(D_1^\nabla N) \cdot D_2 = \big(D_1^\nabla D_2\big) \cdot N$, es decir,

$$\boxed{\phi_2(D_1, D_2) = \big(D_1^\nabla D_2\big) \cdot N}\,. \tag{6.5}$$

Es muy habitual tomar la expresión (6.5) como la definición de la segunda forma fundamental ϕ_2, y con ella obtenemos

$$\big(L_{ij}\big) = \begin{pmatrix} (\partial_u{}^\nabla \partial_u) \cdot N & (\partial_u{}^\nabla \partial_v) \cdot N \\ (\partial_v{}^\nabla \partial_u) \cdot N & (\partial_v{}^\nabla \partial_v) \cdot N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{uu} \cdot N & \varphi_{vu} \cdot N \\ \varphi_{uv} \cdot N & \varphi_{vv} \cdot N \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 6.27 Sea S el paraboloide de ecuación $z = xy$ parametrizado como $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(u, v) = (u, v, uv)$. Tenemos $\varphi_u = (1, 0, v)$ y $\varphi_v = (0, 1, u)$, de modo que

$$\varphi_u \times \varphi_v = \begin{vmatrix} \vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}} \\ 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u \end{vmatrix} = (-v, -u, 1)\,, \qquad\qquad |\varphi_u \times \varphi_v| = \sqrt{1 + u^2 + v^2}\,,$$

y por lo tanto

$$N = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{|\varphi_u \times \varphi_v|} = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}\,(-v, -u, 1)\,.$$

Además $\varphi_{uu} = (0, 0, 0)$, $\varphi_{uv} = (0, 0, 1)$ y $\varphi_{vv} = (0, 0, 0)$. La matriz de la primera forma fundamental g de S en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ es

$$\big(g_{ij}\big) = \begin{pmatrix} \varphi_u \cdot \varphi_u & \varphi_v \cdot \varphi_u \\ \varphi_u \cdot \varphi_v & \varphi_v \cdot \varphi_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + v^2 & uv \\ uv & 1 + u^2 \end{pmatrix},$$

y la matriz de ϕ_2 es

$$\big(L_{ij}\big) = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz del operador de Weingarten es $(\phi) = (g_{ij})^{-1} \cdot (L_{ij})$ (véase el apartado (c) del punto 6.13), de modo que no hay que calcular dicha matriz para obtener la curvatura de Gauss:

$$K_G = \det \phi = \frac{\det(L_{ij})}{\det(g_{ij})} = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{-1}{\big(1 + u^2 + v^2\big)^2}$$

(nótese que la función $\det(g_{ij}) = |\varphi_u \times \varphi_v|^2$ se ha calculado previamente para obtener el campo normal N; véase lo dicho al final de la definición 3.2). Si queremos calcular las curvaturas principales, entonces sí necesitamos la matriz del operador de Weingarten porque debemos diagonalizar dicha matriz:

$$(\phi) = (g_{ij})^{-1} \cdot (L_{ij}) = \frac{1}{(1 + u^2 + v^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} -uv & 1 + u^2 \\ 1 + v^2 & -uv \end{pmatrix}.$$

Se deja como ejercicio para el lector el estudio de la diagonalización de la anterior matriz, y la obtención de las curvaturas principales k_1 y k_2 del paraboloide S, así como de las direcciones principales de S.

Definiciones 6.28 Un punto P de la superficie S puede ser de cuatro tipos en función de la segunda forma fundamental:

(a) Si $\phi_{2,P}$ tiene signo definido, entonces se dice que P es un punto *elíptico* de S. En este caso las curvaturas principales de S en P son no nulas y de igual signo, es decir, $K_G(P) > 0$. Los puntos de una esfera son todos elípticos (ejemplo 6.22).

(b) Si $\phi_{2,P}$ es no singular y no tiene signo definido, entonces se dice que P es un punto *hiperbólico* de S. En este caso las curvaturas principales de S en P son no nulas y de distinto signo, esto es, $K_G(P) < 0$. Todos los puntos del paraboloide de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $z = xy$ son hiperbólicos (ejemplo 6.27).

(c) Cuando $\phi_{2,P}$ es singular y no nula se dice que P es un punto *parabólico* de S. En este caso es $K_G(P) = 0$, siendo una de las curvaturas principales de S en P nula y la otra no nula. Todos los puntos del cilindro de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ son parabólicos (compruébese).

(d) Si $\phi_{2,P} = 0$, entonces se dice que P es un punto *plano* de S. En este caso las curvaturas principales y la curvatura de Gauss de S en P son nulas. Si S es un plano de $\mathbb{R}^3$ y $P \in S$, entonces todas las secciones planas de S en P son rectas y por tanto tienen curvatura nula. Como consecuencia, todos los puntos de S son planos.

7. Problemas

7.1 *Toda parametrización regular es localmente la gráfica de una función*: Sea $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, una parametrización regular de clase C^m de una superficie S de $\mathbb{R}^3$ y fijemos un punto $P = \varphi(u_0, v_0) \in S$. Uno de los tres menores de orden 2 de la matriz

$$\begin{pmatrix} \varphi_{1,u}(u_0, v_0) & \varphi_{1,v}(u_0, v_0) \\ \varphi_{2,u}(u_0, v_0) & \varphi_{2,v}(u_0, v_0) \\ \varphi_{3,u}(u_0, v_0) & \varphi_{3,v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

es no nulo porque los vectores $\varphi_u(u_0, v_0)$ y $\varphi_v(u_0, v_0)$ son linealmente independientes. Si, por ejemplo, fuera no nulo el menor correspondiente a las dos primeras filas, entonces existe un entorno abierto W de P en la superficie S y existe una función diferenciable $f : \bar{U} \to \mathbb{R}$ sobre un abierto $\bar{U}$ de $\mathbb{R}^2$, tales que W es la gráfica de f, esto es,

$$W = \big\{ \big(x, y, f(x, y)\big) \,:\, (x, y) \in \bar{U} \big\}.$$

En virtud del teorema de la función implícita tenemos que un enunciado equivalente para este problema sería: *Toda superficie (parametrizada) de $\mathbb{R}^3$ es localmente los ceros de una función diferenciable.*

7.2 Fijemos un punto P en una superficie S de $\mathbb{R}^3$. Aplicando un giro a S si fuera necesario, podemos suponer que el vector normal unitario N a la superficie en P es $N_P = (0, 0, 1)$, en cuyo caso será

$$T_P S = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle . \tag{7.1}$$

En esta situación (véase el problema 7.1), un entorno de P en S, que seguiremos denotando S, es la gráfica de una función del siguiente modo: existe $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciable, U abierto de $\mathbb{R}^2$, tal que

$$S = \{ (x, y, f(x, y)) \,:\, (x, y) \in U \} .$$

En particular una parametrización de S es

$$\begin{array}{rcl} \varphi : U & \longrightarrow & S \subseteq \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (u,v,f(u,v))\,. \end{array}$$

Será $P = \varphi(u_0, v_0)$ para cierto $(u_0, v_0) \in U$.

Pruébese que la matriz de la segunda forma fundamental de S en P (respecto de la base que define la parametrización considerada) es

$$\begin{pmatrix} f_{uu}(u_0,v_0) & f_{uv}(u_0,v_0) \\ f_{vu}(u_0,v_0) & f_{vv}(u_0,v_0) \end{pmatrix} = \text{ hessiano de } f \text{ en } (u_0,v_0)\,.$$

Nota: El problema 7.2 muestra la interpretación geométrica de la segunda forma fundamental de S en P utilizando la “teoría de extremos relativos”. La igualdad (7.1) significa que el plano tangente a S en el punto P es justamente el que pasa por P y es paralelo al plano de ecuación $z = 0$; por tanto, al ser S la gráfica de f, algún entorno de $P = f(u_0, v_0)$ en S queda a un mismo lado del plano tangente si y sólo si f tiene un extremo relativo en (u_0, v_0) : si f tiene un máximo en (u_0, v_0) entonces la superficie queda por debajo del plano tangente, y si f tiene un mínimo en (u_0, v_0) entonces la superficie queda por encima del plano tangente. Ahora, aplicando la teoría de máximos y mínimos sabemos que f tiene un máximo o un mínimo en (u_0, v_0) si y sólo si su hessiano en (u_0, v_0) tiene signo definido. De todo se sigue que (un entorno de P en) la superficie S está a un lado del plano tangente en P si y sólo si la segunda forma fundamental $\phi_{2,P}$ tiene signo definido.

Del mismo modo, si $\phi_{2,P}$ es no singular pero no tiene signo definido, entonces f no tiene máximo ni mínimo en (u_0, v_0), y por tanto S corta a su plano tangente en P en puntos distintos de P. Queda el caso indeterminado: cuando el determinante del hessiano es nulo no sabemos qué ocurre (pude haber extremos relativos o no), de modo que cuando la métrica $\phi_{2,P}$ es singular no sabemos cómo es la posición de S respecto de su plano tangente en P.

7.3 Fijemos un punto P en una superficie S de $\mathbb{R}^3$. Pruébese que son equivalentes:

(a) Las curvaturas principales de S en P coinciden, es decir, el endomorfismo de Weingarten de S en P es una homotecia.

(b) La segunda forma fundamental de S en P es proporcional a la primera: existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_{2,P} = \lambda g_P$.

Cuando las curvaturas principales de S en P coinciden se dice que P es un punto *umbílico* (ó *umbilical*) de la superficie S. Es claro que un punto umbílico debe ser elíptico o plano.

7.4 Cálculos en forma implícita: Sea S una superficie de $\mathbb{R}^3$ que viene dada por los ceros de una función diferenciable $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ (con gradiente no nulo en todo punto de S). Como el gradiente de F define un campo de vectores normal a S obtenemos que un campo normal unitario a S es

$$N = \frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|}\,;$$

nótese que $\operatorname{grad} F$ es un campo de vectores en todo $\mathbb{R}^3$, peso sólo nos interesa su valor en los puntos de S. Si además encontramos campos de vectores D_1 y D_2 en $\mathbb{R}^3$ que en los puntos de S

sean tangentes a S y linealmente independientes, entonces (la restricción a S de) $\{D_1, D_2\}$ es una base de campos tangentes a S, y por lo tanto tenemos las matrices de la primera y segunda formas fundamentales de S respecto de dichas bases:

$$g \equiv \begin{pmatrix} D_1 \cdot D_1 & D_1 \cdot D_2 \\ D_2 \cdot D_1 & D_2 \cdot D_2 \end{pmatrix}, \qquad \phi_2 \equiv \begin{pmatrix} (D_1^\nabla D_1) \cdot N & (D_1^\nabla D_2) \cdot N \\ (D_2^\nabla D_1) \cdot N & (D_2^\nabla D_2) \cdot N \end{pmatrix}.$$

Lo anterior se comprueba punto a punto: para cada $P \in S$, $\{D_{1,P}, D_{2,P}\}$ es una base de $T_P S$, el espacio tangente a S en P, y las igualdades matriciales anteriores son claras para las métricas simétricas g_P y $\phi_{2,P}$ sobre el espacio vectorial $T_P S$ en dicha base.

Aplíquese lo anterior para estudiar la existencia de puntos umbílicos sobre el elipsoide S de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a > b > c > 0.$$

7.5 Estúdiense de qué tipo son los puntos de la superficie S de $\mathbb{R}^3$ parametrizada del siguiente modo:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & S \\ (u, v) & \longmapsto & (u, v, u^2 + v^3). \end{array}$$

7.6 Considérese el helicoide recto S parametrizado del siguiente modo (donde a es un número real no nulo):

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & S \\ (u, v) & \longmapsto & (u \cos v, u \operatorname{sen} v, av). \end{array}$$

Calcúlense las curvaturas principales, la curvatura media y la curvatura de Gauss de S. Dígase de qué tipo son los puntos de S.

7.7 Una curva (regular) sobre una superficie de $\mathbb{R}^3$ se llama *línea de curvatura*, si el vector tangente en cada punto de la curva es una dirección principal de la superficie en ese punto.

Como todos los puntos de una esfera son umbílicos, es claro que sobre una esfera toda curva es línea de curvatura. Del mismo modo, sobre un plano toda curva es línea de curvatura.

Pruébese que si P es un punto no umbílico de una superficie S de $\mathbb{R}^3$, entonces en algún entorno de P en S existen dos familias ortogonales de líneas de curvatura.

7.8 Sea $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$, $\varphi = \varphi(u, v)$, una parametrización regular de clase C^2 de una superficie $S = \operatorname{Im} \varphi$. Pruebe que una curva $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = \varphi\big(u(t), v(t)\big)$, es línea de curvatura de S, si y sólo si (u, v) son solución no trivial de la ecuación diferencial

$$\begin{vmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ L_{11} & L_{12} & L_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

7.9 Considérese en $\mathbb{R}^3$ la superficie S de ecuación $z = x^2 + y^2$. Estúdiese de qué tipo son los puntos de S y obténganse las familias ortogonales de líneas de curvaturas en entornos de los puntos no umbílicos.

7.10 Calcúlense las líneas de curvatura del helicoide recto (véase el problema 7.6).

7.11 Dado un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$ y funciones $f, h : I \to \mathbb{R}$ de clase C^m con $f(t) > 0$ para todo $t \in I$, considérese la superficie de revolución S parametrizada como

$$\begin{array}{rcl} \varphi : I \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (t, \theta) & \longmapsto & \big(f(t)\cos\theta\,, f(t)\,\mathrm{sen}\,\theta\,, h(t)\big) \end{array}$$

(véase el problema IV.5.4).

(a) Obténganse, en la base de campos tangentes que de modo natural define la parametrización dada, las matrices de la primera y segunda formas fundamentales de S, y la matriz del endomorfismo de Weingarten de S.

(b) Calcúlense las curvaturas principales y la curvatura de Gauss de la superficie S. ¿Son necesariamente los puntos de S de algún tipo particular?

(c) Pruébese que los meridianos y los paralelos son dos familias ortogonales de líneas de curvatura que recubren la superficie de revolución S.

7.12 Una superficie de $\mathbb{R}^3$ se dice que es *desarrollable* si su curvatura de Gauss es constantemente nula. Para una superficie reglada S de $\mathbb{R}^3$ pruébese que son equivalentes:

(a) S es desarrollable;

(b) el vector normal unitario a la superficie es constante a lo largo de las generatrices (i.e., los planos tangentes a S a lo largo de una generatriz son todos paralelos).

Nota: Según los problemas IV.5.13 y 7.12, los cilindros, los conos y las desarrollables tangenciales son superficies desarrollables de $\mathbb{R}^3$.

7.13 Sea S una superficie de $\mathbb{R}^3$ que viene dada por los ceros de una función diferenciable $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$. Pruébese que S es una superficie desarrollable si y sólo si sobre todos los puntos de S se cumple

$$\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} & F_y \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} & F_z \\ F_x & F_y & F_z & 0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

7.14 Dada una función diferenciable $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, sea S la superficie que determina su gráfica. Aplíquese el problema 7.13 para obtener la condición que debe cumplir la función f para que la superficie S sea desarrollable.

7.15 Pruébese que una curva sobre una superficie de $\mathbb{R}^3$ es una línea de curvatura, si y sólo si la colección de rectas normales a la superficie a lo largo de la curva forman una superficie desarrollable.

7.16 Considérese en $\mathbb{R}^3$ la superficie S de euación $xz - y = 0$.

(a) Obténgase una base de campos tangentes sobre S y calcúlense en ella las matrices de la primera y segunda formas fundamentales.

(b) Calcúlese la curvatura de Gauss de S y obténgase como consecuencia de qué tipo son los puntos de S.

(c) ¿Tiene S puntos umbílicos? ¿Es S reglada? ¿Es S desarrollable? Razone las respuestas.

7.17 Sea S la superficie de revolución del problema 7.11, la cual se genera al girar alrededor del eje z la curva $\sigma(t) = (f(t), 0, h(t))$ que se encuentra en el semiplano $\{y = 0,\ x > 0\}$.

Pruébese que S es desarrollable si y sólo si σ es (un segmento de) una recta. Cuando la recta sea "vertical" (esto es, $x = $ cte.) S será un cilindro, cuando la recta sea "horizontal" (esto es, $z = $ cte.) S será una región circular plana, y en el resto de los casos S será un cono.

7.18 Considérese en $\mathbb{R}^3$ la superficie S parametrizada del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (u, v, u^3 - v)\,. \end{aligned}$$

(a) Obténgase una base de campos tangentes sobre S y calcúlense en ella las matrices de la primera y segunda formas fundamentales.

(b) Calcúlese la curvatura de Gauss de S y clasifíquense con ella los puntos de S.

(c) ¿Tiene S puntos umbílicos? ¿Es S reglada? ¿Es S desarrollable? Razone las respuestas.

7.19 Considérese en $\mathbb{R}^3$ el paraboloide reglado $S \equiv x^2 - y^2 = z$. Pruébese que S es reglada (como ya sabemos) pero no es desarrollable.

7.20 Considérese en $\mathbb{R}^3$ la superficie S dada por la ecuación

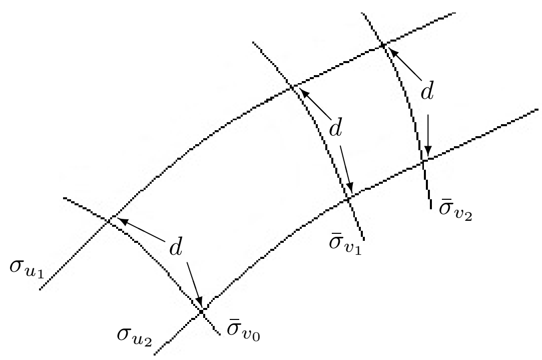
$$z = a + bx + cy + \sum_{h=2}^{r} a_h (px + qy)^h\,,$$

donde $a, b, c, a_2, \ldots, a_r, p, q$ son constantes tales que p y q no se anulan simultáneamente, $(p, q) \neq (0, 0)$. Pruébese que la superficie S es reglada y desarrollable.

7.21 Sea $\varphi = \varphi(u, v)$ una parametrización de una superficie S de $\mathbb{R}^3$, y supóngase que la matriz de la primera forma fundamental g de S en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ es

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix}.$$

con $\lambda > 0$ constante. Pruébese que entonces dos curvas paramétricas de la familia $\big\{\sigma_{u_0}(v) = \varphi(u_0, v)\big\}_{u_0}$ determinan segmentos de igual longitud sobre todas las curvas paramétricas de la otra familia $\big\{\bar\sigma_{v_0}(u) = \varphi(u, v_0)\big\}_{v_0}$ (véase el dibujo).



Nótese que las dos familias de curvas paramétricas son ortogonales: $g_{12} = \varphi_u \cdot \varphi_v = 0$. En esta situación se dice que la familia $\big\{\sigma_{u_0}(v) = \varphi(u_0, v)\big\}_{u_0}$ de curvas paramétricas son *paralelas*.

7.22 Sea S el toro del problema IV.5.3. Una parametrización de S como superficie de revolución es

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S \\ (t, \theta) &\longmapsto \big(f(t)\cos\theta\,, f(t)\operatorname{sen}\theta\,, h(t)\big) \end{aligned}$$

con $f(t) = b + a\,\cos t$ y $h(t) = a\,\operatorname{sen} t$.

(a) Calcúlense las curvaturas principales de S y dígase de qué tipo son sus puntos ¿Tiene S puntos umbílicos?

(b) Hágase lo mismo que en el apartado anterior pero teniendo en cuenta que S puede definirse como los ceros de la función $F(x, y, z) = \big(\sqrt{x^2 + y^2} - b\big)^2 + z^2 - a^2$.

7.23 Utilízese la parametrización del toro como superficie de revolución y aplíquese a ella el problema 7.21. ¿Qué se obtiene?

Hágase lo mismo para una esfera de radio r de $\mathbb{R}^3$ centrada en el origen a la que se le han quitado los polos.

7.24 Sea $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t), \sigma_3(t))$, una curva parametrizada por su longitud de arco, y sea $N(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ un campo a soporte en la curva que es unitario y normal a la curva: $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 1$ y $N \cdot T = 0$, donde $T = \sigma'$ es el campo tangente unitario a la curva. Considérese la superficie reglada que definen la curva σ y el campo N:

$$\begin{aligned} \varphi : I \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, s) &\longmapsto \sigma(t) + sN(t)\,. \end{aligned}$$

(a) Pruébese que S es desarrollable si y sólo si el campo a soporte $N' = (f_1', f_2', f_3')$ es tangente a la curva.

(b) Sea ahora $\bar{N}$ otro campo a soporte en la curva (distinto de N en todo punto) que es normal a la curva y unitario, y sea $\bar{S}$ la superficie reglada que define $\bar{N}$. Supuesto que S es desarrollable pruébese: $\bar{S}$ es desarrollable si y sólo si N y $\bar{N}$ forman un ángulo constante a lo largo de la curva (i.e., $N \cdot \bar{N} =$ constante).

7.25 Sean S_1 y S_2 superficies (no tangentes) de $\mathbb{R}^3$ que se cortan a lo largo de una curva C. Si N_1 y N_2 son los campos normales unitarios a las superficies S_1 y S_2, respectivamente, que las superficies se corten bajo ángulo constante significa que el ángulo que forman N_1 y N_2 es constante a lo largo de la curva $C = S_1 \cap S_2$.

(a) Pruébese que si las superficies se cortan bajo ángulo constante, entonces C es línea de curvatura de una de las superficies si y sólo si lo es de la otra.

(b) Como consecuencia de la propiedad (a) se sigue: si un plano (ó una esfera) corta a una superficie bajo ángulo constante y no es tangente a ella, entonces la curva de corte es línea de curvatura de la superficie.

(c) Pruébese el recíproco del apartado (a): si C es línea de curvatura de las superficies S_1 y S_2, entonces las superficies se cortan bajo ángulo constante.