Capítulo VIII

Espacio tangente

1. Preliminares: funciones meseta

Comenzaremos probando la existencia de "funciones meseta", las cuales serán muy útiles para probar a su vez la existencia de otras funciones necesarias para desarrollar la teoría.

Definición 1.1 Dado un espacio topológico X, se llama *soporte* de una función $f : X \to \mathbb{R}$ al cerrado $\operatorname{Sop} f$ de X que se obtiene al hacer la clausura del conjunto $\{x \in X \,:\, f(x) \neq 0\}$,

$$\operatorname{Sop} f = \overline{\{x \in X \,:\, f(x) \neq 0\}}\,.$$

1.2 En una variedad diferenciable X, sean U un abierto y F un cerrado tales que $F \subseteq U$. Si una función $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ se anula fuera de F, entonces puede "extenderse por cero" fuera de U a una función diferenciable global: si definimos

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } \ x \in U\,, \\ 0 & \text{si } \ x \in X - U\,, \end{cases}$$

entonces es claro que $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$, ya que f es diferenciable sobre el recubrimiento abierto $\{U, X - F\}$ de X.

Lema 1.3 *Sea K un subconjunto compacto de una variedad diferenciable X y sea U un entorno abierto de K. Existe una función diferenciable global $h \in \mathcal{C}^\infty(X)$ tal que* $\operatorname{Sop} h \subseteq U$, $0 \leq h \leq 1$ *y* $h_{|_K} = 1$. *A una tal función h se la conoce como* función meseta.

Demostración. Consideremos la función $e \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ siguiente

$$e(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/t} & \text{si } \ t > 0\,, \\ 0 & \text{si } \ t \leq 0\,. \end{cases}$$

Fijemos un número real $r > 0$. Dado un punto $p \in K$, consideremos dentro de U un abierto coordenado $V_p \simeq \mathbb{R}^n$ entorno de p, y dentro de V_p consideremos la bola $W_p \simeq B(p, r)$. La función

$$g_p(x) = \frac{e\big((2r)^2 - \|x-p\|^2\big)}{e\big((2r)^2 - \|x-p\|^2\big) + e\big(\|x-p\|^2 - r^2\big)}$$

es diferenciable sobre $V_p \simeq \mathbb{R}^n$, vale 1 sobre la bola $B(p,r) \simeq W_p$, se anula fuera de la bola $B(p,2r)$ y cumple $0 \leq g_p \leq 1$. Extendiéndola por cero fuera de V_p podemos considerar g_p como una función diferenciable global que cumple $\operatorname{Sop} g_p \subseteq U$.

Como K es compacto está recubierto por un número finito de abiertos $W_{p_1}, \dots, W_{p_k}$, y es fácil ver que

$$h(x) = 1 - \prod_{i=1}^{k} \big(1 - g_{p_i}(x)\big)$$

es la función buscada. ∎

Corolario 1.4 *Sea U un abierto de una variedad diferenciable X y sea $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Dado $x \in U$, existe una función diferenciable global $F \in \mathcal{C}^\infty(X)$ que coincide con f en algún entorno de x.*

Demostración. Sea K un entorno compacto de x dentro de U. Por 1.3, existe $h \in \mathcal{C}^\infty(X)$ tal que $h_{|K} = 1$ y $\operatorname{Sop} h \subseteq U$. La función buscada es $F = fh$ extendida por cero fuera de U. ∎

2. Anillo de gérmenes

Fijemos en esta sección una variedad diferenciable X de dimensión n y un punto $x \in X$.

Si $\mathcal{U}_x$ es la colección de todos los entornos abiertos de x en X, entonces sobre el conjunto

$$\bigsqcup_{U \in \mathcal{U}_x} \mathcal{C}^\infty(U)$$

de todas las funciones diferenciables en algún entorno (abierto) de x se define la siguiente relación de equivalencia:

$$f_1 \equiv f_2 \quad \iff \quad f_1 \text{ y } f_2 \text{ coinciden en algún entorno de } x\,.$$

Definición 2.1 Al conjunto cociente por la anterior relación de equivalencia se le llama *anillo de gérmenes* de funciones diferenciables en x, y se le denotará por $\mathcal{O}_{X,x}$. Dada una función diferenciable f definida en un entorno de x, su clase de equivalencia en $\mathcal{O}_{X,x}$ se llama *germen* de f en x, y se denota por f_x.

Según las definiciones dadas, dos funciones diferenciables sobre ciertos entornos de x tienen el mismo germen en x si y sólo si coinciden en algún entorno de x.

Nota **2.2** En adelante, cuando no haya motivo de confusión porque está claro la variedad diferenciable X a la que pertenece x, para simplificar escribiremos $\mathcal{O}_x$ en lugar de $\mathcal{O}_{X,x}$.

Propiedades 2.3 (a) El conjunto $\mathcal{O}_x$ de los gérmenes tiene estructura natural de $\mathbb{R}$-álgebra: la suma y el producto se definen del modo evidente, $f_x + g_x = (f+g)_x$, $f_x \cdot g_x = (f \cdot g)_x$; el cuerpo $\mathbb{R}$ se inyecta en $\mathcal{O}_x$ como los gérmenes de las funciones constantes.

(b) La aplicación natural $\mathcal{C}^\infty(X) \to \mathcal{O}_x$, $f \mapsto f_x$, es un morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras. Además, el corolario 1.4 afirma que este morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras es epiyectivo.

(c) Si $\varphi : X \to Y$ es una aplicación diferenciable e $y = \varphi(x)$, entonces hay un morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras entre los anillos de gérmenes:

$$\begin{aligned} \varphi^* : \mathcal{O}_y &\longrightarrow \mathcal{O}_x \\ g_y &\longmapsto (g \circ \varphi)_x \,. \end{aligned}$$

(d) Si U es un entorno abierto de x en X, entonces el anillo de gérmenes de funciones diferenciables en x no cambia al sustituir X por U, pues todo elemento de $\mathcal{O}_x$ es el germen en x de alguna función diferenciable definida en un entorno abierto de x contenido en U. Es decir, para la inclusión natural $i : U \hookrightarrow X$, el morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras $i^* : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{U,x}$ es un isomorfismo.

(e) Se cumplen las "propiedades funtoriales" habituales: (i) si $\phi : Y \to Z$ es otra aplicación diferenciable y $z = \phi(y)$, entonces la composición $\mathcal{O}_z \xrightarrow{\phi^*} \mathcal{O}_y \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{O}_x$ es justamente el morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras $\mathcal{O}_z \xrightarrow{(\phi\circ\varphi)^*} \mathcal{O}_x$; (ii) si $X \xrightarrow{I_X} X$ es el morfismo identidad de X, entonces $\mathcal{O}_x \xrightarrow{I_X^*} \mathcal{O}_x$ es el morfismo identidad de $\mathcal{O}_x$. Como consecuencia de las dos anteriores propiedades tenemos: si $\varphi : X \to Y$ es difeomorfismo, entonces $\varphi^* : \mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ es isomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras.

Definición 2.4 Una aplicación diferenciable $\varphi : X \to Y$ se dice que es *difeomorfismo local* en un punto $x \in X$, si existen un entorno abierto U de x en X y un entorno abierto V de $\varphi(x)$ en Y tales que $\varphi : U \to V$ es difeomorfismo.

2.5 La propiedad 2.3 (e) puede generalizarse en el siguiente sentido: Si una aplicación diferenciable $\varphi : X \to Y$ es difeomorfismo local en un punto $x \in X$, entonces $\varphi^* : \mathcal{O}_{\varphi(x)} \to \mathcal{O}_x$ es un isomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras. En efecto, basta tener en cuenta que el anillo de gérmenes $\mathcal{O}_x$ podemos obtenerlo considerando solamente las funciones diferenciables sobre un entorno abierto U de x (propiedad 2.3 (d)).

Proposición 2.6 *El anillo de gérmenes $\mathcal{O}_x$ es local, es decir, posee un único ideal maximal.*

Demostración. Como el morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras $\mathcal{O}_x \to \mathbb{R}$, $f_x \mapsto f(x)$, es epiyectivo y $\mathbb{R}$ es un cuerpo, su núcleo $\mathfrak{m}_x = \{f_x \in \mathcal{O}_x \,:\, f(x) = 0\}$ es un ideal maximal.

Para probar que $\mathfrak{m}_x$ es el único ideal maximal de $\mathcal{O}_x$ basta ver que todo germen que no pertenezca a $\mathfrak{m}_x$ es invertible. Si $f_x \in \mathcal{O}_x$ es tal que $f_x \notin \mathfrak{m}_x$, entonces $f(x) \neq 0$ y por continuidad f no se anulará en todo un entorno abierto de x; en tal entorno f es invertible y el germen $(f^{-1})_x$ es el inverso de f_x. ∎

Lema 2.7 *Si $p = (p_1, \dots, p_n)$ es un punto de un abierto convexo U de $\mathbb{R}^n$, entonces $\mathfrak{m} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(U) \,:\, f(p) = 0\}$ es un ideal maximal de la $\mathbb{R}$-álgebra $\mathcal{C}^\infty(U)$ que está generado por las funciones $x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n$, esto es,*

$$\mathfrak{m} = (x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n),$$

donde $x_1, \dots, x_n$ son las funciones coordenadas cartesianas sobre $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Es claro que las funciones $x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n \in \mathcal{C}^\infty(U)$ se anulan en el punto p, y por lo tanto tenemos la inclusión $(x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n) \subseteq \mathfrak{m}$.

Sea ahora $f \in \mathfrak{m}$ y probemos que $f \in (x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n)$. Dado un punto cualquiera $x = (x_1, \dots, x_n)$ de U, como el segmento de recta que une p y x está totalmente contenido de U (por ser U convexo), podemos considerar la siguiente función continua

$$\begin{array}{rcl} g : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & g(t) := f(p + t(x-p)) \, . \end{array}$$

Por las conocidas propiedades de las aplicaciones diferenciables entre abiertos de espacios euclídeos, sabemos que g es diferenciable en el intervalo abierto $(0,1)$ y que su derivada es

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - p_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p + t(x-p)) \, .$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} f(x) \;&=\; f(x) - f(p) \;=\; g(1) - g(0) \;=\; \int_0^1 g'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - p_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p + t(x-p)) \right\} \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} (x_i - p_i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(p + t(x-p))\,\mathrm{d}t \, , \end{aligned}$$

es decir, $f = h_1 \cdot (x_1 - p_1) + \dots + h_n \cdot (x_n - p_n) \in (x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n)$, donde para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ es $h_i(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(p + t(x-p))\,\mathrm{d}t$. ∎

2.8 La igualdad probada en el anterior lema está estrechamente relacionada con la conocida "fórmula de Taylor". Para simplificar la notación veámoslo cuando $n = 1$, en cuyo caso U es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y $\mathfrak{m} = (x - p)$, siendo $p \in U$ y x la coordenada cartesiana sobre $\mathbb{R}$.

Fijemos una función $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Si denotamos $\lambda_0 = f(p)$, entonces $f - \lambda_0 \in \mathfrak{m} = (x - p)$ y por lo tanto existe $h_1 \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tal que

$$f = \lambda_0 + h_1 \cdot (x - p) \, .$$

Del mismo modo, existen $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ y $h_2 \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tales que $h_1 = \lambda_1 + h_2 \cdot (x - p)$, y sustituyendo en la igualdad de f obtenemos

$$f = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot (x - p) + h_2 \cdot (x - p)^2 \, .$$

Reiterando el proceso para h_2 y así sucesivamente llegamos a que se cumple

$$f = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot (x - p) + \dots + \lambda_r \cdot (x - p)^r + h_{r+1} \cdot (x - p)^{r+1}$$

para ciertos escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ y cierta función $h_{r+1} \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Derivando en la anterior expresión es fácil comprobar que para cada $k \in \{1, \dots, r\}$ es $\lambda_k = f^{r)}(p)/k!$. Sustituyendo obtenemos la fórmula de Taylor

$$f = f(p) + \frac{f'(p)}{1!}(x - p) + \dots + \frac{f^{r)}(p)}{r!}(x - p)^r + R_{r+1}$$

siendo el resto R_{r+1} una función diferenciable perteneciente a $\mathfrak{m}^{r+1} = \big((x - p)^{r+1}\big)$.

Proposición 2.9 *Sea $(U; u_1, \dots, u_n)$ un abierto coordenado de X tal que $x \in U$, y sean $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ las coordenadas de x respecto del sistema de coordenadas $u_1, \dots, u_n$, es decir $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (u_1(x), \dots, u_n(x))$. El ideal maximal $\mathfrak{m}_x$ del anillo de gérmenes $\mathcal{O}_x$ está generado por los gérmenes de las funciones $u_1 - \lambda_1, \dots, u_n - \lambda_n$.*

Demostración. Vía el difeomorfismo $U \xrightarrow{(u_1,\dots,u_n)} \bar{U}$ (= abierto de $\mathbb{R}^n$), y en virtud de lo dicho al final de la propiedad 2.3 (e), podemos suponer que U es un abierto de $\mathbb{R}^n$, que las coordenadas $(u_1, \dots, u_n)$ son las coordenadas cartesianas $(x_1, \dots, x_n)$ y que x es el punto de U cuyas coordenadas cartesianas son $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Además, pasando a un abierto más pequeño si fuera necesario, podemos suponer que U es un convexo de $\mathbb{R}^n$.

Ahora, como el morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras $\mathcal{C}^\infty(U) \to \mathcal{O}_x$ es epiyectivo (propiedad 2.3 (b)) y transforma el ideal $\mathfrak{m} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(U) : f(p) = 0\}$ de $\mathcal{C}^\infty(U)$ en el ideal $\mathfrak{m}_x$ de $\mathcal{O}_x$, basta aplicar el lema 2.7 para terminar la demostración. ∎

3. Definición de espacio tangente

Fijemos un punto $p \in \mathbb{R}^n$ y un vector $v \in \mathbb{R}^n$. Si pensamos v como un vector en p, entonces v define un modo de derivar funciones en p, la "derivada direccional en el punto p respecto del vector v": dada una función f definida en un entorno de p, se define la derivada direccional de f según v en el punto p como el escalar $\mathrm{D}_p^v f$ dado por la fórmula

$$\mathrm{D}_p^v f = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t},$$

cuando dicho límite exista. Si f es diferenciable en un entorno de p, entonces $\mathrm{D}_p^v f$ está bien definido, ya que si consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \sigma(t) := p + tv \end{aligned}$$

(la imagen de σ es la recta de $\mathbb{R}^n$ que pasa por p con la dirección de v), entonces $f \circ \sigma$ es diferenciable en un entorno de $t = 0$ y se cumple

$$\mathrm{D}_p^v f = (f \circ \sigma)'(0).$$

Si g es otra función diferenciable definida en un entorno de p tal que $f_p = g_p$, entonces es claro que $\mathrm{D}_p^v f = \mathrm{D}_p^v g$; es decir, tenemos definida la aplicación $\mathrm{D}_p^v : \mathcal{O}_p \to \mathbb{R}$, $f_p \mapsto \mathrm{D}_p^v f$. Es conocido que esta aplicación tiene las propiedades de una "derivación" (un modo de derivar) en el punto p (véase la definición 3.1 siguiente).

Veremos más adelante (en el ejemplo 3.7) que hay una correspondencia biunívoca entre las derivaciones en el punto p y los vectores en p. Esta situación que se da en $\mathbb{R}^n$ sugiere un modo de definir el concepto de "vector tangente" a una variedad diferenciable arbitraria X en un punto suyo.

Definición 3.1 Sea p un punto de una variedad diferenciable X. Una *derivación* en el punto p es una aplicación $D : \mathcal{O}_p \to \mathbb{R}$ que cumple:

(a) $D\lambda = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$;
(b) $D(f_p + g_p) = D(f_p) + D(g_p)$ para todo $f_p, g_p \in \mathcal{O}_p$;
(c) $D(f_p \cdot g_p) = D(f_p) \cdot g(p) + f(p) \cdot D(g_p)$ para todo $f_p, g_p \in \mathcal{O}_p$.

Nótese que toda derivación en p es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal. Obsérvese también que el conjunto $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$ de todas las derivaciones en el punto p es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con las operaciones naturales: dados $\lambda \in \mathbb{R}$ y $D, D' \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$, para cada $f_p \in \mathcal{O}_p$ es

$$(D + D')(f_p) := D(f_p) + D'(f_p), \qquad (\lambda \cdot D)(f_p) := \lambda \cdot D(f_p).$$

Definición 3.2 Sea p un punto de una variedad diferenciable X. Se llama *vector tangente* a X en p a toda derivación $D : \mathcal{O}_p \to \mathbb{R}$. Se define el *espacio tangente* a la variedad diferenciable X en el punto p como el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $T_pX := \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$.

Obsérvese que si U es un abierto de X que contiene a p entonces $T_pX = T_pU$, ya que el anillo de gérmenes no cambia al sustituir X por U (véase la propiedad 2.3 (d)).

Nota **3.3** Para simplificar la notación, en adelante suprimiremos en los gérmenes de funciones el subíndice que indica el punto donde se toman dichos gérmenes; es decir, cuando escribamos "$f \in \mathcal{O}_x$" significará que f es una función diferenciable en algún entorno abierto de un punto x de la variedad diferenciable que se esté considerando.

3.4 Sea $(U; u_1, \ldots, u_n)$ un abierto coordenado de una variedad diferenciable X y sea $p \in U$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, la "derivada parcial respecto de la coordenada u_i en el punto p" define un vector de T_pX (esto es, un vector tangente en p) que denotaremos $\left(\dfrac{\partial}{\partial u_i}\right)_p$, ó también abreviadamente $(\partial_{u_i})_p$:

$$\begin{aligned} (\partial_{u_i})_p : \mathcal{O}_p &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \frac{\partial f}{\partial u_i}(p). \end{aligned}$$

Es conocido que, en efecto, la anterior aplicación cumple las propiedades de la definición de derivación. Nótese que dados índices $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ se cumple

$$(\partial_{u_i})_p(u_j) \;=\; \delta_{ij} \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \tag{3.1}$$

Teorema 3.5 *Si $u_1, \ldots, u_n$ es un sistema de coordenadas en un entorno de un punto p de una variedad diferenciable X, entonces $\{(\partial_{u_1})_p, \ldots, (\partial_{u_n})_p\}$ es una base de T_pX. Como consecuencia, T_pX tiene dimensión finita igual a la de X.*

Demostración. Es claro que los vectores $\{(\partial_{u_1})_p, \ldots, (\partial_{u_n})_p\}$ son linealmente independientes: dados escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{i=1}^n \lambda_i (\partial_{u_i})_p = 0$, aplicando las igualdades (3.1) tenemos que para todo índice $j \in \{1, \ldots, n\}$ debe ser

$$0 = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i (\partial_{u_i})_p\right)(u_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \big((\partial_{u_i})_p(u_j)\big) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j.$$

Ahora, para ver que $\{(\partial_{u_1})_p, \ldots, (\partial_{u_n})_p\}$ es un sistema de generadores probemos primero la siguiente propiedad: si $D \in T_pX$ es tal que $Du_1 = \cdots = Du_n = 0$ entonces $D = 0$. En efecto, dado un germen $f \in \mathcal{O}_p$ tenemos (véase la proposición 2.9)

$$f - f(p) \in \mathfrak{m}_p = (u_1 - p_1, \ldots, u_n - p_n)\,,$$

donde $(p_1, \ldots, p_n)$ son las coordenadas del punto p respecto de las coordenadas $u_1, \ldots, u_n$. Por tanto existen $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{O}_p$ tales que $f - f(p) = h_1 \cdot (u_1 - p_1) + \cdots + h_n \cdot (u_n - p_n)$, y aplicando la derivación D obtenemos

$$\begin{aligned} Df = Df - D(f(p)) = D(f - f(p)) &= \sum_{i=1}^{n} D(h_i \cdot (u_i - p_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big(Dh_i \cdot (u_i(p) - p_i) + h_i(p) \cdot (Du_i - Dp_i) \Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big(Dh_i \cdot 0 + h_i(p) \cdot 0 \Big) = 0\,. \end{aligned}$$

De la propiedad probada se sigue que si dos derivaciones en el punto p coinciden sobre los gérmenes de las funciones coordenadas, entonces son iguales. Como consecuencia, para cada $D \in T_pX$ se cumple

$$D = \sum_{i=1}^{n} (Du_i) \cdot (\partial_{u_i})_p \tag{3.2}$$

porque las derivaciones D y $\sum_{i=1}^{n} (Du_i) \cdot (\partial_{u_i})_p$ coinciden sobre $u_1, \ldots, u_n$ (compruébese), lo que prueba que las parciales generan. ▮

3.6 Nótese que la fórmula 3.2 del anterior teorema dice explícitamente cómo obtener las coordenadas de un vector $D \in T_pX$ en la base $\big\{(\partial_{u_1})_p, \ldots, (\partial_{u_n})_p\big\}$ que definen las parciales; dichas coordenadas son

$$(Du_1, \ldots, Du_n)\,.$$

Ejemplo 3.7 Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita dotado con su estructura diferenciable ordinaria (véase el problema VII.6.2). Fijado un punto $p \in V$, veamos que el espacio tangente T_pV es canónicamente isomorfo al propio V.

Dado un vector $v \in V$, tenemos la correspondiente derivada direccional D_p^v: para dada $f \in \mathcal{O}_p$ es

$$\mathrm{D}_p^v f = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t} \in \mathbb{R}\,.$$

De la igualdad $\mathrm{D}_p^v f = (f \circ \sigma)'(0)$ (siendo $\sigma(t) = p + tv$) se deduce fácilmente que $\mathrm{D}_p^v : \mathcal{O}_p \to \mathbb{R}$ es efectivamente una derivación. Tenemos así definida la aplicación

$$\begin{aligned} \Psi : V &\longrightarrow T_pV \\ v &\longmapsto \mathrm{D}_p^v\,, \end{aligned}$$

que es claramente lineal y queremos probar que es un isomorfismo.

Consideremos una base cualquiera $\{v_1, \dots, v_n\}$ en V y sean $(p_1, \dots, p_n)$ las coordenadas en ella del punto p. Para cada $i = 1, \dots, n$ sea $u_i : V \to \mathbb{R}$ la función “coordenada i-ésima” en dicha base, de modo que la aplicación

$$\begin{array}{rcl} V & \xrightarrow{(u_1,\dots,u_n)} & \mathbb{R}^n \\ v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n & \longmapsto & (a_1, \dots, a_n) \end{array}$$

es un isomorfismo lineal y por lo tanto es difeomorfismo ($u_1, \dots, u_n$ son formas lineales sobre V que constituyen la base dual de $\{v_1, \dots, v_n\}$). Entonces las funciones $u_1, \dots, u_n$ son un sistema de coordenadas sobre V y obtenemos que $\{(\partial_{u_1})_p, \dots, (\partial_{u_n})_p\}$ es una base de T_pV. Terminamos si probamos que Ψ transforma la base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V en la base $\{(\partial_{u_1})_p, \dots, (\partial_{u_n})_p\}$ de T_pV; o equivalentemente, que si las coordenadas de un vector $v \in V$ en la base $\{v_1, \dots, v_n\}$ son $(a_1, \dots, a_n)$, entonces las coordenadas de $\Psi(v) = \mathrm{D}_p^v$ en la base de parciales son también $(a_1, \dots, a_n)$. En efecto, las coordenadas de D_p^v son $\big(\mathrm{D}_p^v u_1, \dots, \mathrm{D}_p^v u_n\big)$, donde

$$\mathrm{D}_p^v u_i = \lim_{t\to 0} \frac{u_i(p + tv) - u_i(p)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{p_i + ta_i - p_i}{t} = a_i \,.$$

4. Aplicación lineal tangente

Sea $\varphi : X \to Y$ una aplicación diferenciable. Dado un punto $x \in X$ y su imagen $y = \varphi(x)$ tenemos la aplicación componer con φ entre los anillos de gérmenes, $\varphi^* : \mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$, de modo que entre los respectivos espacios tangentes en x e y tenemos la aplicación “componer con φ^*”: cada vector $D \in T_xX$ es una derivación $D : \mathcal{O}_x \to \mathbb{R}$, y como $\varphi^* : \mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ es un morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras resulta que la composición $D{\circ}\varphi^* : \mathcal{O}_y \to \mathbb{R}$ es también una derivación, es decir, $D{\circ}\varphi^* \in T_yY$. La aplicación obtenida se denota φ_*,

$$\begin{array}{rcl} \varphi_* : T_xX & \longrightarrow & T_yY \\ D & \longmapsto & \varphi_*(D) := D{\circ}\varphi^* \,, \end{array}$$

y es fácil comprobar que es lineal.

Definición 4.1 Con la notación del anterior párrafo, la aplicación $\varphi_* : T_xX \to T_yY$ se llama *aplicación lineal tangente* en el punto x de la aplicación diferenciable φ.

Propiedades 4.2 Consideremos una aplicación diferenciable $\varphi : X \to Y$, un punto $x \in X$ y su imagen $y = \varphi(x) \in Y$. La demostración de las siguientes propiedades son sencillas y se dejan como ejercicio.

(a) (Regla de la cadena) Sea $\phi : Y \to Z$ otra aplicación diferenciable y $z = \phi(y) = \phi{\circ}\varphi(x)$; la composición $T_xX \xrightarrow{\phi_*} T_yY \xrightarrow{\varphi_*} T_zZ$ es igual a la aplicación lineal $T_xX \xrightarrow{(\phi\circ\varphi)_*} T_zZ$.

(b) Si $X \xrightarrow{I_X} X$ es la aplicación identidad de X, entonces $T_xX \xrightarrow{(I_X)_*} T_xX$ es la aplicación identidad de T_xX.

(c) Como consecuencia de las dos anteriores resulta que si $\varphi : X \to Y$ es un difeomorfismo, entonces $\varphi_* : T_xX \to T_yY$ es un isomorfismo lineal.

(d) La propiedad (c) anterior es más general: Si $\varphi : X \to Y$ es un difeomorfismo local en x, entonces $\varphi_* : T_xX \to T_yY$ es un isomorfismo lineal (véase el punto 2.5).

4.3 (Matriz de la aplicación lineal tangente) Sea $\varphi : X \to Y$ una aplicación diferenciable y sean $x \in X$ e $y = \varphi(x)$. Consideremos un entorno abierto coordenado $(V; v_1, \dots, v_m)$ de y, y dentro de $\varphi^{-1}(V)$ tomemos un entorno abierto coordenado $(U; u_1, \dots, u_n)$ de x. Entonces tenemos la aplicación diferenciable $\varphi : U \to V$, y queremos calcular la matriz de la aplicación lineal tangente $\varphi_* : T_xX \to T_yY$ en la bases $\big\{(\partial_{u_1})_x, \dots, (\partial_{u_n})_x\big\}$ de $T_xU = T_xX$ y $\big\{(\partial_{v_1})_y, \dots, (\partial_{v_m})_y\big\}$ de $T_yY = T_yV$.

Expresemos $\varphi : U \to V$ en las coordenadas consideradas. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ sea $f_i = v_i \circ \varphi = \varphi^*(v_i) \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $f_i = f_i(u_1, \dots, u_n)$, de modo que $\varphi = (f_1, \dots, f_m)$. La columna j-ésima de la matriz buscada son las coordenadas, en la base de T_yY, de la imagen por $\varphi_* : T_xX \to T_yY$ del j-ésimo vector de la base de T_xX, esto es,

$$\Big(\varphi_*\left((\partial_{u_j})_x\right)(v_1)\ , \dots,\ \varphi_*\left((\partial_{u_j})_x\right)(v_m)\Big)\,.$$

Calculando obtenemos

$$\varphi_*\left((\partial_{u_j})_x\right)(v_i) := \big((\partial_{u_j})_x \circ \varphi^*\big)(v_i) = (\partial_{u_j})_x\big(\varphi^*(v_i)\big) = (\partial_{u_j})_x(f_i) = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(x)\,.$$

Por lo tanto, la matriz de la aplicación lineal tangente φ_* en el punto x en las bases $\{(\partial_{u_j})_x\}$ y $\{(\partial_{v_i})_y\}$ es

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(x)\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial u_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial u_n}(x) \end{pmatrix}.$$

La anterior se llama *matriz jacobiana* de la aplicación diferenciable φ en el punto x (en las coordenadas consideradas).

El conocido *Teorema de la Función Inversa* del Análisis Matemático se reformula en nuestro lenguaje como sigue:

Teorema 4.4 *Sea $\varphi : X \to Y$ una aplicación diferenciable y sea $x \in X$. Si la aplicación lineal tangente $\varphi_* : T_xX \to T_{\varphi(x)}Y$ es isomorfismo, entonces φ es difeomorfismo local en el punto x.*

Demostración. Como tanto la hipótesis como la tesis del enunciado son propiedades locales, podemos pasar a un entorno abierto coordenado V de $\varphi(x)$ en Y y a un entorno abierto coordenado U de x en X tal que $U \subseteq \varphi^{-1}(V)$, y tendremos

$$\varphi : U \to V.$$

Además, como U es difeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$ ($n = \dim X$) y V es difeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^m$ ($m = \dim Y$), para simplificar podemos suponer directamente que U es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y que V es un abierto de $\mathbb{R}^m$. En las coordenadas cartesianas $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ y $(y_1, \dots, y_m)$ de $\mathbb{R}^m$ la expresión de φ será

$$\begin{array}{rcl} U & \xrightarrow{\varphi = (f_1, \dots, f_m)} & V \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \big(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\big)\,. \end{array}$$

Una vez en esta situación aplicamos los resultados conocidos de los cursos de cálculo. Pongamos $y = \varphi(x)$. Por hipótesis la aplicación lineal $\varphi_* : T_xX \to T_yY$ es isomorfismo (y por tanto debe ser $n = m$). Como en las bases $\{(\partial_{x_j})_x\}$ de T_xX y $\{(\partial_{y_i})_y\}$ de T_yY, la matriz de φ_* es la matriz jacobiana de φ en el punto x,

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right),$$

obtenemos que el determinante de dicha matriz (el jacobiano de φ en x) es no nulo. Aplicando el teorema de la función inversa del Análisis Matemático se sigue que existen un entorno abierto U_0 de x dentro de U y un entorno abierto V_0 de y dentro de V tales que la aplicación diferenciable $\varphi : U_0 \to V_0$ tiene inversa $\varphi^{-1} : V_0 \to U_0$ y es diferenciable, esto es, $\varphi : U_0 \to V_0$ es difeomorfismo. Por tanto φ es difeomorfismo local en x. ∎

Nota **4.5** La propiedad 4.2 (d) es el recíproco del anterior teorema. Por lo tanto el "teorema de la función inversa" es realmente una equivalencia (y así lo utilizaremos): *Sea $\varphi : X \to Y$ una aplicación diferenciable y sea $x \in X$. La aplicación lineal tangente $\varphi_* : T_xX \to T_{\varphi(x)}Y$ es isomorfismo si y sólo si φ es difeomorfismo local en x.*

5. Diferencial en un punto

Definición 5.1 Se llama *espacio cotangente* de una variedad diferenciable X en un punto $x \in X$, al espacio vectorial dual T_x^*X del espacio tangente T_xX. Los elementos de T_x^*X se denominan 1-*formas* en x.

Definición 5.2 Sea x un punto de una variedad diferenciable X y sea $f \in \mathcal{O}_x$. Se llama *diferencial* de f en x a la 1-forma d_xf definida como

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_xf : T_xX &\longrightarrow \mathbb{R} \\ D &\longmapsto \mathrm{d}_xf(D) := Df\,. \end{aligned}$$

Es inmediato comprobar que d_xf es en efecto lineal.

Propiedades 5.3 Sea x un punto de una variedad diferenciable X.

(a) La diferencial $\mathrm{d}_x : \mathcal{O}_x \to T_x^*X$ es una derivación, es decir, se cumplen: (i) $\mathrm{d}_x\lambda = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$; (ii) $\mathrm{d}_x(f+g) = \mathrm{d}_xf + \mathrm{d}_xg$; (iii) $\mathrm{d}_x(fg) = g(x)\cdot \mathrm{d}_xf + f(x)\cdot \mathrm{d}_xg$. Todas las igualdades anteriores son de comprobación inmediata.

(b) Si $u_1,\dots,u_n$ son coordenadas en un entorno del punto x, entonces $\{\mathrm{d}_xu_1,\dots,\mathrm{d}_xu_n\}$ es una base de T_x^*X. En efecto, basta tener en cuenta que se cumple $\mathrm{d}_xu_i\big((\partial_{u_j})_x\big) = \delta_{ij}$ para deducir que $\{\mathrm{d}_xu_1,\dots,\mathrm{d}_xu_n\}$ es justamente la base dual de $\{(\partial_{u_1})_x,\dots,(\partial_{u_n})_x\}$.

(c) Sean $u_1,\dots,u_n$ coordenadas en un entorno de x. Para todo germen $f \in \mathcal{O}_x$ tenemos (compruébese)

$$\mathrm{d}_xf = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_i}(x)\mathrm{d}_xu_i\,.$$

Es decir, las coordenadas de la 1-forma $\mathrm{d}_x f$ en la base $\{\mathrm{d}_x u_1, \dots, \mathrm{d}_x u_n\}$ son

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial u_n}(x)\right).$$

(d) La diferencial $\mathrm{d}_x : \mathcal{O}_x \to T_x^* X$ es epiyectiva (consecuencia trivial de la propiedad (b)).

(e) (Ejercicio) Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable con U entorno abierto de x. Mediante la identificación natural $T_{f(x)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$ se cumple que la diferencial $\mathrm{d}_x f : T_x X \to \mathbb{R}$ coincide con la aplicación lineal tangente $f_* : T_x X \to T_{f(x)}\mathbb{R}$.

Definición 5.4 Sea $\varphi : X \to Y$ una aplicación diferenciable y sean $x \in X$ e $y = \varphi(x)$. La aplicación dual de la aplicación lineal tangente $\varphi_* : T_x T \to T_y Y$ se llama *aplicación lineal cotangente* de la aplicación diferenciable φ en el punto x, y la denotaremos $\varphi^* : T_y^* Y \to T_x^* X$.

Del Álgebra Lineal sabemos que se cumplen:
(i) φ_* es inyectiva $\Leftrightarrow$ φ^* es epiyectiva;
(ii) φ_* es epiyectiva $\Leftrightarrow$ φ^* es inyectiva;
(iii) φ_* es isomorfismo $\Leftrightarrow$ φ^* es isomorfismo.

Lema 5.5 *Sean $\varphi : X \to Y$ una aplicación diferenciable, $x \in X$ e $y = \varphi(x)$. Para cada $f \in \mathcal{O}_y$ se cumple la igualdad*

$$\varphi^*(\mathrm{d}_y f) = \mathrm{d}_x(\varphi^* f) \tag{5.1}$$

(nótese que la φ^* que aparece a la izquierda de la anterior igualdad NO es la misma que la que aparece a la derecha). Es decir, es conmutativo el siguiente cuadrado

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_y & \xrightarrow{\varphi^*} & \mathcal{O}_x \\ {\scriptstyle \mathrm{d}_y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{d}_x} \\ T_y^* Y & \xrightarrow{\varphi^*} & T_x^* X \end{array} .$$

Demostración. En efecto, dado $D \in T_x X$, por una parte tenemos

$$\varphi^*(\mathrm{d}_y f)(D) = \mathrm{d}_y f(\varphi_* D) = \varphi_* D(f) = D(\varphi^*(f)),$$

y por otra parte es $\mathrm{d}_x \varphi^*(f)(D) = D(\varphi^*(f))$. ∎

5.6 Según la propiedad 5.3 (b), las diferenciales de un sistema de coordenadas generan el espacio cotangente. En el próximo teorema veremos que esta propiedad caracteriza a los sistemas de coordenadas, y su demostración será sencilla teniendo en cuenta la siguiente observación: si X es una variedad diferenciable y tenemos funciones $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{C}^\infty(X)$, entonces el que dichas funciones definan un sistema de coordenadas en algún entorno abierto de un punto $x \in X$, significa justamente que la aplicación diferenciable $X \xrightarrow{(f_1,\dots,f_r)} \mathbb{R}^r$ sea un difeomorfismo local en x. En tal caso, diremos abreviadamente que "las funciones $f_1, \dots, f_r$ son coordenadas locales en el punto x".

Teorema 5.7 *Sean $f_1, \dots, f_r$ funciones diferenciables sobre una variedad diferenciable X. Dado $x \in X$, si la familia de 1-formas $\{\mathrm{d}_x f_1, \dots, \mathrm{d}_x f_r\}$ es una base de $T_x^* X$, entonces $f_1, \dots, f_r$ son coordenadas locales en x.*

Demostración. Supongamos que $\{\mathrm{d}_x f_1, \dots, \mathrm{d}_x f_r\}$ es base de $T_x^* X$. Consideremos la aplicación diferenciable $\varphi = (f_1, \dots, f_r) : X \to \mathbb{R}^r$ y sea $y = \varphi(x)$. Nótese que para cada $i \in \{1, \dots, r\}$ tenemos $\varphi^*(x_i) = f_i$ (donde $x_1, \dots, x_r$ son las coordenadas cartesianas sobre $\mathbb{R}^r$), y por lo tanto

$$\varphi^*(\mathrm{d}_y x_i) = \mathrm{d}_x(\varphi^*(x_i)) = \mathrm{d}_x f_i \,.$$

Entonces la aplicación cotangente $\varphi^* : T_y^* \mathbb{R}^r \to T_x^* X$ es un isomorfismo, porque transforma una base en una base. Para terminar la demostración basta aplicar el teorema de la función inversa (véase el teorema 4.4). ∎

Ejercicio 5.8 Sea $\varphi : V \to V'$ una aplicación diferenciable entre $\mathbb{R}$-espacios vectoriales de dimensión finita. En el Cálculo Diferencial se define la *diferencial* de φ en un punto $p \in V$ como la única aplicación lineal $\mathrm{d}_p \varphi : V \to V'$ que cumple la condición

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{\varphi(p+v) - \varphi(p) - \mathrm{d}_p\varphi(v)}{\|v\|} = 0 \,,$$

donde $\|\,.\,\|$ es cualquier norma sobre el espacio vectorial V (por ejemplo, la definida a partir de una métrica euclídea).

Teniendo en cuenta el ejemplo 3.7 (en el que se ha visto que el espacio tangente de un espacio vectorial se identifica de modo natural con el propio espacio vectorial), pruébese que la diferencial de φ en un punto $p \in V$ coincide con su aplicación lineal tangente en dicho punto. En otras palabras, pruébese que el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\mathrm{d}_p\varphi} & V' \\ \| & & \| \\ T_pV & \xrightarrow{\varphi_*} & T_{\varphi(p)}V' \end{array} \tag{5.2}$$

es conmutativo. $\big[$Indicación: Considérese una base $\{v'_1, \dots, v'_m\}$ en V' y su base dual $\{u'_1, \dots, u'_m\}$ (siendo $m = \dim V'$), en cuyo caso las funciones $u'_1, \dots, u'_m$ son un sistema de coordenadas sobre V' (véanse los cálculos hechos en el ejemplo 3.7); la expresión de φ en esas coordenadas será $\varphi = (f_1, \dots, f_m)$, donde $f_i = u'_i \circ \varphi = \varphi^*(u'_i) \in \mathcal{C}^\infty(V)$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. Para probar la conmutatividad del cuadrado 5.2 bastará ver que, dado $v \in V$, las coordenadas del vector $\mathrm{d}_p\varphi(v)$ en la base $\{v'_1, \dots, v'_m\}$ de V' coinciden con las coordenadas de $\varphi_*(\mathrm{D}_p^v)$ en la base $\big\{(\partial_{u'_1})_{\varphi(p)}, \dots, (\partial_{u'_m})_{\varphi(p)}\big\}$ de $T_{\varphi(p)}V'$.$\big]$

Observación **5.9** Sea $\varphi : X \to Y$ una aplicación diferenciable cualquiera y sea x un punto de X. A la aplicación lineal tangente $\varphi_* : T_x X \to T_{\varphi(x)} Y$ se la denomina en algunos textos *diferencial de la aplicación* φ *en el punto* x. Según el ejercicio anterior, esa terminología es coherente con la nuestra y con la utilizada en el Cálculo Diferencial.

6. Problemas

6.1 Estúdiese la aplicación lineal tangente de la aplicación diferenciable $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \to z^2$. Obténganse los puntos de $\mathbb{C}$ donde φ es un difeomorfismo local.

6.2 Estúdiese la aplicación lineal tangente de la aplicación diferenciable $\phi : S_2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \to (x, y)$. Obténganse los puntos de S_2 donde ϕ es un difeomorfismo local.

6.3 Dadas variedades diferenciables X e Y y dado $(x, y) \in X \times Y$, pruébese que los espacios vectoriales $T_{(x,y)}(X \times Y)$ y $T_x X \times T_y Y$ son canónicamente isomorfos. Estúdiese dicho isomorfismo en coordenadas.

6.4 Como aplicación del problema 6.3 pruébense:

(a) Dadas aplicaciones diferenciables $f : Z \to X$ y $g : Z \to Y$, para la aplicación diferenciable $(f, g) : Z \to X \times Y$ se cumple

$$(f, g)_* = (f_*, g_*)\,.$$

(b) Dadas aplicaciones diferenciables $f : X \to \bar{X}$ y $g : Y \to \bar{Y}$, para la aplicación diferenciable $f \times g : X \times Y \to \bar{X} \times \bar{Y}$ se cumple

$$(f \times g)_* = f_* \times g_*\,.$$

(c) Sea $\phi : X \times Y \to Z$ una aplicación diferenciable y fijemos un punto $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Tenemos $\phi_* = \phi_{1*} + \phi_{2*}$ para las aplicaciones diferenciables

$$\begin{array}{rcl} \phi_1 : X & \longrightarrow & Z \\ x & \longmapsto & \phi(x, y_0)\,, \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} \phi_2 : Y & \longrightarrow & Z \\ y & \longmapsto & \phi(x_0, y)\,, \end{array}$$

donde dicha igualdad hay que entenderla del siguiente modo: $D = (D_1, D_2) \in T_{(x_0,y_0)}(X \times Y) = T_{x_0} X \times T_{y_0} Y$,

$$\phi_*(D) = \phi_{1*}(D_1) + \phi_{2*}(D_2)\,.$$

6.5 Una aplicación diferenciable puede ser difeomorfismo local en todo punto y no ser difeomorfismo (póngase un ejemplo). Pruébese que si una aplicación diferenciable es difeomorfismo local en todo punto y biyectiva, entonces es difeomorfismo.

6.6 **Coordenadas polares:** Dado un punto (x, y) de $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, existe $\theta \in \mathbb{R}$, único salvo múltiplos enteros de 2π, tal que

$$x = r \cos\theta\,, \qquad y = r \operatorname{sen}\theta\,,$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Diremos que (r, θ) son "coordenadas polares" del punto (x, y).

(a) Pruébese que la aplicación epiyectiva

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \\ (r, \theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) \end{array}$$

es difeomorfismo local en todo punto.

(b) Dedúzcase de (a) que las coordenadas polares sobre $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ son un sistema de coordenadas locales (esto es, todo punto tiene un entorno donde son coordenas). Más concretamente, si R es una semirecta de $\mathbb{R}^2$ con extremo en el origen (por ejemplo, $R = \{(x, 0) : x \geq 0\}$), entonces (r, θ) son coordenadas sobre el abierto $U = \mathbb{R}^2 - R$.

6.7 Coordenadas cilíndricas: Las coordenadas polares (r,θ) de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ definen de modo natural coordenadas (r,θ,z) sobre $\mathbb{R}^3 - \{\text{eje } z\}$ $(= (\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}) \times \mathbb{R})$: dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 - \{\text{eje } z\}$ existe $\theta \in \mathbb{R}$, único salvo múltiplos enteros de 2π, tal que

$$x = r\cos\theta\,, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta\,, \qquad z = z\,,$$

donde $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Diremos que (r,θ,z) son "coordenadas cilíndricas" del punto (x,y,z). Compruébese que (r,θ,z) son coordenadas locales sobre $\mathbb{R}^3 - \{\text{eje } z\}$.

6.8 Coordenadas esféricas: Dado un punto (x,y,z) de $\mathbb{R}^3 - \{\text{eje } z\}$, existe $\theta \in \mathbb{R}$, único salvo múltiplos enteros de 2π, y existe un único $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$ tales que

$$x = r\cos\theta\cos\varphi\,, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,, \qquad z = r\operatorname{sen}\varphi\,,$$

donde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Diremos que (r,θ,φ) son "coordenadas esféricas" del punto (x,y,z). A θ se le llama "longitud" del punto (x,y,z) y a φ se le conoce como "latitud" del punto (x,y,z).

(a) Pruébese que la aplicación epiyectiva

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 - \{\text{eje } z\} \\ (r,\theta,\varphi) & \longmapsto & (r\cos\theta\cos\varphi, r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, r\operatorname{sen}\varphi) \end{array}$$

es difeomorfismo local en todo punto.

(b) Dedúzcase de (a) que las coordenadas esféricas sobre $\mathbb{R}^3 - \{\text{eje } z\}$ son un sistema de coordenadas locales. Más concretamente, si H es un semiplano de $\mathbb{R}^3$ cuyo borde es el eje z (por ejemplo, $H = \{(x,0,z) \,:\, x \geq 0\}$), entonces (r,θ,φ) son coordenadas sobre el abierto $U = \mathbb{R}^3 - H$.

6.9 ¿Cómo podemos generalizar los problemas 6.6 y 6.8 para $\mathbb{R}^{n+1}$ con $n+1 \geq 4$, teniendo en cuenta que la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ (r,\alpha_1,\dots,\alpha_n) & \longmapsto & (r\cdot\cos\alpha_1\cdot\dots\cdot\cos\alpha_n\,, \\ & & \quad r\cdot\operatorname{sen}\alpha_1\cdot\cos\alpha_2\cdot\dots\cdot\cos\alpha_n\,,\ \dots\,,\ r\cdot\operatorname{sen}\alpha_{n-1}\cdot\cos\alpha_n\,,\ r\cdot\operatorname{sen}\alpha_n)\,, \end{array}$$

es diferenciable? (Estúdiese el caso $n+1 = 4$.)

6.10 Sea $\varphi : V \to V'$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales reales de dimensión finita. Dado un punto $p \in V$, teniendo en cuenta las identificaciones naturales $T_pV \simeq V$ y $T_{\varphi(p)}V' \simeq V'$, pruébese que la aplicación lineal tangente $\varphi_* : T_pV \to T_{\varphi(p)}V'$ es igual a φ.

6.11 ¿Existe sobre S_2 un sistema de coordenadas global?

6.12 Dado un punto x de una variedad diferenciable X, si $f \in \mathcal{O}_x$ es tal que $\mathrm{d}_x f \neq 0$, entonces existe un entorno abierto V de x tal que $\mathrm{d}_y f \neq 0$ para todo $y \in V$.

Apéndice: Definición clásica de diferencial

Teorema *Para cada punto x de una variedad diferenciable X existe un isomorfismo canónico $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \simeq T_x^*X$, donde $\mathfrak{m}_x$ es el ideal maximal del anillo local $\mathcal{O}_x$.*

Demostración. Observemos primero que la diferencial $\mathrm{d}_x : \mathcal{O}_x \to T_x^*X$ cumple $\mathrm{d}_x(\mathfrak{m}_x^2) = 0$. En efecto, un elemento de $\mathfrak{m}_x^2$ es de la forma $\sum_{i=1}^r f_i g_i$ con $f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_r \in \mathfrak{m}_x$, y al diferenciar resulta

$$\mathrm{d}_x\left(\sum_{i=1}^r f_i g_i\right) = \sum_{i=1}^r (g_i(x)\mathrm{d}_x f_i + f_i(x)\mathrm{d}_x g_i) = 0$$

porque $f_i(x) = g_i(x) = 0$ para $i = 1, \ldots, r$.

Como $\mathfrak{m}_x$ es un $\mathcal{O}_x$-módulo y $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x = \mathbb{R}$, tenemos que $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, y lo dicho en el párrafo anterior prueba que el morfismo de $\mathcal{O}_x$-módulos $\mathrm{d}_x : \mathfrak{m}_x \to T_x^*X$ factoriza de modo único por una aplicación $\mathbb{R}$-lineal (que denotamos igual)

$$\mathrm{d}_x : \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \to T_x^*X\,.$$

Consideremos ahora un sistema de coordenadas $u_1, \ldots, u_n$ en un entorno de x. Según la proposición 2.9, los gérmenes $u_1 - \lambda_1, \ldots, u_n - \lambda_n$ generan $\mathfrak{m}_x$ como $\mathcal{O}_x$-módulo, así que las clases $\{\,\overline{u_i - \lambda_i}\,\}$ generan el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. Tenemos

$$\mathrm{d}_x(\,\overline{u_i - \lambda_i}\,) = \mathrm{d}_x(u_i - \lambda_i) = \mathrm{d}_x u_i\,,$$

es decir, d_x transforma un sistema de generadores de $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ en una base de T_x^*X; por lo tanto es un isomorfismo. ∎

Siguiendo con la notación del anterior teorema, dado un germen $f \in \mathcal{O}_x$ tenemos $f - f(x) \in \mathfrak{m}_x$, y la clase $\overline{f - f(x)}$ se corresponde por el isomorfismo $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \simeq T_x^*X$ con la 1-forma $\mathrm{d}_x f$. Por tanto, si dado $r \in \mathbb{N}$ llamamos "infinitésimos de orden r en el punto x" a los elementos de $\mathfrak{m}_x^r$, y si $f - f(x)$ es el "incremento de f en x", podemos decir que *la diferencial de una función en un punto es el incremento de la función en dicho punto, módulo infinitésimos de segundo orden.* Ésta es, esencialmente, la definición clásica de la diferencial que fue dada por Leibniz en el siglo XVII.

Apéndice: Definición geométrica del espacio tangente

Comencemos dando una interpretación de los vectores tangentes como "puntos infinitesimalmente próximos". Fijemos un punto p de una variedad diferenciable X y tomemos una "curva en X que pasa por p en el instante $t = 0$", esto es, una aplicación diferenciable $\sigma : I \to X$ definida en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$ entorno de 0 tal que $\sigma(0) = p$ (t denota la coordenada cartesiana en I). Se llama "vector tangente a la curva σ en el punto p" al vector

$$T := \sigma_*((\partial_t)_0) \in T_pX\,.$$

Considerando coordenadas locales $u_1, \ldots, u_n$ en el punto p, la curva σ se escribirá en la forma $\sigma(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$, siendo $f_i := u_i \circ \sigma$. En particular

$$p = \sigma(0) = (f_1(0), \ldots, f_n(0))\,.$$

Tenemos

$$T=\sigma_*\big((\partial_t)_0\big)=\sum_{i=1}^n \sigma_*\big((\partial_t)_0\big)(u_i)\cdot(\partial_{u_i})_p=\sum_{i=1}^n(\partial_t)_0(u_i\circ\sigma)\cdot(\partial_{u_i})_p=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f_i}{\partial t}(0)\cdot(\partial_{u_i})_p\,,$$

es decir, en coordenadas es

$$T=(f_1'(0),\dots,f_n'(0))\,.$$

Esta expresión nos dice de paso que todo vector tangente en el punto p es el vector tangente de alguna curva que pasa por p.

Si partimos del punto $p=\sigma(0)$ y realizamos un "desplazamiento infinitesimal" a lo largo de la curva σ, deberíamos llegar al punto $\sigma(\varepsilon)$ siendo ε una cantidad "infinitesimal". Para dar una definición de $\sigma(\varepsilon)$ consideremos los desarrollos en serie de Taylor de las componentes de σ,

$$f_i(t)=f_i(0)+f_i'(0)t+h_i(t)t^2\qquad(h_i\in\mathcal{C}^\infty(I))\,.$$

Sustituyendo $t=\varepsilon$ y entendiendo que ε^2 es una cantidad despreciable, obtenemos $f_i(\varepsilon)=f_i(0)+f_i'(0)\varepsilon$, luego en coordenadas se cumple

$$\sigma(\varepsilon)=(f_1(\varepsilon),\dots,f_n(\varepsilon))=(f_1(0)+f_1'(0)\varepsilon,\dots,f_n(0)+f_n'(0)\varepsilon)=p+\varepsilon T$$

Así que el desplazamiento infinitesimal $\sigma(\varepsilon)$ viene determinado por el vector tangente T. En conclusión, los vectores tangentes en el punto p se corresponden biunívocamente con los "desplazamientos (o arcos) infinitesimales" desde dicho punto. En otras palabras, podemos entender que un vector tangente en p representa un punto "infinitesimalmente próximo" a p.

Otra manera de enunciar la equivalencia anterior es como sigue. Diremos que dos curvas $\sigma: I\to X$, $\phi: J\to X$ que pasan por p en el instante $t=0$ son equivalentes, si sus desarrollos en serie de Taylor hasta el primer orden coinciden. Entonces el conjunto de las clases de equivalencia de curvas que pasan por p se corresponde biunívocamente con el espacio tangente T_pX. Esta es la llamada *definición geométrica* del espacio tangente.