Capítulo VII

Variedades diferenciables

1. Preliminares topológicos

En esta sección vamos a recordar algunas nociones básicas de topología, relativas a las topologías iniciales y a las topologías finales, que utilizaremos con frecuencia en este capítulo y en todos los capítulos siguientes.

1.1 (Topologías finales) Fijemos una familia $\{X_i\}_{i\in I}$ de espacios topológicos, un conjunto Y y una familia $\{f_i : X_i \to Y\}_{i\in I}$ de aplicaciones. Es claro que sobre Y existen topologías para las que todas las aplicaciones $\{f_i\}_{i\in I}$ son continuas, por ejemplo la topología trivial (cuyos únicos abiertos son el vacío y el total); está topología es muy poco fina y no aporta nada a la estructura puramente conjuntista de Y.

Nos preguntamos si existe la más fina topología sobre Y para la que son continuas las aplicaciones $\{f_i\}_{i\in I}$. La respuesta es que sí existe, y es la que tiene por abiertos la siguiente colección de subconjuntos de Y:

$$\left\{A \subseteq Y \,:\, f_i^{-1}(A) \text{ es abierto de } X_i \text{ para todo } i \in I\right\}. \tag{1.1}$$

No es difícil comprobar que (1.1) es en efecto una topología sobre Y, la cual tiene trivialmente la propiedad deseada. Esta topología se denomina *topología final* sobre Y definida por la familia de aplicaciones $\{f_i\}_{i\in I}$.

Ejercicio 1.2 (Propiedad universal de la topología final) Con la notación utilizada en el punto 1.1, dados un espacio topológico Z y una aplicación $g : Y \to Z$, pruébese que se cumple:

$$Y \xrightarrow{g} Z \text{ es continua} \quad\iff\quad \begin{array}{c}\text{la composición } X_i \xrightarrow{f_i} Y \xrightarrow{g} Z \\ \text{es continua para todo } i \in I\,.\end{array}$$

Ejemplos 1.3 (a) Consideremos sobre un espacio topológico X una relación de equivalencia "$\sim$", y sean $Y = X/\!\sim$ el conjunto cociente y $\pi : X \to Y$ el morfismo de paso al cociente. La *topología cociente* en Y es justamente la topología final definida por el morfismo de paso al cociente π, y sus abiertos son $\{U \subseteq Y \,:\, \pi^{-1}(U) \text{ es abierto de } X\}$. Dados un espacio topológico

Z y una aplicación $g : Y \to Z$, la "propiedad universal de la topología cociente" afirma que $Y \xrightarrow{g} Z$ es continua si y sólo si la composición $X \xrightarrow{\pi} Y \xrightarrow{g} Z$ es continua.

(b) Sea ahora $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y consideremos la unión disjunta $\sqcup_{i\in I} X_i$. Para cada $j \in I$ tenemos la inclusión natural $h_j : X_j \hookrightarrow \sqcup_{i\in I} X_i$, y la topología de la unión disjunta es la final definida por todas las inclusiones $\{h_i\}_{i\in I}$. Un subconjunto A de $\sqcup_{i\in I} X_i$ es abierto, si para cada $i \in I$ el corte de A con X_i es un abierto de X_i. Dados un espacio topológico Z y una aplicación $g : \sqcup_{i\in I} X_i \to Z$, la correspondiente propiedad universal afirma que $\sqcup_{i\in I} X_i \xrightarrow{g} Z$ es continua si y sólo si su restricción a cada espacio topológico de la familia $\{X_i\}_{i\in I}$ es continua.

1.4 (Topologías iniciales) Sean de nuevo $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos e Y un conjunto, y consideremos una familia de aplicaciones $\{g_i : Y \to X_i\}_{i\in I}$. Sobre Y existen topologías para las que todas las aplicaciones $\{g_i\}_{i\in I}$ son continuas, por ejemplo la topología discreta (todo subconjunto de Y es abierto); está topología es muy fina y no aporta nada a la estructura puramente conjuntista de Y.

Veamos cómo construir la menos fina topología sobre Y para la que son continuas las aplicaciones $\{g_i\}_{i\in I}$. Para dicha topología deben ser abiertos los subconjuntos de Y de la colección

$$\Gamma = \bigcup_{i\in I} \left\{ g_i^{-1}(U_i) \,:\, U_i \text{ abierto de } X_i \right\},$$

pero ocurre Γ no es una topología (ni siquiera es "base" para una topología porque no es cerrado frente a intersecciones finitas). Si consideramos la nueva familia de subconjuntos

$$\bar{\Gamma} = \left\{ \text{intersecciones finitas de subconjuntos de } \Gamma \right\},$$

entonces se prueba que $\bar{\Gamma}$ es base de una topología sobre Y (y por lo tanto los abiertos de dicha topología son las uniones arbitrarias de subconjuntos de $\bar{\Gamma}$). Por construcción, esta topología es la menos fina para la cual todas las aplicaciones $\{g_i\}_{i\in I}$ son continuas, y se denomina *topología inicial* sobre Y definida por la familia $\{g_i\}_{i\in I}$.

Ejercicio 1.5 (Propiedad universal de la topología inicial) Con la notación utilizada en el punto 1.4, dados un espacio topológico Z y una aplicación $f : Z \to Y$, pruébese que se cumple:

$$Z \xrightarrow{f} Y \text{ es continua} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{array}{c} \text{la composición } Z \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g_i} X_i \\ \text{es continua para todo } i \in I\,. \end{array}$$

Ejemplos 1.6 (a) Consideremos un espacio topológico X y un subconjunto suyo Y. La topología de subespacio inducida en Y por la topología de X es justamente la topología inicial definida por la inclusión $Y \hookrightarrow X$. Dados un espacio topológico Z y una aplicación $f : Z \to Y$, la correspondiente propiedad universal afirma en este caso que $Z \xrightarrow{f} Y$ es continua si y sólo si la composición $Z \xrightarrow{f} Y \hookrightarrow X$ es continua.

(b) Sea ahora $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y consideremos el producto directo $\Pi_{i\in I} X_i$. Para cada $j \in I$ tenemos la "proyección del producto sobre su j-ésimo factor",

$\pi_j : \Pi_{i\in I} X_i \to X_j$, que está definida como

$$\begin{array}{rcl} \pi_j : \Pi_{i\in I} X_i & \longrightarrow & X_j \\ (x_i)_{i\in I} & \longmapsto & x_j \,. \end{array}$$

Se define la *topología producto* sobre $\Pi_{i\in I} X_i$ como la topología inicial definida por todas las proyecciones $\{\pi_i\}_{i\in I}$. Según la descripción dada en el punto 1.4, los abiertos básicos para dicha topología son los subconjuntos del producto directo de la forma

$$\Pi_{i\in I} U_i \quad : \quad \begin{array}{l} U_i \text{ abierto de } X_i \text{ para todo } i \in I, \text{ siendo } U_i = X_i \\ \text{salvo a lo sumo para un número finito de índices}\,. \end{array}$$

Dados un espacio topológico Z y una aplicación $f : Z \to \Pi_{i\in I} X_i$, según la propiedad universal de la topología producto directo tenemos: $f : Z \to \Pi_{i\in I} X_i$ es continua si y sólo si su composición con todas las proyecciones son continuas.

1.7 En estos capítulos sólo consideraremos productos directos de un número finito de espacios topológicos $X_1, \dots, X_k$. Es claro que cada punto $x = (x_1, \dots, x_k) \in X_1 \times \cdots \times X_k$ está determinado por sus proyecciones sobre los factores: $x = \big(\pi_1(x), \dots, \pi_k(x)\big)$ porque $\pi_i(x) = x_i$ para $i = 1, \dots, k$. Lo anterior implica que si Z es un conjunto y $f : Z \to X_1 \times \cdots \times X_k$ es una aplicación, entonces existen aplicaciones únicas $f_1 : Z \to X_1, \dots, f_k : Z \to X_k$ tales que f se expresa en función de ellas como sigue

$$\begin{array}{rcl} f : Z & \longrightarrow & X_1 \times \cdots \times X_k \\ z & \longmapsto & f(z) = \big(f_1(z), \dots, f_k(z)\big). \end{array}$$

En efecto, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, $f_i : Z \to X_i$ es la composición $Z \xrightarrow{f} X_1 \times \cdots \times X_k \xrightarrow{\pi_i} X_i$ de la aplicación f con la proyección i-ésima. Abreviadamente escribimos $f = (f_1, \dots, f_k)$, y decimos que $f_1, \dots, f_k$ son las aplicaciones componentes de f.

Cuando Z es un espacio topológico, la propiedad universal del espacio producto directo dice que una aplicación $Z \xrightarrow{f=(f_1,\dots,f_k)} X_1 \times \cdots \times X_k$ es continua si y sólo si sus componentes $f_1, \dots, f_k$ son continuas.

Ejercicio 1.8 Sean X un espacio topológico, Y un conjunto y $f : X \to Y$ una aplicación, y consideremos en Y la topología final definida por f. Si A es un subconjunto de Y, entonces sobre A pueden considerarse dos topologías que en general son distintas: la de subespacio inducida por la de Y, y la final definida por la aplicación $f : f^{-1}(A) \to A$. Pruébese que cuando A es un abierto de Y ambas topologías coinciden.

2. Variedades topológicas

Definición 2.1 Una *variedad topológica* de dimensión n es un espacio topológico Hausdorff y de base numerable (tiene una base de abiertos que es numerable), en el que cada punto tiene un entorno abierto homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$.

Nota **2.2** En la definición anterior, la condición de ser Hausdorff no es redundante porque no es consecuencia de las otras. La "recta con dos orígenes" es localmente homeomorfa a $\mathbb{R}$ pero no es un espacio topológico Hausdorff.

Lema 2.3 *Dados $r > 0$ y un punto $p \in \mathbb{R}^n$, la bola abierta de $\mathbb{R}^n$ centrada en p y de radio r, $B(p,r) = \{x \in : |p - x| < r\}$ es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$ (donde $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ denota la norma euclídea de $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$).*

Demostración. Después de hacer una traslación y una homotecia (que son homeomorfismos), podemos suponer que el centro de la bola es $p = 0$ (el origen de $\mathbb{R}^n$) y su radio es $r = 1$, y es claro que las aplicaciones

$$\begin{array}{rcl} B(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{1-|x|^2}}\, x \,, \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & B(0,1) \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}}\, x \,, \end{array}$$

son continuas y mutuamente inversas. ∎

Corolario 2.4 *Una variedad topológica de dimensión n es un espacio topológico Hausdorff y de base numerable en el que cada punto tiene un entorno abierto homeomorfo a todo $\mathbb{R}^n$.*

Ejemplos 2.5 (a) Trivialmente, todo abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$ (y en particular todo $\mathbb{R}^n$) es una variedad topológica de dimensión n.

(b) Es fácil comprobar que todo abierto no vacío de una variedad topológica es una variedad topológica de la misma dimensión.

(c) Dado $n \geq 1$ sea $S_n = \big\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,:\, x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\big\}$ la esfera n-dimensional (de radio 1), que con la topología inducida por la de $\mathbb{R}^{n+1}$ es un espacio topológico compacto (cerrado y acotado de $\mathbb{R}^{n+1}$). Veamos que S_n es una variedad topológica de dimensión n. Si para cada $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ consideramos las "semiesferas abiertas"

$$U_i^+ = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S_n \,:\, x_i > 0\}\,, \qquad U_i^- = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S_n \,:\, x_i < 0\}\,,$$

entonces $\big\{U_1^+, U_1^-, \ldots, U_{n+1}^+, U_{n+1}^-\big\}$ es un recubrimiento abierto de S_n, y terminamos si probamos que cada uno de dichos abiertos es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$. Demostrémoslo, por ejemplo, para U_1^-. Si $D_n = \big\{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, y_1^2 + \cdots + y_n^2 < 1\big\}$ es la "bola abierta unidad" de $\mathbb{R}^n$, entonces las aplicaciones

$$\begin{array}{rcl} U_1^- & \longrightarrow & D_n \\ (x_1, \ldots, x_{n+1}) & \longmapsto & (x_2, \ldots, x_{n+1})\,, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} D_n & \longrightarrow & U_1^- \\ (y_1, \ldots, y_n) & \longmapsto & \Big(-\sqrt{1 - y_1^2 - \cdots - y_n^2}\,, y_1, \ldots, y_n\Big)\,, \end{array}$$

son continuas e inversa una de la otra.

(d) El producto directo de un número finito de variedades topológicas es una variedad topológica cuya dimensión es igual a la suma de las dimensiones de las variedades factores (compruébese).

(e) Se define el *toro n-dimensional* como la variedad topológica T_n definida por la igualdad

$$T_n = S_1 \times \cdots \times S_1 \,.$$

Es claro que la variedad T_n es compacta y de dimensión n. Usualmente, la palabra "toro" (a secas) se utiliza para denominar al toro 2-dimensional T_2.

Veamos que el toro es homeomorfo a la "superficie de revolución" de $\mathbb{R}^3$ que se obtiene al girar una circunferencia alrededor de una recta que está en el mismo plano de la circunferencia y que no la corta (véase el problema IV.5.3); denotemos esta superficie por D. Podemos suponer, haciendo una traslación y un giro si es necesario, que la recta y la circunferencia de las que se parte para generar a D son tales que la recta es el "eje z" y la circunferencia está en el plano $y = 0$ y tiene por centro un punto de la forma $(b, 0, 0)$ con $b > 0$; si a es su radio entonces debe ser $a < b$. En esas condiciones sabemos que la aplicación continua

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & D \\ (\alpha, \beta) & \longmapsto & \big((b + a\cos\beta)\cos\alpha\,, (b + a\cos\beta)\,\mathrm{sen}\,\alpha\,, a\,\mathrm{sen}\,\beta\big) \end{array}$$

es epiyectiva. Por otra parte tenemos la biyección $g : T_2 \to D$ definida del siguiente modo: dado $p = (p_1, p_2) \in T_2 = S_1 \times S_1$, existen $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ tales que

$$p_1 = (\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta) \in S_1\,, \qquad p_2 = (\cos\varphi, \mathrm{sen}\,\varphi) \in S_1\,,$$

y definimos la imagen de p por g como la imagen de (θ, φ) por f, $g(p) := f(\theta, \varphi)$; g está bien definida porque los números reales θ y φ están determinados por $p = (p_1, p_2)$ salvo múltiplos enteros de 2π, y es claro que g es biyectiva.

Ahora queremos ver que g es un homeomorfismo, y como T_2 es compacto y D es Hausdorff bastará probar que g es continua [1], lo cual es una cuestión local. Veamos, por ejemplo, que g es continua sobre el abierto $U_2^+ \times U_2^+$, donde (véase el ejemplo (c) anterior)

$$U_2^+ = \{(x, y) \in S_1 \,:\, y > 0\} = \{(\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta) \,:\, 0 < \theta < \pi\}\,.$$

Tenemos el homeomorfismo

$$\begin{array}{rcl} (0, \pi) & \xrightarrow{\sim} & U_2^+ \\ \theta & \longmapsto & (\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta)\,, \end{array}$$

cuyo homeomorfismo inverso es

$$\begin{array}{rcl} U_2^+ & \xrightarrow{\sim} & (0, \pi) \\ (x, y) & \longmapsto & \arccos x\,. \end{array}$$

Concluimos que la aplicación $g : U_2^+ \times U_2^+ \to D$ es continua porque es igual a la composición de las siguientes aplicaciones continuas

$$U_2^+ \times U_2^+ \xrightarrow{\sim} (0, \pi) \times (0, \pi) \xrightarrow{f} D\,.$$

[1] Un conocido resultado de Topología General afirma que *toda aplicación continua definida en un compacto y valorada en un Hausdorff es cerrada.*

(f) El espacio proyectivo real n-dimensional es el cociente $\mathbb{P}_n = \big(\mathbb{R}^{n+1} - 0\big)/\!\sim$, donde la relación de equivalencia " $\sim$ " está definida como sigue: dados $e, v \in \mathbb{R}^{n+1} - 0$,

$$e \sim v \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{existe } \ \lambda \in \mathbb{R}^* \ \text{ tal que } \ e = \lambda v\,.$$

Sobre $\mathbb{P}_n$ se considera la topología final de la aplicación canónica de paso al cociente $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - 0 \to \mathbb{P}_n$, $x \mapsto \langle x \rangle$, es decir, la topología cociente. Dentro de $\mathbb{R}^{n+1} - 0$ está la esfera S_n y se cumple $\pi(S_n) = \mathbb{P}_n$, de modo que $\mathbb{P}_n$ es un espacio topológico compacto. Además la aplicación π es abierta: si U es un abierto de $\mathbb{R}^{n+1} - 0$, entonces $\pi(U)$ es abierto de $\mathbb{P}_n$ porque λU es abierto de $\mathbb{R}^{n+1} - 0$ para todo λ no nulo y

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}^*} \lambda U\,.$$

Veamos que $\mathbb{P}_n$ es una variedad topológica de dimensión n. Consideremos en $\mathbb{P}_n$ las coordenadas homogéneas $(x_1, \dots, x_{n+1})$ que definen las coordenadas cartesianas $(x_1, \dots, x_{n+1})$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Sea V el hiperplano vectorial de $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por la ecuación $x_{n+1} = 0$ y sea $H = \pi(V)$; es decir, H es el hiperplano de $\mathbb{P}_n$ cuya ecuación en coordenadas homogéneas es $x_{n+1} = 0$. Como $\pi^{-1}(H) = V - 0$ es un cerrado de $\mathbb{R}^{n+1} - 0$, se sigue que H es un cerrado de $\mathbb{P}_n$ y por lo tanto $\mathbb{A}_n := \mathbb{P}_n - H$ es un abierto de $\mathbb{P}_n$. Probemos que la aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathbb{A}_n \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) \quad &\longmapsto \quad \left(\tfrac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \tfrac{x_n}{x_{n+1}}\right)\,, \end{aligned}$$

que está bien definida y es biyectiva, es un homeomorfismo. Por una parte, $\mathbb{A}_n$ está dotada de la topología final de la aplicación $\pi^{-1}(\mathbb{A}_n) \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}_n$ porque $\mathbb{A}_n$ es abierto de $\mathbb{P}_n$ (véase el ejercicio 1.8), y por lo tanto f es continua porque lo es la composición

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^{n+1} - \{x_{n+1} = 0\} = \pi^{-1}(\mathbb{A}_n) & \xrightarrow{\ \pi\ } & \mathbb{A}_n & \xrightarrow{\ f\ } & \mathbb{R}^n\,. \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) & \longmapsto & & & \left(\tfrac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \tfrac{x_n}{x_{n+1}}\right). \end{array}$$

Por otra parte, si consideramos la aplicación $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1} - \{x_{n+1} = 0\}$, $h(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_n, 1)$, entonces la aplicación inversa de f es la composición

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\ h\ } \mathbb{R}^{n+1} - \{x_{n+1} = 0\} \xrightarrow{\ \pi\ } \mathbb{A}_n\,,$$

y por tanto f^{-1} es también continua.

De todo lo dicho se sigue fácilmente que un recubrimiento de $\mathbb{P}_n$ formado por abiertos que son homeomorfos a abiertos de $\mathbb{R}^n$ lo forman los "abiertos afines"

$$U_i = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{P}_n \,:\, x_i \neq 0\}\,, \qquad i = 1, \dots, n+1\,,$$

con los homeomorfismos $U_i \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right)$.

Observación **2.6** La dimensión de una variedad topológica es un invariante topológico, esto es, si X e Y son variedades topológicas homeomorfas, entonces $\dim X = \dim Y$. Esto es consecuencia de un importante resultado de topología general (conocido como *teorema del rango*), que afirma que si $\mathbb{R}^n$ es homeomorfo a una abierto de $\mathbb{R}^m$ entonces debe ser $n = m$.

3. Abiertos coordenados topológicos

Salvo que se diga lo contrario, todos los abiertos que consideremos en adelante los supondremos no vacíos.

3.1 Sea X un espacio topológico. El conjunto de todas funciones continuas reales definidas sobre X lo denotaremos $\mathcal{C}(X)$,

$$\mathcal{C}(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ es continua}\} .$$

Recordemos que $\mathcal{C}(X)$ con la suma y el producto usuales de funciones tiene estructura de anillo conmutativo (la suma de dos funciones continuas es continua, y el producto de dos funciones continuas es también continua); además, el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales se identifica de modo natural con el subanillo de $\mathcal{C}(X)$ formado por las funciones constantes. Lo anterior significa que $\mathcal{C}(X)$ es una $\mathbb{R}$-álgebra.

Dada una aplicación continua $\varphi : X \to Y$, la composición con φ define la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \varphi^* : \mathcal{C}(Y) & \longrightarrow & \mathcal{C}(X) \\ f & \longmapsto & \varphi^*(f) := f \circ \varphi , \end{array}$$

que es un morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras, es decir, es un morfismo de anillos que deja invariantes las funciones constantes (compruébese). Es fácil ver que se cumplen las siguientes propiedades:

(a) si $\phi : Y \to Z$ es otra aplicación continua, entonces $(\phi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \phi^*$;

(b) si $X = Y$ y $\varphi = I_X$ (= identidad de X), entonces $\varphi^* = I_{\mathcal{C}(X)}$ (= identidad de $\mathcal{C}(X)$).

Como consecuencia de (a) y (b) se sigue que si $\varphi : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $\varphi^* : \mathcal{C}(Y) \to \mathcal{C}(X)$ es un isomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras (su isomorfismo inverso es el morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras $(\varphi^{-1})^*$ definido por la aplicación continua $\varphi^{-1} : Y \to X$).

Definición 3.2 Sea X una variedad topológica de dimensión n. Un *abierto coordenado* (en sentido topológico) de X es un abierto no vacío U de X junto con n funciones continuas $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{C}(U)$, tales que la aplicación

$$U \xrightarrow{(u_1,\dots,u_n)} \mathbb{R}^n$$

establece un homeomorfismo de U con un abierto $\bar{U}$ de $\mathbb{R}^n$; las funciones $u_1, \dots, u_n$ se denominan *funciones coordenadas* (o simplemente *coordenadas*) del abierto coordenado $(U; u_1, \dots, u_n)$.

Por definición de variedad topológica, X puede recubrirse por abiertos coordenados.

Ejemplos 3.3 (a) Sean $(x_1, \dots, x_n)$ las coordenadas cartesianas usuales sobre $\mathbb{R}^n$. Recordemos que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, la función coordenada $x_i \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ es la proyección de $\mathbb{R}^n$ sobre su factor i-ésimo,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{x_i} & \mathbb{R} \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \longmapsto & \lambda_i . \end{array}$$

Trivialmente, $(\mathbb{R}^n; x_1, \dots, x_n)$ es un abierto coordenado de $\mathbb{R}^n$, es decir, $(x_1, \dots, x_n)$ son coordenadas topológicas sobre $\mathbb{R}^n$; el homeomorfismo $\mathbb{R}^n \xrightarrow{(x_1,\dots,x_n)} \mathbb{R}^n$ es la identidad.

(b) Sea $(U; u_1, \dots, u_n)$ un abierto coordenado de una variedad topológica X. Si V es un abierto no vacío de U, la restricción de las funciones $u_1, \dots, u_n$ a V, que denotaremos igual, hacen que $(V; u_1, \dots, u_n)$ sea también abierto coordenado de X.

3.4 Fijemos un abierto coordenado $(U; u_1, \dots, u_n)$ en una variedad topológica X. Dada una función continua sobre U, $f \in \mathcal{C}(U)$, veamos cómo obtener la expresión de f en función de las coordenadas $u_1, \dots, u_n$. Denotemos la aplicación $U \xrightarrow{(u_1,\dots,u_n)} \mathbb{R}^n$ que definen las coordenadas como $\varphi = (u_1, \dots, u_n)$, y sea $\bar{U}$ el abierto de $\mathbb{R}^n$ tal que $\varphi : U \to \bar{U}$ es un homeomorfismo. Entonces, según lo dicho en 3.1, la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi^* : \mathcal{C}(\bar{U}) \quad &\longrightarrow \quad \mathcal{C}(U) \\ F \quad &\longmapsto \quad \varphi^*(F) = F \circ \varphi \end{aligned}$$

es un isomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras, y por lo tanto existe una única función continua F sobre $\bar{U}$ tal que $f = F \circ \varphi$. Si la expresión de F en las coordenadas cartesianas de $\bar{U}$ es $F = F(x_1, \dots, x_n)$, entonces para todo $x \in U$ tenemos $f(x) = F(\varphi(x)) = F(u_1(x), \dots, u_n(x))$. Haciendo abstracción del punto x de U escribiremos

$$f = F(u_1, \dots, u_n)\,,$$

que es la expresión de $f : U \to \mathbb{R}$ en función de las coordenadas $u_1, \dots, u_n$.

Ejemplo 3.5 Consideremos la variedad topológica $X = \mathbb{R}$ y sobre ella la función continua

$$\begin{aligned} f : X \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \alpha \quad &\longmapsto \quad |\alpha|\,. \end{aligned}$$

Si x es la coordenada cartesiana de $\mathbb{R}$ (es decir, la función identidad $\mathbb{R} = X \xrightarrow{x} \mathbb{R}$), entonces la expresión de f en esa coordenada es clara:

$$\boxed{f(x) = |x|}\,.$$

Por otra parte, la función $u : X \to \mathbb{R}$ definida como

$$u(\alpha) = \begin{cases} +\sqrt{|\alpha|} & \text{si } \alpha \geq 0\,, \\ -\sqrt{|\alpha|} & \text{si } \alpha < 0\,, \end{cases}$$

es un homeomorfismo, y por tanto $(X; u)$ es un abierto coordenado de X. Es claro que $f = u^2$, de modo que la expresión de f en función de la coordenada u es

$$\boxed{f(u) = u^2}\,;$$

es decir, la única función $F = F(x)$ sobre $\mathbb{R}$ para la que la composición $X \xrightarrow{u} \mathbb{R} \xrightarrow{F} \mathbb{R}$ es igual a $f : X \to \mathbb{R}$ es $F(x) = x^2$.

3.6 (Estructura diferenciable de $\mathbb{R}^n$) Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función continua sobre un abierto U de $\mathbb{R}^n$. Dados un índice $i \in \{1, \dots, n\}$ y un punto $(a_1, \dots, a_n) \in U$, recordemos que se define la *derivada parcial* de f respecto de la coordenada i-ésima en el punto $(a_1, \dots, a_n)$ como el siguiente límite (cuando existe)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t}\,.$$

Cuando el anterior límite existe en todo punto de U se tiene la función "derivada parcial" de f respecto de la coordenada x_i,

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial f}{\partial x_i} : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto \tfrac{\partial f}{\partial x_i}(p) \,. \end{aligned}$$

Se dice que f es *infinitamente diferenciable* (ó de clase $\mathcal{C}^\infty$) si admite tantas derivadas parciales como se desee y el resultado es siempre continuo, esto es, si para todo $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ existe y es continua sobre U la función

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \,,$$

en cuyo caso se escribe $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Como ya sabemos, la suma y el producto de funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ son de clase $\mathcal{C}^\infty$, y las funciones constantes son de clase $\mathcal{C}^\infty$; es decir, $\mathcal{C}^\infty(U)$ es una subálgebra de la $\mathbb{R}$-álgebra $\mathcal{C}(U)$. En adelante las funciones de $\mathcal{C}^\infty(U)$ las llamaremos simplemente "diferenciables".

3.7 Sea ahora $(U; u_1, \ldots, u_n)$ un abierto coordenado de una variedad topológica X de dimensión n, y sea $\bar{U}$ el abierto de $\mathbb{R}^n$ tal que la aplicación $U \xrightarrow{\varphi=(u_1,\ldots,u_n)} \bar{U}$ es un homeomorfismo. Vamos a trasladar a U mediante dicho homeomorfismo la estructura diferenciable usual de $\bar{U}$.

Fijemos una función continua $f \in \mathcal{C}(U)$ y sea $F = F(x_1, \ldots, x_n)$ la única función continua sobre $\bar{U}$ que cumple $f = F(u_1, \ldots, u_n)$ (véase 3.4). Definimos la derivada parcial de f respecto de la función coordenada u_i en un punto $p \in U$ como

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u_i}(p) &:= \lim_{t\to 0} \frac{F(u_1(p), \ldots, u_i(p)+t, \ldots, u_n(p)) - F(u_1(p), \ldots, u_n(p))}{t} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x_i}(u_1(p), \ldots, u_n(p)) \,, \end{aligned}$$

cuando el anterior límite exista. Claramente, la función $\frac{\partial f}{\partial u_i}$ está definida sobre U y es continua si y sólo si la función $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ está definida sobre $\bar{U}$ y es continua, en cuyo caso tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i}(u_1, \ldots, u_n) \,. \tag{3.1}$$

Diremos que la función f es *diferenciable respecto de las coordenadas* $u_1, \ldots, u_n$ si existen todas las derivadas parciales respecto de dichas coordenadas y son continuas. El conjunto de las funciones de $\mathcal{C}(U)$ que son diferenciables respecto de $u_1, \ldots, u_n$ se denotará

$$\mathcal{C}^\infty(U; u_1, \ldots, u_n) \,.$$

De la definición se sigue que f es diferenciable respecto de $u_1, \ldots, u_n$ si y sólo si F es diferenciable en el sentido usual (respecto de las coordenadas cartesianas de $\bar{U}$). Es decir, mediante el isomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras $\mathcal{C}(\bar{U}) \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{C}(U)$, las funciones de $\mathcal{C}^\infty(\bar{U})$ se corresponden con las funciones de $\mathcal{C}^\infty(U, u_1, \ldots, u_n)$, lo que significa que es conmutativo el cuadrado

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^\infty(\bar{U}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi^*"', "\wr"] & \mathcal{C}(\bar{U}) \arrow[d, "\varphi^*", "\wr"'] \\ \mathcal{C}^\infty(U; u_1, \ldots, u_n) \arrow[r, hook] & \mathcal{C}(U) \,. \end{tikzcd}$$

Como consecuencia se sigue que $\mathcal{C}^\infty(U; u_1, \dots, u_n)$ es una subálgebra de $\mathcal{C}(U)$ (porque $\mathcal{C}^\infty(\bar{U})$ es una subálgebra de $\mathcal{C}(\bar{U})$ y φ^* transforma subálgebras en subálgebras).

3.8 Nótese que la igualdad (3.1) puede escribirse como

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = \varphi^* \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right),$$

lo que significa que es conmutativo el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\bar{U}) & \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_i}} & \mathcal{C}^\infty(\bar{U}) \\ {\scriptstyle \varphi^*} \big\downarrow \wr & & \wr \big\downarrow {\scriptstyle \varphi^*} \\ \mathcal{C}^\infty(U; u_1, \dots, u_n) & \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial u_i}} & \mathcal{C}^\infty(U; u_1, \dots, u_n) \, . \end{array}$$

La fórmula (3.1) se generaliza claramente de la siguiente manera (compruébese): para todo $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ se cumple

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} f}{\partial u_1^{\alpha_1} \cdots \partial u_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} F}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} (u_1, \dots, u_n) \, .$$

Después de todo lo dicho, y dado que toda variedad topológica está recubierta por abiertos coordenados, parece natural pensar que una manera de dotar a una variedad topológica de estructura diferenciable sería construyendo dicha estructura localmente a través de los abiertos coordenados. Pero nos encontramos con el problema de que la estructura diferenciable dada en un abierto coordenado de una variedad topológica depende fuertemente de las coordenadas, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.9 La función f del ejemplo 3.5 es diferenciable respecto de la coordenada u pero no es diferenciable respecto de la coordenada x: $f(u) = u^2$ y por tanto $f \in \mathcal{C}^\infty(X; u)$, pero $f \notin \mathcal{C}^\infty(X; x)$ porque $f(x) = |x|$.

El próximo lema aclara cuándo dos sistemas de coordenadas sobre un mismo abierto de una variedad topológica determinan las mismas funciones diferenciable. Antes, aclaremos en el siguiente punto la noción de "cambio de coordenadas".

3.10 Sean $u_1, \dots, u_n$ y $v_1, \dots, v_n$ dos sistemas de coordenadas sobre un abierto U de una variedad topológica, y consideremos los abiertos $\bar{U}$ y $\bar{V}$ de $\mathbb{R}^n$ tales que las aplicaciones $U \xrightarrow{(u_1, \dots, u_n)} \bar{U}$ y $U \xrightarrow{(v_1, \dots, v_n)} \bar{V}$ son homeomorfismos.

Como $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{C}(U)$, existen funciones continuas $h_i = h_i(x_1, \dots, x_n)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, sobre $\bar{U}$ tales que

$$\left. \begin{array}{c} v_1 = h_1(u_1, \dots, u_n) \\ \vdots \\ v_n = h_n(u_1, \dots, u_n) \end{array} \right\} . \tag{3.2}$$

Las de (3.2) se llaman *ecuaciones de cambio de las coordenadas* $v_1, \dots, v_n$ *a las coordenadas* $u_1, \dots, u_n$, ya que permiten obtener la expresión de una función $f \in \mathcal{C}(U)$ en las coordenadas $u_1, \dots, u_n$ si se conoce cómo se expresa f en las coordenadas $v_1, \dots, v_n$. En efecto, si $G = G(x_1, \dots, x_n)$ es la única función continua sobre $\bar{V}$ que cumple $f = G(v_1, \dots, v_n)$, entonces la única función $F = F(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{C}(\bar{U})$ que cumple $f = F(u_1, \dots, u_n)$ es (compruébese)

$$F(x_1, \dots, x_n) = G\big(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_n(x_1, \dots, x_n)\big).$$

Definición 3.11 Con la notación del punto 3.10 anterior, se dice que *el cambio de las coordenadas* $v_1, \dots, v_n$ *a las coordenadas* $u_1, \dots, u_n$ *es diferenciable*, si las funciones $h_1, \dots, h_n$ son diferenciables en el sentido usual, esto es, $h_1, \dots, h_n \in \mathcal{C}^\infty(\bar{U})$.

Claramente, que el cambio de coordenadas de $v_1, \dots, v_n$ a $u_1, \dots, u_n$ sea diferenciable es equivalente a que las funciones $v_1, \dots, v_n$ sean diferenciables respecto de las coordenadas $u_1, \dots, u_n$, esto es, $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{C}^\infty(U; u_1, \dots, u_n)$.

Lema 3.12 *Sean* $u_1, \dots, u_n$ *y* $v_1, \dots, v_n$ *dos sistemas de coordenadas sobre un abierto* U *de una variedad topológica. Se cumple la igualdad*

$$\mathcal{C}^\infty(U; v_1, \dots, v_n) = \mathcal{C}^\infty(U; u_1, \dots, u_n)\,,$$

si y sólo si los cambios de coordenadas entre los dos sistemas son diferenciables (es decir, $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{C}^\infty(U; u_1, \dots, u_n)$ *y* $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{C}^\infty(U; v_1, \dots, v_n)$*).*

Demostración. Basta probar la equivalencia

$$\mathcal{C}^\infty(U; v_1, \dots, v_n) \subseteq \mathcal{C}^\infty(U; u_1, \dots, u_n) \quad \iff \quad v_1, \dots, v_n \in \mathcal{C}^\infty(U; u_1, \dots, u_n)\,.$$

La implicación "$\Rightarrow$" es trivial porque $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{C}^\infty(U; v_1, \dots, v_n)$. Para probar la otra implicación, sea $f \in \mathcal{C}^\infty(U; v_1, \dots, v_n)$ y veamos que si $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{C}^\infty(U; u_1, \dots, u_n)$ entonces $f \in \mathcal{C}^\infty(U; u_1, \dots, u_n)$. Si G y $h_1, \dots, h_n$ son las funciones definidas en ciertos abiertos de $\mathbb{R}^n$ que cumplen $f = G(v_1, \dots, v_n)$ y $v_i = h_i(u_1, \dots, u_n)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces $f = F(u_1, \dots, u_n)$ donde

$$F(x_1, \dots, x_n) = G\big(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_n(x_1, \dots, x_n)\big)$$

(véase 3.10). Como G es diferenciable en el sentido usual (porque f es diferenciables respecto de las coordenadas $v_1, \dots, v_n$) y $h_1, \dots, h_n$ son también diferenciables en el sentido usual (porque el cambio de coordenadas de $v_1, \dots, v_n$ a $u_1, \dots, u_n$ es diferenciable), concluimos que F es diferenciable en el sentido usual; por lo tanto f es diferenciable respecto de las coordenadas $u_1, \dots, u_n$. ▮

4. Espacios anillados

Ya hemos dicho que en una variedad topológica no tiene sentido decir si una función continua es ó no diferenciable. En la siguiente sección veremos cómo dotar a una variedad topológica de estructura diferenciable: consistirá en determinar, con ciertas condiciones, cuáles funciones continuas son diferenciables. Dichas condiciones son de carácter local, y la noción apropiada para describirlas es la de "haz de funciones".

Definición 4.1 Un *haz de funciones* sobre un espacio topológico X es una "aplicación" $\mathcal{O}_X$ que asigna a cada abierto U de X una subálgebra $\mathcal{O}_X(U)$ de $\mathcal{C}(U)$, cumpliéndose

(a) *la restricción de funciones del haz son funciones del haz*: dados abiertos U, V de X con $V \subset U$, si $f \in \mathcal{O}_X(U)$ entonces $f_{|_V} \in \mathcal{O}_X(V)$;

(b) *toda función que localmente es del haz pertenece al haz*: dados un abierto U de X, un recubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ de U y una función $f : U \to \mathbb{R}$, si $f_{|_{U_i}} \in \mathcal{O}_X(U_i)$ para todo $i \in I$, entonces $f \in \mathcal{O}_X(U)$.

Abreviadamente, las condiciones (a) y (b) anteriores se expresan simultáneamente como sigue: *una función pertenece al haz si y sólo si pertenece localmente al haz.*

Definición 4.2 Un *espacio anillado* es un par $(X, \mathcal{O}_X)$ donde X es un espacio topológico y $\mathcal{O}_X$ es un haz de funciones sobre X.

Ejemplos 4.3 (a) Si $\mathcal{C}$ denota el "haz de funciones continuas" sobre X (para todo abierto U de X es, como hasta ahora, $\mathcal{C}(U)$ la $\mathbb{R}$-álgebra de todas las funciones continuas sobre U), entonces $(X, \mathcal{C})$ es un espacio anillado.

(b) Si X es un abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces para cada abierto U de X tenemos la $\mathbb{R}$-álgebra $\mathcal{C}^\infty(U)$ de las funciones diferenciables sobre U. De las propiedades de las funciones diferenciables se sigue fácilmente que $(X, \mathcal{C}^\infty)$ es un espacio anillado.

(c) Fijemos un espacio topológico X. Las funciones continuas y acotadas no son haz, ya que la propiedad "ser acotada" no es local. Las funciones continuas localmente acotadas sí son haz. Del mismo modo, las funciones constantes no son haz, pero las funciones localmente constantes sí son haz.

(d) Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado y sea U un abierto de X. El haz $\mathcal{O}_X$ induce de modo natural un haz de funciones sobre U, que denotaremos $\mathcal{O}_U$, del siguiente modo: dado V abierto de U, V es también abierto de X y se define $\mathcal{O}_U(V) := \mathcal{O}_X(V)$.

Definición 4.4 Dados espacios anillados $(X, \mathcal{O}_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y)$, llamaremos *morfismo de espacios anillados* del primero en el segundo a toda aplicación $\varphi : X \to Y$ que satisfaga:

(a) φ es continua;

(b) componer φ con funciones del haz $\mathcal{O}_Y$ da lugar a funciones del haz $\mathcal{O}_X$: para cada abierto V de Y y cada $f \in \mathcal{O}_Y(V)$ se cumple $\varphi^*(f) = f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V))$.

Ejemplos 4.5 (a) Considérense dos espacios topológicos X e Y como espacios anillados (con sus respectivos haces de funciones continuas). Toda aplicación continua de X en Y es un morfismo de espacios anillados. Además se cumple que si X e Y son "completamente regulares", entonces los morfismos de espacios anillados de X en Y son justamente las aplicaciones continuas de X en Y.[2]

(b) Sean X un abierto de $\mathbb{R}^n$, Y un abierto de $\mathbb{R}^m$ y $\varphi : X \to Y$ una aplicación cualquiera. Si $(y_1, \dots, y_m)$ son las coordenadas cartesianas (de $\mathbb{R}^m$) sobre Y y para cada $j \in \{1, \dots, m\}$ denotamos $f_j := \varphi^*(y_j) = y_j \circ \varphi$, entonces $f_j : X \to \mathbb{R}$ es la j-ésima función componente de φ, es decir, $\varphi = (f_1, \dots, f_m)$. Según la definición de "aplicación diferenciable" que se da en Análisis

[2] Un espacio topológico X se dice que es *completamente regular*, si la colección $\{f^{-1}(0) : f \in \mathcal{C}(X)\}$ es base de cerrados en X.

Matemático, la aplicación φ es diferenciable cuando sus componentes son funciones diferenciables, esto es, cuando $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{C}^\infty(X)$. En dichos cursos se prueba que la composición de aplicaciones diferenciables entre abiertos de espacios euclídeos es diferenciable.

Si se consideran X e Y dotados con sus respectivos haces de funciones diferenciables, entonces se cumple: φ es diferenciable $\Leftrightarrow$ φ es un morfismo de espacios anillados. En efecto, para probar la implicación "$\Rightarrow$" basta tener en cuenta que, como acabamos de recordar, la composición de aplicaciones diferenciables es diferenciable. Veamos la implicación "$\Leftarrow$", para lo cual supongamos que φ es un morfismo de espacios anillados; entonces para cada $j \in \{1, \dots, m\}$ se cumple que $f_j = y_j \circ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(X)$ porque $y_j \in \mathcal{C}^\infty(Y)$ (la función coordenada j-ésima $Y \xrightarrow{y_j} \mathbb{R}$ es diferenciable); por lo tanto la aplicación φ es diferenciable porque sus componentes son funciones diferenciables.

(c) Dado un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$, para cada abierto U de X la inclusión $U \hookrightarrow X$ es un morfismo de espacios anillados si se considera U con el haz de funciones inducido por el de X. En particular, la aplicación identidad $I_X : X \to X$ es un morfismo de espacios anillados.

Ejercicio 4.6 Pruébense las siguientes propiedades (que son consecuencia inmediata de las definiciones):

(a) La composición de morfismos de espacios anillados es un morfismo de espacios anillados.

(b) Una aplicación $\varphi : X \to Y$ entre espacios anillados es un morfismo de espacios anillados si y sólo si φ es localmente un morfismo de espacios anillados (esto es, existe un recubrimiento abierto $\{U_i\}_{i \in I}$ de X tal que $\varphi_{|_{U_i}} : U_i \to Y$ es morfismo de espacios anillados para todo $i \in I$, donde sobre cada U_i se considera el haz inducido por el de X).

(c) Sea U un abierto de un espacio anillado X. La inclusión natural $U \hookrightarrow X$ cumple la siguiente propiedad universal: dado un espacio anillado Z, una aplicación $\varphi : Z \to U$ es morfismo de espacios anillados si y sólo si la composición $Z \xrightarrow{\varphi} U \hookrightarrow X$ es morfismo de espacios anillados.

Definición 4.7 Un morfismo de espacios anillados $\varphi : X \to Y$ se dice que es un *isomorfismo* (*de espacios anillados*), si existe otro morfismo de espacios anillados $\psi : Y \to X$ tal que $\psi \circ \varphi = I_X$ y $\varphi \circ \psi = I_Y$.

Con la notación anterior, es claro que si existe ψ, entonces φ es biyectiva y se cumple $\psi = \varphi^{-1}$. Por lo tanto tenemos: *el morfismo de espacios anillados φ es isomorfismo si y sólo si es una aplicación biyectiva y su aplicación inversa $\varphi^{-1} : Y \to X$ es morfismo de espacios anillados*. Un enunciado equivalente al anterior es: *el morfismo de espacios anillados φ es isomorfismo si y sólo si es homeomorfismo y su aplicación inversa $\varphi^{-1} : Y \to X$ es morfismo de espacios anillados*.

Lema 4.8 *Un morfismo de espacios anillados $\varphi : X \to Y$ es isomorfismo si y sólo si se cumplen las dos siguientes propiedades:*

(i) *$\varphi : X \to Y$ es un homeomorfismo;*

(ii) *para cada abierto V de Y, el morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras*

$$\begin{aligned} \varphi^* : \mathcal{O}_Y(V) &\longrightarrow \mathcal{O}_X\big(\varphi^{-1}(V)\big) \\ f &\longmapsto \varphi^*(f) := f \circ \varphi \end{aligned}$$

es isomorfismo.

Demostración. Supongamos en primer lugar que φ es un isomorfismo de espacios anillados, y por tanto es un homeomorfismo; denotemos $\psi = \varphi^{-1}$. Dado V abierto de Y sea $U = \varphi^{-1}(V)$, en cuyo caso $V = \psi^{-1}(U)$. Es claro que los morfismos de $\mathbb{R}$-álgebras $\mathcal{O}_Y(V) \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{O}_X(U)$ y $\mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\psi^*} \mathcal{O}_X(V)$ son inversos uno del otro, ya que

$$\varphi^* \circ \psi^* = (\psi \circ \varphi)^* = \text{identidad de } \mathcal{O}_X(U)\,,$$
$$\psi^* \circ \varphi^* = (\varphi \circ \psi)^* = \text{identidad de } \mathcal{O}_Y(V)\,.$$

Por lo tanto $\mathcal{O}_Y(V) \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{O}_X(U)$ es un isomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras.

Recíprocamente, supongamos ahora que se cumplen las propiedades (i) y (ii) del enunciado. En particular φ es homeomorfismo; denotemos $\psi = \varphi^{-1}$. Debemos probar que ψ es morfismo de espacios anillados, esto es, que transforma funciones del haz $\mathcal{O}_X$ en funciones del haz $\mathcal{O}_Y$. Dado U abierto de X sea $V = \psi^{-1}(U)$. Las aplicaciones continuas $U \xrightarrow{\varphi} V$ y $V \xrightarrow{\psi} U$ son inversa una de la otra y por tanto los morfismos de $\mathbb{R}$-álgebras $\mathcal{C}(V) \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{C}(U)$ y $\mathcal{C}(U) \xrightarrow{\psi^*} \mathcal{C}(V)$ son inverso uno del otro. Como, en virtud de la propiedad (ii), el isomorfismo φ^* transforma la subálgebra $\mathcal{O}_Y(V)$ de $\mathcal{C}(V)$ en la subálgebra $\mathcal{O}_X(U)$ de $\mathcal{C}(U)$, concluimos que ψ^* transforma $\mathcal{O}_X(U)$ en $\mathcal{O}_Y(V)$. ∎

Ejemplo 4.9 Sea $(U; u_1, \dots, u_n)$ un abierto coordenado de una variedad topológica X. Dado un abierto V de U, la restricción de las funciones $u_1, \dots, u_n$ a V hacen que $(V; u_1, \dots, u_n)$ sea también abierto coordenado de X, y por tanto tenemos en $\mathcal{C}(V)$ la subálgebra $\mathcal{C}^\infty(V; u_1, \dots, u_n)$ de las funciones sobre V que son diferenciables respecto de $u_1, \dots, u_n$. Es claro que el ser diferenciable respecto de $u_1, \dots, u_n$ es una condición local, por lo que sobre U tenemos el haz de funciones

$$V \text{ abierto de } U \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{C}^\infty(V, u_1, \dots, u_n)\,.$$

Sea ahora $\bar{U}$ el abierto de $\mathbb{R}^n$ tal que $U \xrightarrow{\varphi=(u_1,\dots,u_n)} \bar{U}$ es un homeomorfismo, y consideremos sobre $\bar{U}$ el haz de las funciones diferenciables en el sentido usual. Entonces $\varphi : U \to \bar{U}$ es un isomorfismo de espacios anillados. En efecto, si V es un abierto de U y $\bar{V} = \varphi(V)$ es el abierto de $\bar{U}$ que se corresponde con V por el homeomorfismo φ, entonces el isomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras $\mathcal{C}(\bar{V}) \to \mathcal{C}(V)$ transforma $\mathcal{C}^\infty(\bar{V})$ en $\mathcal{C}^\infty(V; u_1, \dots, u_n)$ (por la propia definición de $\mathcal{C}^\infty(V; u_1, \dots, u_n)$, véase el punto 3.7); en particular el morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras

$$\begin{array}{rcl} \varphi^* : \mathcal{C}^\infty(\bar{V}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(V; u_1, \dots, u_n) \\ f & \longmapsto & \varphi^*(f) := f \circ \varphi \end{array}$$

es isomorfismo, y basta aplicar el lema 4.8 para obtener lo que queremos.

5. La estructura de variedad diferenciable

Definición 5.1 Llamaremos *variedad diferenciable de dimensión* n a todo espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ con las siguientes propiedades:

(a) el espacio topológico X es Hausdorff y de base numerable;

(b) todo punto de X tiene un entorno abierto que es isomorfo (como espacio anillado) a un abierto de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^\infty)$.

Las funciones del haz $\mathcal{O}_X$ se denominan *funciones diferenciables sobre la variedad* X.

Ejemplos 5.2 (a) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^\infty)$ es trivialmente una variedad diferenciable de dimensión n.

(b) Todo abierto (no vacío) de una variedad diferenciable X es una variedad diferenciable de la misma dimensión que X. En particular, todo abierto de $\mathbb{R}^n$ es una variedad diferenciable de dimensión n.

(c) Si $(U; u_1, \dots, u_n)$ es un abierto coordenado de una variedad topológica y $\mathcal{O}_U$ es el haz sobre U de las funciones que son diferenciables respecto de las coordenadas $u_1, \dots, u_n$, entonces en el ejemplo 4.9 se ha probado que $(U, \mathcal{O}_U)$ es una variedad diferenciable de dimensión n.

Definición 5.3 Una aplicación $\varphi : X \to Y$ entre variedades diferenciables se dice que es una *aplicación diferenciable* si es un morfismo de espacios anillados.

Los isomorfismos de espacios anillados entre variedades diferenciables se denominan *difeomorfismos*. Por definición, una variedad diferenciable de dimensión n es "localmente difeomorfa" a $\mathbb{R}^n$.

Propiedades 5.4 Enunciando los apartados del ejercicio 4.6 en el marco de las variedades diferenciables tenemos las siguientes propiedades:

(a) La composición de aplicaciones diferenciables es una aplicación diferenciable.

(b) Una aplicación $\varphi : X \to Y$ entre variedades diferenciables es diferenciable si y sólo si es localmente diferenciable (esto es, existe un recubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ de X tal que $\varphi_{|U_i} : U_i \to Y$ es diferenciable para todo $i \in I$).

(c) Si U es un abierto no vacío de una variedad diferenciable X, entonces la inclusión $U \hookrightarrow X$, que es una aplicación diferenciable, tiene la siguiente "propiedad universal": Para cada variedad diferenciable Y y cada aplicación $f : Y \to U$ se cumple

$$Y \xrightarrow{f} U \text{ es diferenciable} \quad \iff \quad \text{la composición } Y \xrightarrow{f} U \hookrightarrow X \text{ es diferenciable.}$$

Ejemplos 5.5 (a) Sean X un abierto de $\mathbb{R}^n$ e Y un abierto de $\mathbb{R}^m$. En el ejemplo 4.5 (b) hemos visto que una aplicación $\varphi : X \to Y$ es diferenciable según la definición 5.3 si y sólo si es diferenciable en el sentido del Análisis Matemático.

(b) Sean ahora X una variedad diferenciable y $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Para f tenemos dos nociones de "diferenciabilidad": (i) "función diferenciable" como función perteneciente al "haz de funciones diferenciables" de X, esto es, $f \in \mathcal{O}_X(X)$; (ii) "función diferenciable" como "aplicación diferenciable" entre X y $\mathbb{R}$ (pues $\mathbb{R}$ es variedad diferenciable), esto es, $f : X \to \mathbb{R}$ como morfismo de espacios anillados. Las dos nociones coinciden (como no podía ser de otra manera): como ambas nociones son "locales" bastará comprobarlo cuando $(X, \mathcal{O}_X) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^\infty)$, que es el caso particular $Y = \mathbb{R}$ del ejemplo 4.5 (b).

(c) Dada una variedad diferenciable X, con argumentos similares a los utilizados en el párrafo anterior se prueba que para toda aplicación $\varphi = (f_1, \dots, f_m) : X \to \mathbb{R}^m$ se cumple:

$$\varphi \text{ es diferenciable} \quad \iff \quad f_1, \dots, f_m \in \mathcal{O}_X(X)\,.$$

Definición 5.6 Sea X una variedad diferenciable. Un *abierto coordenado diferenciable* de X es un abierto no vacío U de X junto con n funciones diferenciables $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{O}_X(U)$, tales que la aplicación $U \xrightarrow{\varphi=(u_1,\dots,u_n)} \mathbb{R}^n$ establece un difeomorfismo de U con un abierto $\bar{U}$ de $\mathbb{R}^n$. Todo abierto coordenado diferenciable es también un abierto coordenado topológico.

Nota **5.7** Con la notación de la definición anterior, sea $\mathcal{O}_U$ el haz inducido en U por el haz $\mathcal{O}_X$ de X; U es una variedad diferenciable y $\mathcal{O}_U$ es su haz de funciones diferenciables. Si V es un abierto de U y $\bar{V} = \varphi(V)$, entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi^* : \mathcal{C}^\infty(\bar{V}) &\longrightarrow \mathcal{O}_U(V) \\ f &\longmapsto \varphi^*(f) := f \circ \varphi \end{aligned}$$

es un isomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras (propiedad (ii) del lema 4.8), y por tanto toda función $f \in \mathcal{O}_U(V)$ es de la forma $f = \varphi^*(F) = F(u_1, \dots, u_n)$ con $F \in \mathcal{C}^\infty(\bar{V})$, es decir,

$$\mathcal{O}_U(V) = \mathcal{C}^\infty(V; u_1, \dots, u_n)\,.$$

Por lo tanto tenemos: *Si $(U; u_1, \dots, u_n)$ es un abierto coordenado diferenciable, entonces el haz de funciones diferenciables sobre U es justamente el haz de las funciones que son diferenciables respecto de las coordenadas $u_1, \dots, u_n$.*

Definición 5.8 Se llama *atlas* de una variedad diferenciable a un recubrimiento suyo formado por abiertos coordenados diferenciables.

El siguiente importante resultado será muy útil para construir variedades diferenciables.

Proposición 5.9 *Consideremos una variedad topológica X de dimensión n recubierta por abiertos coordenados topológicos $\{(U_i; u_1^i, \dots, u_n^i)\}_{i\in I}$. Si en las intersecciones $\{U_i \cap U_j\}_{i,j\in I}$ los cambios de coordenadas son diferenciables, entonces existe una única estructura diferenciable $\mathcal{O}_X$ sobre X para la cual el recubrimiento $\{(U_i; u_1^i, \dots, u_n^i)\}_{i\in I}$ es un atlas.*

Demostración. Veamos en primer lugar la existencia. Definamos la "aplicación" $\mathcal{O}_X$ que a cada abierto V de X le asigna

$$\mathcal{O}_X(V) = \Big\{ f \in \mathcal{C}(V) \,:\, f_{|V \cap U_i} \in \mathcal{C}^\infty\big(V \cap U_i; u_1^i, \dots, u_n^i\big) \;\text{ para todo } i \in I \Big\}\,; \tag{5.1}$$

es fácil ver que $\mathcal{O}_X(V)$ es una subálgebra de $\mathcal{C}(V)$. De la definición se sigue claramente que $\mathcal{O}_X$ está determinada por condiciones locales y por tanto es un haz de funciones. Ahora, si para cada $i_0 \in I$ probamos que el haz inducido en U_{i_0} por $\mathcal{O}_X$ es el de las funciones que son diferenciables respecto de las coordenadas $u_1^{i_0}, \dots, u_n^{i_0}$, entonces habremos demostrado simultáneamente las dos cosas que queremos: que $(X, \mathcal{O}_X)$ es una variedad diferenciable, y que para dicha variedad diferenciable $\{(U_i; u_1^i, \dots, u_n^i)\}_{i\in I}$ es un atlas. Veamos entonces que para cada abierto V dentro de U_{i_0} se cumple

$$\mathcal{O}_X(V) = \mathcal{C}^\infty\big(V; u_1^{i_0}, \dots, u_n^{i_0}\big)\,.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(V) &= \Big\{ f \in \mathcal{C}(V) \,:\, f_{|V \cap U_i} \in \mathcal{C}^\infty\big(V \cap U_i; u_1^i, \dots, u_n^i\big) \;\text{ para todo } i \in I \Big\} \\ &= \Big\{ f \in \mathcal{C}(V) \,:\, f_{|V \cap U_i} \in \mathcal{C}^\infty\big(V \cap U_i; u_1^{i_0}, \dots, u_n^{i_0}\big) \;\text{ para todo } i \in I \Big\} && (5.2) \\ &= \mathcal{C}^\infty\big(V; u_1^{i_0}, \dots, u_n^{i_0}\big)\,; && (5.3) \end{aligned}$$

para obtener la igualdad (5.2) se ha tenido en cuenta que sobre el abierto $V \cap U_i \subset U_{i_0} \cap U_i$ son diferenciables los cambios de coordenadas entre $u_1^{i_0}, \dots, u_n^{i_0}$ y $u_1^i, \dots, u_n^i$ (véase el lema 3.12); la igualdad (5.3) se cumple porque $\{V \cap U_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento abierto de V.

Probemos ahora la unicidad, es decir, supongamos que existe sobre X otro haz de funciones $\overline{\mathcal{O}}_X$ tal que $(X, \overline{\mathcal{O}}_X)$ es una variedad diferenciable para la que $\big\{\big(U_i; u_1^i, \dots, u_n^i\big)\big\}_{i \in I}$ es un atlas, y veamos que entonces $\overline{\mathcal{O}}_X = \mathcal{O}_X$. Sea V un abierto de X. Como $\{V \cap U_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento abierto de V se cumple

$$\overline{\mathcal{O}}_X(V) = \Big\{ f \in \mathcal{C}(V) \, : \, f_{|_{V \cap U_i}} \in \overline{\mathcal{O}}_X(V \cap U_i) \ \text{ para todo } i \in I \Big\} .$$

Además, para cada $i \in I$, el haz inducido en U_i por $\overline{\mathcal{O}}_X$ es el de las funciones que son diferenciables respecto de las coordenadas $u_1^i, \dots, u_n^i$, así que debe cumplirse

$$\overline{\mathcal{O}}_X(V) = \Big\{ f \in \mathcal{C}(V) \, : \, f_{|_{V \cap U_i}} \in \mathcal{C}^\infty\big(V \cap U_i; u_1^i, \dots, u_n^i\big) \ \text{ para todo } i \in I \Big\} ;$$

es decir, $\overline{\mathcal{O}}_X(V) = \mathcal{O}_X(V)$ (véase la igualdad (5.1) con la que se ha definido $\mathcal{O}_X$). ∎

Observación **5.10** En adelante, todos los abiertos coordenados que consideremos en una variedad diferenciable lo serán en sentido diferenciable, salvo que se diga otra cosa.

Vamos a terminar esta sección dando una propiedad que resultará útil a la hora de comprobar si una aplicación continua entre variedades diferenciables es diferenciable.

5.11 Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de una variedad diferenciable X, sea $\{V_j\}_{j \in J}$ un recubrimiento abierto de otra variedad diferenciable Y, y sea $\varphi : X \to Y$ una aplicación continua. Dados índices $i \in I$, $j \in J$ sea φ_{ij} la restricción de φ al abierto $\varphi^{-1}(V_j) \cap U_i$ de X, la cual valora en el abierto V_j de Y. Son equivalentes:

(i) la aplicación φ es diferenciable;

(ii) la aplicación $\varphi_{ij} : \varphi^{-1}(V_j) \cap U_i \to V_j$ es diferenciable para cualesquiera $i \in I$, $j \in J$.

En efecto, supongamos en primer lugar que $\varphi : X \to Y$ es diferenciable. Dados índices $i \in I$, $j \in J$, la restricción de φ al abierto $\varphi^{-1}(V_j) \cap U_i$ de X es la aplicación diferenciable

$$\varphi_{|_{\varphi^{-1}(V_j) \cap U_i}} : \varphi^{-1}(V_j) \cap U_i \longrightarrow Y ;$$

pero la anterior es justamente la composición de $\varphi_{ij} : \varphi^{-1}(V_j) \cap U_i \to V_j$ con la inclusión $V_j \hookrightarrow Y$, de modo que aplicando la propiedad 5.4 (c) concluimos que φ_{ij} es diferenciable.

Supongamos ahora que se cumple (ii). Utilizando de nuevo la propiedad 5.4 (c) obtenemos que la restricción de φ a cada uno de los abiertos de X de la familia $\big\{\varphi^{-1}(V_j) \cap U_i\big\}_{i \in I, j \in J}$ es diferenciable. Entonces φ es localmente diferenciable (porque la anterior familia recubre a X), y por lo tanto es diferenciable (propiedad 5.4 (b)).

Nota **5.12** En la práctica, la propiedad 5.11 se utiliza siendo $\{U_i\}_{i \in I}$ y $\{V_j\}_{j \in J}$ atlas de X e Y, respectivamente. De ese modo cada aplicación φ_{ij} está definida entre abiertos coordenados, y por tanto pueden hacerse "cálculos en coordenadas" para ver si φ_{ij} es diferenciable.

5.13 (Observación final) Hasta ahora hemos usado el símbolo $\mathcal{O}_X$ para denotar el haz de funciones diferenciables sobre los abiertos de una variedad diferenciable X. Esta notación, poco sugerente, ha sido necesaria para enfatizar que tales funciones diferenciables no vienen determinadas por la estructura topológica de X (esto es, una variedad topológica X puede admitir diferentes estructuras diferenciables). Una vez que este punto ha quedado claro será conveniente volver a la notación más tradicional. En lo sucesivo, si U es un abierto de una variedad diferenciable X, entonces el álgebra de las funciones diferenciables sobre U se denotará por $\mathcal{C}^\infty(U)$ en lugar de por $\mathcal{O}_X(U)$.

6. Problemas

6.1 Sean X una variedad diferenciable, Y un conjunto y $\varphi : Y \to X$ una biyección. Pruébese que sobre Y existe una única estructura de variedad diferenciable para la que φ es un difeomorfismo.

Dada otra biyección $\phi : Y \to X$ pruébese: la estructura de variedad diferenciable que sobre Y define ϕ coincide con la que define φ si y sólo si $\varphi \circ \phi^{-1} : X \to X$ es un difeomorfismo.

6.2 Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n. Dado un isomorfismo lineal $T : E \to \mathbb{R}^n$ hay una estructura de variedad diferenciable sobre E para la que T es un difeomorfismo. Pruébese que dicha estructura no depende del isomorfismo T.

6.3 Dótese de estructura de variedad diferenciable a las siguientes variedades topológicas:
(a) La esfera n-dimensional $S_n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$.
(b) El espacio proyectivo real n-dimensional $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$.
(c) El espacio complejo $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$.
(d) El espacio proyectivo complejo n-dimensional $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$.

6.4 Sea $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $n \geq 2$ y considérese el conjunto $X = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : F(x_1, \dots, x_n) = 0\}$. Supuesto que las derivadas parciales de F no se anulan simultáneamente en ningún punto de X, utilícese el *Teorema de la Función Implícita* del Análisis Matemático para probar que X tiene una estructura natural de variedad diferenciable de dimensión $n-1$.

6.5 Pruébese que la aplicación natural $\pi : S_n \to \mathbb{P}_n$, $x \mapsto \langle x \rangle$, es diferenciable ($n \geq 1$).

6.6 Pruébese que es diferenciable la aplicación $\phi : S_1 \to \mathbb{P}_1$ siguiente: dado $x \in S_1$, si $y \in \mathbb{R}^2$ es un vector en la dirección de la recta tangente a S_1 en x entonces $\phi(x) = \langle y \rangle$.

6.7 Pruébese que la inclusión $S_n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ y la proyección natural $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - 0 \to \mathbb{P}_n$ son aplicaciones diferenciables ($n \geq 1$).

6.8 Pruébese que la aplicación natural $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - 0 \to \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ es diferenciable ($n \geq 1$).

6.9 Dadas variedades diferenciables X e Y, pruébese que sobre la variedad topológica $X \times Y$ hay una única estructura de variedad diferenciable para la que las proyecciones $\pi_1 : X \times Y \to X$ y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ son diferenciables, y para la que se cumple la siguiente propiedad universal: *dadas una variedad diferenciable Z y una aplicación $f : Z \to X \times Y$, f es diferenciable si* *y sólo si* $\pi_1 \circ f$ *y* $\pi_2 \circ f$ *son diferenciables* (es decir, si como es usual identificamos f con sus componentes, $f = (f_1, f_2)$ donde $f_1 = \pi_1 \circ f$ y $f_2 = \pi_2 \circ f$, entonces: f es diferenciable $\Leftrightarrow$ las componentes de f son diferenciables). [Indicación: Cuando $X = \mathbb{R}^n$ e $Y = \mathbb{R}^m$, es conocido que la estructura de variedad diferenciable de $\mathbb{R}^{n+m}$ es la única sobre la variedad topológica $X \times Y = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$ para la que las proyecciones son diferenciables y que tiene la correspondiente propiedad universal.]

Además se cumplen:

(a) $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$;

(b) si $g : X \times Y \to Z$ es una aplicación diferenciable y fijamos $y_0 \in Y$, entonces también es diferenciable la aplicación $X \to Z$, $x \mapsto g(x, y_0)$;

(c) dadas aplicaciones $h_1 : X \to \bar{X}$, $h_2 : y \to \bar{Y}$ entre variedades diferenciables tenemos: $h_1 \times h_2$ es diferenciable $\Leftrightarrow$ h_1 y h_2 son diferenciables.

6.10 Descríbase un atlas del toro $S_1 \times S_1$.

6.11 Pruébese que la *proyección estereográfica* de la esfera S_2 desde su "polo norte" sobre el plano determinado por su ecuador establece un difeomorfismo entre $S_2 - \{\text{un punto}\}$ y $\mathbb{R}^2$.

6.12 Pruébese que la circunferencia S_1 es difeomorfa a la recta proyectiva real $\mathbb{P}_1$.

6.13 ¿Es un difeomorfismo la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$? ¿Y la aplicación $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x\mathrm{e}^y + y, x\mathrm{e}^y - y)$?

6.14 Pruébese que un atlas de la circunferencia S_1 lo forman los abiertos coordenados

$$\begin{array}{rcl} (0, 2\pi) & \xrightarrow{\sim} & U_1 = S_1 - (1, 0) \\ \alpha & \longmapsto & (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) \end{array} \quad , \qquad \begin{array}{rcl} (-\pi, \pi) & \xrightarrow{\sim} & U_2 = S_1 - (-1, 0) \\ \beta & \longmapsto & (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta) \end{array} \quad .$$

Compruébese lo mismo para los abiertos coordenados

$$\begin{array}{rcl} U_1 = S_1 - (1, 0) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \frac{y}{1-x} \end{array} \quad , \qquad \begin{array}{rcl} U_2 = S_1 - (-1, 0) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \frac{y}{1+x} \end{array} \quad .$$

6.15 Pruébese que un atlas de la esfera S_2 lo forman los abiertos coordenados

$$\begin{array}{rcl} W_1 = S_2 - (0, 0, 1) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right) \end{array} \quad , \qquad \begin{array}{rcl} W_2 = S_2 - (0, 0, -1) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\right) \end{array} \quad .$$

6.16 Pruébese que la esfera S_2 es difeomorfa a la recta proyectiva compleja $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

6.17 Pruébese que un atlas de la esfera S_2 lo forman los abiertos coordenados

$$\begin{array}{rcl} (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2) & \xrightarrow{\sim} & V_1 = S_2 - \{y = 0, x \geq 0\} \\ (\theta, \varphi) & \longmapsto & (\cos\theta\cos\varphi \,,\, \operatorname{sen}\theta\cos\varphi \,,\, \operatorname{sen}\varphi) \ , \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2) & \xrightarrow{\sim} & V_2 = S_2 - \{z = 0, x \leq 0\} \\ (\theta, \varphi) & \longmapsto & (-\cos\theta\cos\varphi \,,\, \operatorname{sen}\varphi \,,\, \operatorname{sen}\theta\cos\varphi) \ . \end{array}$$

6.18 Se define la *banda de Möebius* como el espacio topológico cociente $B := X/\!\sim$, donde $X = [0,1] \times (0,1)$ y

$$\text{“}\sim\text{”} = \begin{cases} (a,b) \sim (a,b)\,, \\ (0,b) \sim (1, 1-b)\,. \end{cases}$$

Dótese a B de estructura de variedad diferenciable.

6.19 Se define la *botella de Klein* como el espacio topológico cociente $K := X/\!\sim$, donde $X = [0,1] \times [0,1]$ y

$$\text{“}\sim\text{”} = \begin{cases} (a,b) \sim (a,b)\,, \\ (a,0) \sim (a,1)\,, \\ (0,b) \sim (1, 1-b)\,. \end{cases}$$

Dótese a K de estructura de variedad diferenciable.