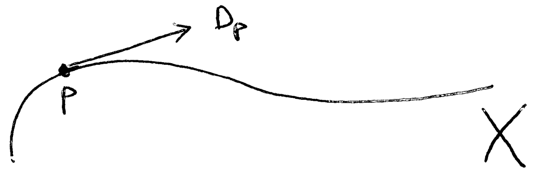
Ejemplos de variedades orientables y no orientables

(a) En $\mathbb{R}^n$, sabemos que la n-forma $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ es no nula en todo punto; la orientación que define esta n-forma se conoce como orientación estándar de $\mathbb{R}^n$. Para dicha orientación la base $\{\partial x_1, \ldots, \partial x_n\}$ está orientada positivamente, ya que

$$(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)(\partial x_1, \ldots, \partial x_n) = 1 > 0.$$

(b) Sea X una variedad diferenciable orientable de dimensión 1, y sea $[\omega]$ una orientación sobre X.



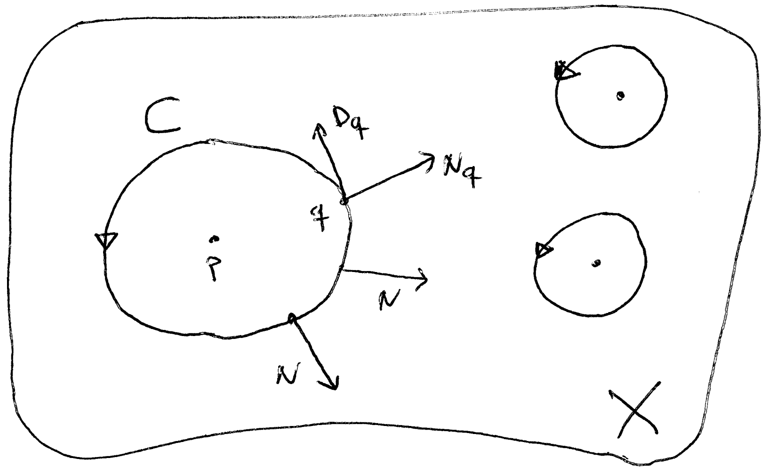
Fijados un punto $p \in X$ y un vector no nulo $D_p \in T_pX$, D_p está orientado positivamente si $\omega(D_p) > 0$.

Dado un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, si $\lambda > 0$ entonces D_p y λD_p tienen la misma orientación, y si $\lambda < 0$ entonces D_p y λD_p tienen distinta orientación. Es decir, la orientación indica en cada punto p de X cuál de los "dos posibles sentidos" de $T_pX \approx \mathbb{R}$ es el positivo.

Esencialmente, "una orientación en una curva es dar un sentido de recorrido de la curva".

(c) Sea X una variedad diferenciable orientable de dimensión 2, y sea $[\omega]$ una orientación sobre X.

Fijado un punto $p \in X$, como X es localmente difeomorfo a $\mathbb{R}^2$, es claro que podemos considerar un "disco" en X "centrado" en p cuya frontera es una "circunferencia" C (en el lenguaje que veremos, el disco es una "variedad con borde" en X cuyo "borde" es C). También es claro (piénsese en el caso $X = \mathbb{R}^2$) que sobre la curva C podemos



considerar un campo normal N formado por vectores tangentes a X: dado $q \in C$, N_q es un vector tangente a X en q que es normal a C, esto es, tal que

$$T_q X = T_q C \perp \langle N_q \rangle .$$

El campo normal N lo elegimos de modo que varíe diferenciablemente sobre la curva C, y de manera que "apunte hacia fuera" del disco.

La orientación $[\omega]$ de X induce sobre la curva C la orientación definida por la 1-forma

$$\bar{\omega} = (i_N \omega)_{|C} = \omega(N, -)_{|C} .$$

Es decir, dado $q \in C$, un vector no nulo $D_q \in T_q C$ está orientado positivamente cuando la base $\{N_q, D_q\}$ de $T_q X$ sea positiva para la orientación de X:

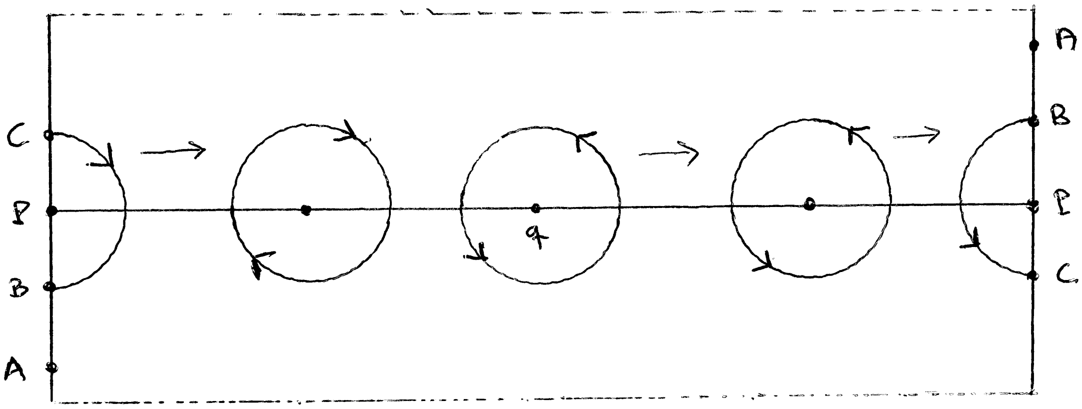
$$\bar{\omega}_q(D_q) > 0 \iff \omega_q(N_q, D_q) > 0$$

(pues por definición de $\bar{\omega}$ es $\bar{\omega}_q(D_q) = \omega_q(N_q, D_q)$).

Es decir, la orientación de X determina un sentido de recorrido de C.

Por lo tanto, "una orientación en una superficie consiste en dar un sentido de giro alrededor de cada punto de la superficie".

(d) La banda de Möbius se obtiene del rectángulo del dibujo siguiente (abierto por arriba y por abajo), pegando el lado izquierdo con el lado derecho de manera que cuando uno se recorre "hacia arriba", el otro se recorre "hacia abajo".



Consideremos la recta horizontal dentro del rectángulo que pasa por los puntos p y q del dibujo (recta que define una circunferencia dentro de la banda de Möbius).

Supongamos que la banda es orientable. Entonces alrededor de cada punto suyo hay fijado un sentido de giro; debe ocurrir que el sentido de giro "varía diferenciablemente" sobre la superficie. Supongamos que en el punto q el sentido de giro determinado es el "contrario al movimiento de las agujas de un reloj". Si q se se mueve hacia la derecha por la recta mencionada llegará hasta p y aparecerá por la izquierda, y luego llegará de nuevo a q pero con el sentido de giro contrario al de partida. Esto es una contradicción, por lo que la banda de Möbius no puede ser orientable. (¡OJO!: Los argumentos utilizados en este ejemplo son muy intuitivos, pero no son rigurosos.)

(e) Puede probarse que el abierto complementario de un punto en un plano proyectivo real es una banda de Möbius. Por lo tanto el plano proyectivo real no es orientable. (Si un plano proyectivo real fuera orientable, entonces también sería orientable todo abierto no vacío suyo.)

Noción de "apuntar hacia fuera"

Sea Ω una variedad con borde en una variedad diferenciable X. Consideremos un punto $p \in \partial\Omega$ y un vector $D_p \in T_pX$. Probemos que D_p apunta hacia fuera de Ω si y sólo si se cumplen:

(i) $D_p \notin T_p(\partial\Omega)$,

(ii) para toda curva $\sigma : I \longrightarrow X$ tal que $\sigma(0) = p$ y $\sigma_*((\partial_t)_0) = D_p$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\sigma((-\varepsilon, 0)) \subseteq \Omega$ y $\sigma((0,\varepsilon)) \subseteq \Omega^c$.

En efecto, sea $\sigma : I \to X$ una curva cualquiera que en $t=0$ pasa por p y cuyo vector tangente en p es D_p, y consideremos un abierto coordenado $(U; u_1, \dots, u_n)$ en X entorno de p tal que $\Omega \cap U = \{x \in U : u_1(x) \leq 0\}$, en cuyo caso será $(\partial\Omega) \cap U = \{x \in U : u_1(x) = 0\}$.

Como nuestro problema es local podemos quedarnos con la parte de curva que queda dentro de U: $\sigma : I \longrightarrow U$. En las coordenadas $u_1, \dots, u_n$ será $p = (0, a_2, \dots, a_n)$ $(p \in \partial\Omega \equiv u_1 = 0)$,

$D_p = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (en la base $\{(\partial u_1)_p, \dots, (\partial u_n)_p\}$ de T_pX),

$$\sigma(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t)), \quad \sigma'(t) = (u_1'(t), \dots, u_n'(t)),$$

$$\sigma(0) = (u_1(0), \dots, u_n(0)) = (0, a_2, \dots, a_n), \quad \sigma'(t) = (u_1'(t), \dots, u_n'(t)) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n);$$

en particular $u_1 = u_1(t)$ es una función real de variable real tal que $u_1(0) = 0$ y $u_1'(0) = \lambda_1$.

Por una parte, $u_2, \dots, u_n$ son coordenadas sobre $\partial\Omega$ $(\equiv u_1 = 0)$ y $T_p(\partial\Omega) = \langle d_pu_1 \rangle^\circ = \langle (\partial u_2)_p, \dots, (\partial u_n)_p \rangle \subseteq T_pX$; por lo tanto $D_p = \lambda_1(\partial u_1)_p + \lambda_2(\partial u_2)_p + \cdots + \lambda_n(\partial u_n)_p$ es tangente a $\partial\Omega$ en p si y sólo si $\lambda_1 = 0$. Por otra parte, como $\Omega \equiv u_1 \leq 0$ y $\Omega^c \equiv u_1 > 0$, es claro que la condición (ii) significa que la función u_1 es estrictamente creciente en $t=0$, esto es, que $\lambda_1 = u_1'(0) \geq 0$.

De todo obtenemos:

(i) y (ii) $\iff \lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_1 \geq 0 \iff \lambda_1 > 0 \iff$ D_p apunta hacia fuera de Ω.

La integral se conserva por imágenes inversas (en el siguiente sentido): Sea $\varphi : Y \longrightarrow X$ un difeomorfismo entre variedades orientadas que conserva la orientación, y sea ω una n-forma sobre X cuyo soporte es compacto. Entonces se cumple

$$\int_X \omega = \int_Y \varphi^* \omega . \qquad (*)$$

Teniendo en cuenta cómo se ha definido la integral de una n-forma, y que si U es un abierto coordenado de X entonces $V = \varphi^{-1}(U)$ es un abierto coordenado de Y (por ser φ difeomorfismo), es claro que es suficiente probar la igualdad $(*)$ cuando ω tiene su soporte contenido en un abierto coordenado $(U; u_1, \dots, u_n)$ de X tal que $du_1 \wedge \dots \wedge du_n$ define la orientación en U. Supongamos pues que es esa la situación.

Por una parte, si $f \in C^\infty(U)$ es la única función tal que $\omega = f \cdot du_1 \wedge \dots \wedge du_n$, entonces

$$\int_X \omega = \int_U f \cdot du_1 \cdots du_n .$$

Por otra parte, si $\bar{U}$ es el abierto de $\mathbb{R}^n$ tal que $U \xrightarrow{(u_1, \dots, u_n)} \bar{U}$ es difeomorfismo y $F \in C^\infty(\bar{U})$ es la única función tal que $f = F \circ (u_1, \dots, u_n)$, entonces

$$\int_U f \cdot du_1 \cdots du_n = \int_{\bar{U}} F(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n .$$

Por lo tanto debe ser

$$\int_X \omega = \int_{\bar{U}} F(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n .$$

Consideremos ahora en Y el abierto coordenado $(V; v_1, \dots, v_n)$ donde

$$V = \varphi^{-1}(U), \quad v_1 = \varphi^*(u_1) = u_1 \circ \varphi, \ \dots, \ v_n = \varphi^*(u_n) = u_n \circ \varphi .$$

El abierto de $\mathbb{R}^n$ difeomorfo a V por las coordenadas $(v_1, \dots, v_n)$ es también $\bar{U}$:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi", "\sim"'] \arrow[rr, bend left, "(v_1, \dots, v_n) = (u_1, \dots, u_n) \circ \varphi"] & U \arrow[r, "(u_1, \dots, u_n)", "\sim"'] & \bar{U} \end{tikzcd}.$$

Tenemos

$$\varphi^* w = \varphi^*(f \cdot du_1 \wedge \dots \wedge du_n) = \varphi^*(f) \cdot \varphi^*(du_1) \wedge \dots \wedge \varphi^*(du_n)$$

$$= \varphi^*(f) \cdot d(\varphi^* u_1) \wedge \dots \wedge d(\varphi^* u_n) = \varphi^*(f) \cdot dv_1 \wedge \dots \wedge dv_n;$$

como $dv_1 \wedge \dots \wedge dv_n = \varphi^*(du_1 \wedge \dots \wedge du_n)$ define la orientación sobre V (porque φ conserva la orientación), tenemos

$$\int_Y \varphi^* w = \int_V \varphi^*(f) \cdot dv_1 \cdots dv_n .$$

Además, del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi^*(f)"'] & U \arrow[r, "(u_1, \dots, u_n)"] \arrow[d, "f"] & \bar{U} \arrow[dl, "F"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

Se sigue que la única función $G \in \mathcal{C}^\infty(\bar{U})$ que cumple $\varphi^*(f) = G \circ (v_1, \dots, v_n)$ es justamente $G = F$, por lo que se cumple

$$\int_V \varphi^*(f)\, dv_1 \cdots dv_n = \int_{\bar{U}} F(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n .$$

De todo obtenemos

$$\int_X w = \int_{\bar{U}} F(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n = \int_Y \varphi^* w .$$

—— . ——

Teorema de Stokes

Fijemos una variedad orientada X de dimensión n y una variedad con borde Ω en X.

Si ω es una $(n-1)$-forma sobre X, entonces $d\omega$ es una n-forma sobre X tal que $sop(d\omega) \subseteq sop(\omega)$. Veamos cómo sería la situación en un abierto coordenado $(U; u_1, \dots, u_n)$ de X. Una base de $(n-1)$-formas sobre U es (utilizamos la notación $du_1 \wedge \dots \wedge \check{du_i} \wedge \dots \wedge du_n = du_1 \wedge \dots \wedge du_{i-1} \wedge du_{i+1} \wedge \dots \wedge du_n$) $\{du_1 \wedge \dots \wedge \check{du_i} \wedge \dots \wedge du_n\}_{i=1}^n$. Existen funciones $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tales que la expresión de la $(n-1)$-forma ω sobre U es

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \cdot f_i \cdot du_1 \wedge \dots \wedge \check{du_i} \wedge \dots \wedge du_n ,$$

en cuyo caso será

$$d\omega = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial u_i} \right) \cdot du_1 \wedge \dots \wedge du_n ;$$

en efecto:

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \cdot df_i \wedge du_1 \wedge \dots \wedge \check{du_i} \wedge \dots \wedge du_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial u_j} du_j \right) \wedge du_1 \wedge \dots \wedge \check{du_i} \wedge \dots \wedge du_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial u_i} \cdot du_i \wedge du_1 \wedge \dots \wedge du_{i-1} \wedge du_{i+1} \wedge \dots \wedge du_n \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial u_i} \right) \cdot du_1 \wedge \dots \wedge du_n . \end{aligned}$$

Como consecuencia obtenemos: sea $x_0 \in U$ tal que $x_0 \notin sop(\omega)$, esto es, x_0 está en el abierto $W = \{x \in U : x \notin sop(\omega)\}$; como ω se anula sobre W, las funciones $f_1, \dots, f_n$ que determinan las coordenadas de ω sobre U también se anulan sobre W; pero entonces las parciales $\partial f_1/\partial u_1, \dots, \partial f_n/\partial u_n$ son idénticamente nulas sobre W y por tanto $d\omega = 0$ en el abierto W; de todo se sigue $x_0 \notin sop(d\omega)$ (porque $x_0 \in W$).

Lo anterior prueba que se cumple $sop(d\omega) \subseteq sop(\omega)$, como afirmamos antes.

Supongamos ahora que para la $(n-1)$-forma w se cumple que $sop(w) \cap \Omega$ es compacto. Entonces para la n-forma dw se cumple que $sop(dw) \cap \Omega$ también es compacto, y por lo tanto tenemos la integral $\int_\Omega dw$. Además, cuando $\partial\Omega \neq \phi$, $w_{/\partial\Omega}$ es una $(n-1)$-forma sobre la variedad orientada $\partial\Omega$ de dimensión $n-1$ tal que $sop(w_{|\partial\Omega})$ $(\subseteq sop(w) \cap \Omega)$ es compacto, de modo que tenemos la integral $\int_{\partial\Omega} w_{|\partial\Omega}$; esta última integral la denotaremos simplemente $\int_{\partial\Omega} w$.

<u>Teorema</u> (Stokes): Con la notación e hipótesis anteriores, se cumple

$$\int_\Omega dw = \int_{\partial\Omega} w \, . \qquad (\diamond)$$

Cuando $\partial\Omega = \phi$ la igualdad del enunciado significa $\int_\Omega dw = 0$.

- Caso particular (tomando $\Omega = X$): Para toda $(n-1)$-forma w sobre X de soporte compacto se cumple $\int_X dw = 0$.

<u>Lema</u>: Con las hipótesis del anterior teorema, para todo punto $x \in X$ existe un entorno abierto U de x con la siguiente propiedad: si w es una $(n-1)$-forma sobre X cuyo soporte está contenido en U y tal que $sop(w) \cap \Omega$ es compacto, entonces para w se cumple la igualdad $(\diamond)$.

<u>Demostración del lema</u>. Fijemos un punto $x \in X$ y distingamos varios casos.

<u>1^{er} caso</u>: $x \notin \Omega$; tomamos $U = \Omega^c$. Si $sop(w) \subseteq U$, entonces $sop(dw) \subseteq U$ y por lo tanto

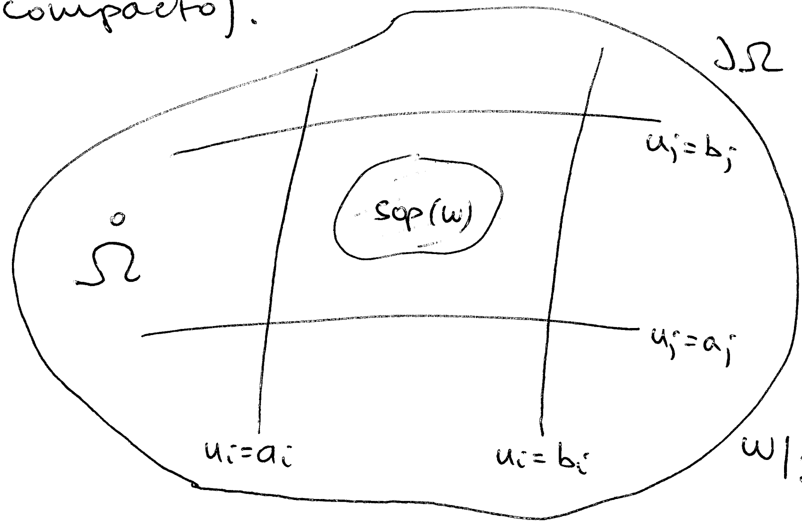
$$dw = 0 \text{ sobre } \Omega \;\Rightarrow\; \int_\Omega dw = \int_X I_\Omega \cdot dw = \int_X 0 = 0;$$

$$w = 0 \text{ sobre } \Omega \;\Rightarrow\; w_{|\partial\Omega} = 0 \;\Rightarrow\; \int_{\partial\Omega} w = \int_{\partial\Omega} 0 = 0.$$

<u>2º caso</u>: $x \in \mathring{\Omega}$; tomemos un entorno abierto coordenado $(U; u_1, \dots, u_n)$ de x tal que $du_1 \wedge \dots \wedge du_n$ define la orientación sobre U; además, tomando U suficientemente pequeño podemos suponer que U es un "cubo" abierto:

$$U \xrightarrow[\sim]{(u_1, \dots, u_n)} \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \bar{U} = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n).$$

Sea ω una $(n-1)$-forma de soporte contenido en U (y en particular $\mathrm{sop}(\omega)$ es compacto, porque todo cerrado de $\bar{U}$ es compacto).



$\omega|_{\partial\Omega} = 0$

Consideremos las funciones $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tales que

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f_i \cdot du_1 \wedge \dots \wedge \overset{\vee}{du_i} \wedge \dots \wedge du_n,$$

$$d\omega = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial u_i} \right) \cdot du_1 \wedge \dots \wedge du_n$$

sobre el abierto U.

Por una parte tenemos $\int_{\partial\Omega} \omega = 0$ porque $\omega|_{\partial\Omega} = 0$.

Por otra parte:

$$\int_\Omega d\omega = \int_X I_\Omega \cdot d\omega = \int_U I_\Omega \cdot d\omega = \int_U d\omega =$$

$$= \int_U \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial u_i} \right) du_1 \cdots du_n = \sum_{i=1}^n \int_{u_1=a_1}^{u_1=b_1} \cdots \int_{u_n=a_n}^{u_n=b_n} \frac{\partial f_i}{\partial u_i} \cdot du_1 \cdots du_n;$$

si vemos que cada uno de los sumandos de la última suma es cero terminamos:

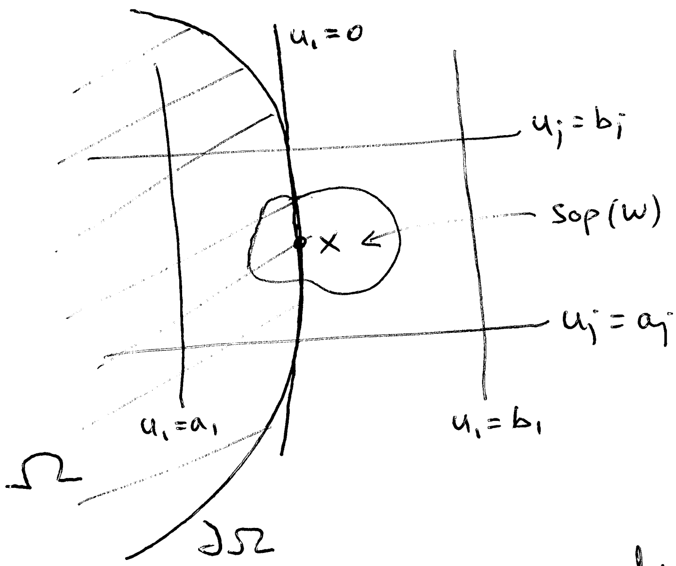
$$\int_{u_1=a_1}^{u_1=b_1} \cdots \int_{u_n=a_n}^{u_n=b_n} \frac{\partial f_i}{\partial u_i} du_1 \cdots du_n \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{u_1=a_1}^{u_1=b_1} \cdots \overset{i}{\vee} \cdots \int_{u_n=a_n}^{u_n=b_n} \left(\int_{u_i=a_i}^{u_i=b_i} \frac{\partial f_i}{\partial u_i} du_i \right) du_1 \overset{i}{\overset{\vee}{\cdots}} du_n,$$

donde

$$\int_{u_i=a_i}^{u_i=b_i} \frac{\partial f_i}{\partial u_i} du_i = f_i(u_1, \dots, b_i, \dots, u_n) - f_i(u_1, \dots, a_i, \dots, u_n) = 0,$$

ya que ω se anula en los "hiperplanos" $u_i = a_i$ y $u_i = b_i$ y por lo tanto las funciones $f_1, \dots, f_n$ se anulan en los mismos hiperplanos.

3er caso: $x \in \partial\Omega$; tomemos un entorno abierto coordenado $(U; u_1, \dots, u_n)$ de x en X tal que $\Omega \cap U = \{x' \in U : u_1(x') \leq 0\}$; tomando U suficientemente pequeño podemos suponer que es un "cubo" (como en el 2° caso) y que $du_1 \wedge \dots \wedge du_n$ define la orientación en U.



Sea ω una $(n-1)$-forma sobre X cuyo soporte está contenido en U, y sean $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tales que sobre U tenemos

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} f_i \cdot du_1 \wedge \dots \wedge \widehat{du_i} \wedge \dots \wedge du_n,$$

$$d\omega = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial u_i} \right) \cdot du_1 \wedge \dots \wedge du_n .$$

Como $u_1 = 0$ sobre $\partial\Omega \cap U$, es también $du_1 = 0$ sobre $\partial\Omega \cap U$ si pensamos u_1 como función sobre $\partial\Omega \cap U$; por lo tanto la restricción de la $(n-1)$-forma $du_1 \wedge \dots \wedge \widehat{du_i} \wedge \dots \wedge du_n$ a $\partial\Omega \cap U$ se anula cuando $i \neq 1$. Tenemos entonces

$$\omega|_{\partial\Omega \cap U} = f_1(0, u_2, \dots, u_n) \cdot du_2 \wedge \dots \wedge du_n,$$

donde en la anterior igualdad estamos considerando $u_2, \dots, u_n$ como coordenadas sobre el abierto $\partial\Omega \cap U$ de $\partial\Omega$.

Por una parte, como $du_2 \wedge \dots \wedge du_n$ define la orientación en el borde, tenemos

$$\int_{\partial\Omega} \omega := \int_{\partial\Omega} \omega_{/\partial\Omega} = \int_{(\partial\Omega)\cap U} \omega_{/\partial\Omega} = \int_{(\partial\Omega)\cap U} f_1(0,u_2,\dots,u_n)\cdot du_2\wedge\dots\wedge du_n$$

$$= \int_{u_2=a_2}^{u_2=b_2} \cdots \int_{u_n=a_n}^{u_n=b_n} f_1(0,u_2,\dots,u_n)\, du_2 \cdots du_n .$$

Por otra parte

$$\int_\Omega d\omega = \int_X I_\Omega\, d\omega = \int_U I_\Omega\, d\omega = \int_U I_\Omega \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial u_i} \right) du_1 \wedge \dots \wedge du_n$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_U I_\Omega \cdot \frac{\partial f_i}{\partial u_i} du_1 \cdots du_n = \sum_{i=1}^n \int_{u_1=a_1}^{u_1=b_1} \cdots \int_{u_n=a_n}^{u_n=b_n} I_\Omega \frac{\partial f_i}{\partial u_i} du_1 \cdots du_n$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{u_1=a_1}^{u_1=0} \int_{u_2=a_2}^{u_2=b_2} \cdots \int_{u_n=a_n}^{u_n=b_n} \frac{\partial f_i}{\partial u_i} du_1 \cdots du_n = (\bullet) ;$$

$\boxed{I_\Omega = 0 \text{ sobre } 0 < u_1 \leq b_1 \text{ ya que } \Omega = \{u_1 \leq 0\}}$

igual que en el 2º caso, todos los sumandos de $(\bullet)$ distintos del correspondiente a $i=1$ se anulan, así que

$$(\bullet) = \int_{u_2=a_2}^{u_2=b_2} \cdots \int_{u_n=a_n}^{u_n=b_n} \left(\int_{u_1=a_1}^{u_1=0} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} du_1 \right) du_2 \cdots du_n$$

$$= \int_{u_2=a_2}^{u_2=b_2} \cdots \int_{u_n=a_n}^{u_n=b_n} [f_1(0,u_2,\dots,u_n) - \underbrace{f_1(a_1,u_2,\dots,u_n)}_{\parallel \atop 0}]\, du_2 \cdots du_n$$

$$= \int_{u_2=a_2}^{u_2=b_2} \cdots \int_{u_n=a_n}^{u_n=b_n} f_1(0,u_2,\dots,u_n)\, du \cdots du_n ,$$

con lo que concluimos la demostración del lema.

— • —

<u>Demostración del teorema</u>: Sea ω una $(n-1)$-forma sobre X tal que $\mathrm{sop}(\omega)\cap\Omega$ es compacto. Consideremos un revestimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ de X formado por abiertos en los que vale el teorema de Stokes (un tal recubrimiento existe en virtud del lema anterior), y una partición de la unidad $\{f_i\}_{i\in I}$ subordinada a ese revestimiento.

Argumentando como en el caso II de la definición de la integral de formas ($\mathrm{sop}(\omega)\cap\Omega$ es compacto), obtenemos que existe un abierto V que contiene a $\mathrm{sop}(\omega)\cap\Omega$ y que corta solamente a un número finito de cerrados de la familia $\{\mathrm{sop}(f_i)\}$: existe $J\subseteq I$, J finito, tal que si $i\in I$ e $i\notin J$ entonces $V\cap\mathrm{sop}(f_i)=\phi$. Escribamos $J=\{1,\dots,r\}$ y definamos la $(n-1)$-forma

$$\omega'=f_1\cdot\omega+\dots+f_r\cdot\omega=(f_1+\dots+f_r)\cdot\omega\,;$$

es claro que $\mathrm{sop}(\omega')\subseteq\mathrm{sop}(\omega)$ y por tanto ω' también está en las hipótesis del teorema de Stokes. Veamos que ω' sí cumple dicho teorema:

$$\int_\Omega d\omega'=\int_X I_\Omega\cdot d\omega'=\int_X I_\Omega\cdot d\Big(\sum_{i=1}^r f_i\cdot\omega\Big)=\int_X I_\Omega\Big(\sum_{i=1}^r d(f_i\omega)\Big)$$

$$=\sum_{i=1}^r\int_X I_\Omega\cdot d(f_i\omega)=\sum_{i=1}^r\int_\Omega d(f_i\omega)$$

$$=\sum_{i=1}^r\int_{\partial\Omega}f_i\omega=\int_{\partial\Omega}\Big(\sum_{i=1}^r f_i\omega\Big)=\int_{\partial\Omega}\omega'$$

$\mathrm{sop}(f_i\omega)\subseteq\mathrm{sop}(f_i)\subseteq U_i$, sobre U_i es válido el th. de Stokes

Terminamos la demostración si probamos las igualdades

$$\int_\Omega d\omega'=\int_\Omega d\omega\quad,\quad\int_{\partial\Omega}\omega'=\int_{\partial\Omega}\omega.$$

Salvo $f_1,\dots,f_r$ todas las funciones de la partición de la unidad $\{f_i\}_{i\in I}$ se anulan sobre el abierto V, por lo que sobre V tenemos la igualdad

$$\omega = 1\cdot\omega = \Big(\sum_{i\in I} f_i\Big)\cdot\omega = \sum_{i\in I} f_i\omega = f_1\omega + \dots + f_r\omega = \omega',$$

y por lo tanto también será

$$d\omega = d\omega' \quad \text{sobre } V.$$

Por una parte, dado $x\in\partial\Omega$ tenemos: si $x\in V$ entonces $\omega_x = \omega'_x$; si $x\notin V$ entonces $x\notin \mathrm{Sop}(\omega)\supseteq \mathrm{Sop}(\omega')$ (porque $x\in\Omega$) y por lo tanto $\omega_x = 0 = \omega'_x$. Así, $\omega=\omega'$ sobre $\partial\Omega$ y obtenemos $\int_{\partial\Omega}\omega = \int_{\partial\Omega}\omega'$.

Por otra parte, dado $x\in\Omega$ tenemos: si $x\in V$ entonces $(d\omega)_x = (d\omega')_x$; si $x\notin V$ entonces $x\notin \mathrm{sop}(\omega)\supseteq \mathrm{Sop}(\omega')$, lo que significa que ω y ω' se anulan en un entorno abierto de x, en cuyo caso sus diferenciales también se anulan en dicho entorno y por tanto $(d\omega)_x = 0 = (d\omega')_x$. Como $d\omega = d\omega'$ sobre Ω obtenemos

$$\int_\Omega d\omega = \int_X I_\Omega\cdot d\omega = \int_X I_\Omega\cdot d\omega' = \int_\Omega d\omega'.$$

—— • ——

Forma de volumen

Sea (X,g) una <u>variedad riemanniana orientada</u>, esto es, una variedad orientada X dotada de una métrica riemanniana g ($g=\{g_x\}_{x\in X}$, donde para cada $x\in X$, g_x es una métrica euclídea en T_xX). Como es habitual, el producto según la métrica g de dos campos tangentes D y D' sobre un abierto U de X lo denotaremos con un punto "$\cdot$":

$$g(D,D') = D\cdot D' \in \mathcal{C}^\infty(U).$$

Lema: En toda variedad riemanniana existen localmente bases ortonormales positivamente orientadas de campos tangentes: todo punto de X tiene un entorno abierto U sobre el que existe una base de campos $\{D_1, \ldots, D_n\}$ que es ortonormal ($D_i \cdot D_i = 1$, $D_i \cdot D_j = 0$ si $i \neq j$) y positiva.

Demostración:

Fijado un punto $x \in X$, sea $(U; u_1, \ldots, u_n)$ un entorno abierto coordenado de x. Si la base $\{\partial u_1, \ldots, \partial u_n\}$ no es ortonormal, entonces se ortonormaliza por el método habitual (el de Gram-Schmidt del álgebra lineal) y se obtiene una base ortonormal $\{D_1, \ldots, D_n\}$ de campos tangentes sobre U. Si pasamos a un abierto U más pequeño para que sea conexo, entonces necesariamente una de las bases ortonormales $\{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ ó $\{-D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ es positiva (y la otra es negativa).

Lema: Sea U un abierto coordenado conexo de la variedad riemanniana orientada (X, g), y sea $n = \dim X$. Existe una única n-forma ω_U sobre U con la siguiente propiedad: para toda base ortonormal positiva $\{D_1, \ldots, D_n\}$ de campos tangentes sobre U se cumple

$$\omega_U(D_1, \ldots, D_n) = 1.$$

Demostración:

Fijemos una base $\{\bar{D}_1, \ldots, \bar{D}_n\}$ ortonormal positiva sobre U (según la demostración del anterior lema, esa base existe).

La unicidad es clara porque toda n-forma sobre U está determinada por el valor que toma en una base: si ω y ω'

son n-formas sobre U tales que $\omega(\bar{D}_1, \dots, \bar{D}_n) = \omega'(\bar{D}_1, \dots, \bar{D}_n)$, entonces $\omega = \omega'$.

Veamos la existencia: Definimos ω_U a partir de la base ortonormal positiva $\{\bar{D}_1, \dots, \bar{D}_n\}$ fijada, de la siguiente manera: dados $D_1, \dots, D_n \in \mathcal{D}(U)$, si (a_{ij}) es la matriz de coordenadas de la familia de campos $D_1, \dots, D_n$ en la base $\{\bar{D}_1, \dots, \bar{D}_n\}$,

$$D_j = a_{1j}\bar{D}_1 + \dots + a_{nj}\bar{D}_n, \qquad j = 1, \dots, n$$

$$\{a_{ij}\} \subseteq \mathcal{C}^\infty(U),$$

entonces definimos

$$\omega_U(D_1, \dots, D_n) := \det(a_{ij}) \in \mathcal{C}^\infty(U).$$

De las propiedades de los determinantes se sigue inmediatamente que ω_U es un tensor hemisimétrico de orden n (n-forma) sobre U; además $\omega_U(\bar{D}_1, \dots, \bar{D}_n) = 1$ y por lo tanto ω_U define la orientación sobre U.

Para terminar, supongamos que $\{D_1, \dots, D_n\}$ es una base ortonormal positiva y veamos que $\omega_U(D_1, \dots, D_n) = 1$: cuando $\{D_1, \dots, D_n\}$ es base, la matriz (a_{ij}) de sus coordenadas en la base fijada es la matriz de cambio de $\{D_1, \dots, D_n\}$ a $\{\bar{D}_1, \dots, \bar{D}_n\}$; aplicando la fórmula que nos dice cómo cambia la matriz de una métrica al cambiar la base tenemos

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \text{matriz de} \\ g \text{ en la base} \\ \{D_1, \dots, D_n\} \end{pmatrix}}_{\substack{\| \text{ ya que } \{D_1,\dots,D_n\} \\ \text{es ortonormal} \\ \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \text{matriz de cambio} \\ \text{de } \{D_1, \dots, D_n\} \\ \text{a } \{\bar{D}_1, \dots, \bar{D}_n\} \end{pmatrix}^t}_{\substack{\| \\ (a_{ij})^t}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \text{matriz de} \\ g \text{ en la base} \\ \{\bar{D}_1, \dots, \bar{D}_n\} \end{pmatrix}}_{\substack{\| \text{ ya que } \{\bar{D}_1,\dots,\bar{D}_n\} \\ \text{es orto.} \\ \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \text{matriz de} \\ \text{cambio de} \\ \{D_i\} \text{ a } \{\bar{D}_i\} \end{pmatrix}}_{\substack{\| \\ (a_{ij})}};$$

por lo tanto $(\det(a_{ij}))^2 = 1 \Rightarrow \omega_U(D_1, \dots, D_n) = \pm 1$, y como $\omega_U(D_1, \dots, D_n) > 0$ porque $\{D_1, \dots, D_n\}$ es positiva, concluimos que debe ser $\omega_U(D_1, \dots, D_n) = 1$.

Teorema: Sobre una variedad riemanniana orientada (X, g) de dimensión n existe una única n-forma ω_X que "toma valor igual a 1 sobre las bases ortonormales positivas de campos tangentes". (El entrecomillado del enunciado hay que entenderlo como sigue: si $\{D_1, \ldots, D_n\}$ es una base ortonormal positiva sobre algún abierto U de X, entonces ω_X (su restricción a U) toma valor 1 sobre $\{D_1, \ldots, D_n\}$, $\omega_X(D_1, \ldots, D_n) = 1$.)

Se dice que ω_X es la forma de volumen de la variedad riemanniana orientada (X, g). Es claro que la n-forma ω_X define la orientación de X.

Demostración:

Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de X formado por abiertos conexos coordenados. Para cada $i \in I$, sobre U_i tenemos la única n-forma ω_i que sobre las bases ortonormales positivas de U_i vale 1. Por las unicidades locales, en cada intersección $U_i \cap U_j$ coinciden ω_i y ω_j. Por lo tanto la familia de n-formas locales $\{\omega_i\}_{i\in I}$ definen una única n-forma ω_X sobre X. Por construcción, es claro que esta n-forma ω_X cumple la propiedad del enunciado.

• Expresión en coordenadas de la forma de volumen: Con la notación de los resultados anteriores, sea $(U; u_1, \ldots, u_n)$ un abierto coordenado de X tal que $du_1 \wedge \cdots \wedge du_n$ define la orientación sobre U, y supongamos que conocemos la expresión de la métrica g sobre U en esas coordenadas:

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \cdot du_i \otimes du_j \quad , \quad \text{ó matricialmente } g = (g_{ij}) ,$$

siendo $g_{ij} = \partial u_i \cdot \partial u_j \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Calculemos la función $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tal que $\omega_X = f \cdot du_1 \wedge \dots \wedge du_n$ sobre U: $f = \omega_X(\partial u_1, \dots, \partial u_n)$, con $f > 0$ porque $du_1 \wedge \dots \wedge du_n$ define la orientación. Si $\{\bar{D}_1, \dots, \bar{D}_n\}$ es una base ortonormal positiva sobre U (existe una tal base localmente), y si (a_{ij}) es la matriz de las funciones coordenadas de los campos $\{\partial u_1, \dots, \partial u_n\}$ en la base $\{\bar{D}_1, \dots, \bar{D}_n\}$, entonces sabemos que $\omega_X(\partial u_1, \dots, \partial u_n) = \det(a_{ij})$. Además, argumentando como en la demostración del último lema tenemos

$$(g_{ij}) = (a_{ij})^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \cdot (a_{ij}) = (a_{ij})^t \cdot (a_{ij}),$$

y por lo tanto $\det(g_{ij}) = [\det(a_{ij})]^2$, es decir, $f = \det(a_{ij}) = (\det(g_{ij}))^{1/2}$. Concluimos entonces que la expresión de ω_X sobre el abierto coordenado es

$$\boxed{\omega_X = |g_{ij}|^{1/2} \cdot du_1 \wedge \dots \wedge du_n}$$

—— • ——

<u>Definiciones</u>: Sean X una variedad riemanniana orientada y ω_X su forma de volumen, y consideremos una variedad con borde Ω en X.

Si Ω es compacta, entonces se define el <u>volumen</u> de Ω como la integral

$$\int_\Omega \omega_X .$$

Como es habitual, en dimensión $n = 1$ ó 2 emplearemos los términos "longitud" ó "área" en vez de volumen.

Se define la integral de una función $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ sobre Ω como la integral

$$\int_\Omega f := \int_\Omega f \cdot \omega_X ,$$

cuando la segunda integral exista (lo cual es seguro si $\operatorname{sop}(f)$ es compacto, ó si Ω es compacta).

Ejercicio: Con la notación de las definiciones anteriores, y supuesto que no estamos en el caso trivial $\Omega = \phi$ (lo que equivale para la variedad con borde a que $\mathring{\Omega} = \phi$), compruébese que si Ω es compacta entonces

$$\text{volumen de } \Omega = \int_\Omega \omega_X > 0 .$$

Ejemplos: (a) En $\mathbb{R}^n$ con su métrica estándor $g = \sum_{i=1}^n dx_i \otimes dx_i$ y su orientación estándor (definida por la n-forma $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$), tenemos: la matriz de g en la base $\{\partial x_1, \dots, \partial x_n\}$ es $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$, luego $|g_{ij}|^{1/2} = 1$ y por lo tanto

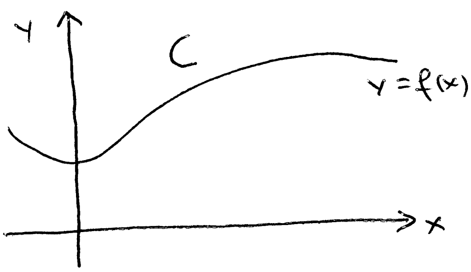
$$\boxed{\omega_{\mathbb{R}^n} = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n} .$$

← Forma de volumen estándor de $\mathbb{R}^n$.

Recordemos que para una variedad con borde compacta Ω en $\mathbb{R}^n$ se cumple

$$\text{volumen de } \Omega = \int_\Omega dx_1 \cdots dx_n = \int_\Omega \omega_X .$$

(b) Consideremos una curva plana C de la forma $y = f(x)$ con $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable; C es una variedad diferenciable de dimensión 1 (subvariedad de $\mathbb{R}^2$), y la función x es coordenada sobre C.



Consideremos sobre C la orientación que define la 1-forma dx (esto es, recorremos C cuando x crece). Sobre C tenemos la métrica riemanniana $\bar{g}$ inducida por la métrica estándor $g = dx \otimes dx + dy \otimes dy$ de $\mathbb{R}^2$. Para calcular $\bar{g}$ observemos que es la imagen inversa de g por la inclusión:

$$\begin{array}{ccc} C & \overset{i}{\hookrightarrow} & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x, f(x)) \end{array} \qquad \left(\begin{array}{l} \text{es decir, } i = (i_1, i_2) \text{ con} \\ i_1 = i^* x = x , \quad i_2 = i^* y = f(x) \end{array} \right)$$

$$\bar g = i^* g = i^*(dx\otimes dx + dy\otimes dy) = d(i^*x)\otimes d(i^*x) + d(i^*y)\otimes d(i^*y)$$

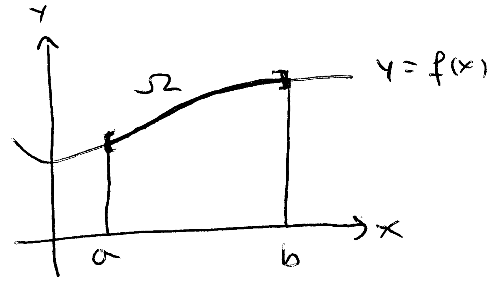
$$= dx\otimes dx + df\otimes df \overset{df=f'(x)dx}{=\!=\!=} dx\otimes dx + (f')^2\cdot dx\otimes dx,$$

es decir,

$$\bar g = (1+(f')^2)\cdot dx\otimes dx;$$

como en este caso tenemos $|g_{ij}|^{1/2} = \sqrt{1+(f')^2}$, concluimos que la "forma de longitud" de C es

$$\omega_C = \sqrt{1+(f')^2}\cdot dx.$$



Para un arco de curva

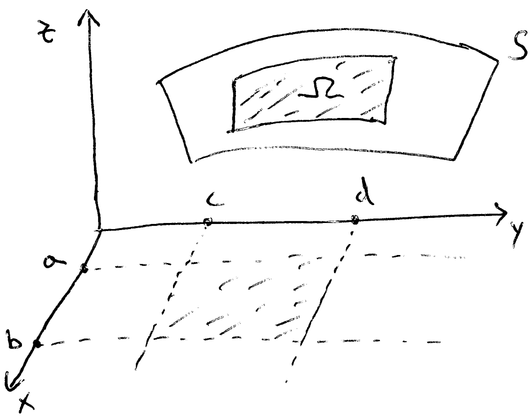
$$\Omega = \{(x, f(x)) : a \le x \le b\}$$

tenemos

$$\text{longitud de } \Omega = \int_\Omega \omega_C = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx,$$

que es la fórmula clásica.

(c) Consideremos una superficie S en $\mathbb{R}^3$ de la forma $z = f(x,y)$ (x, y son coordenadas sobre S, y consideramos la orientación que define $dx\wedge dy$):



$$g = dx\otimes dx + dy\otimes dy + dz\otimes dz,$$

$$\bar g = dx\otimes dx + dy\otimes dy + df\otimes df$$

$$= dx\otimes dx + dy\otimes dy + (f_x dx + f_y dy)\otimes(f_x dx + f_y dy)$$

$$= (1+f_x^2)\, dx\otimes dx + f_x f_y\, dx\otimes dy + f_x f_y\cdot dy\otimes dx + (1+f_y^2)\cdot dy\otimes dy;$$

por tanto

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1+f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1+f_y^2 \end{pmatrix}, \quad |g_{ij}| = 1 + f_x^2 + f_y^2,$$

$$\text{"forma de área" de } S = \omega_S = (1+f_x^2+f_y^2)^{1/2}\cdot dx\wedge dy,$$

$$\text{área de } \Omega = \int_\Omega \omega_S = \int_{x=a}^{x=b}\int_{y=c}^{y=d} (1+f_x^2+f_y^2)^{1/2}\, dx\, dy,$$ que también es la fórmula clásica.

Definición: Sean X e Y variedades riemannianas orientadas, y sean ω_X y ω_Y sus respectivas formas de volumen.

Diremos que un difeomorfismo $f: X \longrightarrow Y$ conserva volúmenes si para toda variedad con borde compacta Ω en X se cumple

$$\text{volumen de } \Omega = \int_{\Omega} \omega_X = \int_{f(\Omega)} \omega_Y = \text{volumen de } f(\Omega);$$

ó equivalentemente, si para toda variedad con borde compacta $\bar{\Omega}$ en Y se cumple

$$\text{volumen de } \bar{\Omega} = \int_{\bar{\Omega}} \omega_Y = \int_{f^{-1}(\bar{\Omega})} \omega_X = \text{volumen de } f^{-1}(\bar{\Omega}).$$

Lema: Con la notación de la definición anterior, si el difeomorfismo f conserva la orientación, entonces

$$f \text{ conserva volúmenes} \iff f^*\omega_Y = \omega_X.$$

Demostración:

$\Leftarrow$) Esta propiedad se sigue inmediatamente de las "propiedades de la integral de formas" (véase la hoja 9): si f conserva la orientación, entonces para toda variedad con borde compacta Ω en X se cumple

$$\int_{\Omega} f^*\omega_Y = \int_{f(\Omega)} \omega_Y.$$

$\Rightarrow$) Del Análisis Matemático es conocido que en $\mathbb{R}^n$ con su estructura estándar, si para una función $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ se cumple $\int_{\Lambda} g = 0$ para toda variedad con borde compacta Λ de $\mathbb{R}^n$, entonces debe ser $g=0$. Como consecuencia, si ω_n es una n-forma sobre Y ($n=\dim Y$) tal que $\int_\Omega \omega_n = 0$ para toda variedad con borde compacta Ω de Y, entonces $\omega_n = 0$.

Supongamos ahora que f conserva volúmenes. Dada una variedad con borde compacta Ω sobre Y tenemos:

$$\int_\Omega \omega_Y = \text{volumen de } \Omega = \text{volumen de } f(\Omega) =$$

$$= \int_{f(\Omega)} \omega_X \overset{f \text{ conserva la orientación}}{=\!=} \int_\Omega f^* \omega_X ,$$

es decir $\int_\Omega \omega_Y = \int_\Omega f^*\omega_X \Rightarrow \int_\Omega (f^*\omega_X - \omega_Y) = 0$,

y como Ω es arbitraria debe ser $f^*\omega_X - \omega_Y = 0$.

Teorema de la divergencia

Fijemos una variedad riemanniana orientada X de dimensión n, y sea ω_X su forma de volumen.

Definición: Dado un campo tangente D sobre X, se define la divergencia de D como la coordenada de la n-forma $D^L\omega_X$ respecto de la base $\{\omega_X\}$ de n-formas sobre X; es decir, la divergencia de D es la única función $\operatorname{div} D \in \mathcal{C}^\infty(X)$ que cumple

$$D^L\omega_X = (\operatorname{div} D)\cdot \omega_X .$$

Ejemplo: Sea $X = \mathbb{R}^n$ con su orientación y su métrica estándar, de modo que $\omega_{\mathbb{R}^n} = dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$. Si la expresion de un campo tangente D sobre $\mathbb{R}^n$ en coordenadas cartesianas es $D=(f_1,\dots,f_n) = \sum_{i=1}^n f_i\cdot \partial x_i$, $f_1,\dots,f_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\boxed{\operatorname{div} D = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}} .$$

En efecto,

$$D^L(dx_1\wedge\dots\wedge dx_n) = \sum_{i=1}^n dx_1\wedge\dots\wedge(D^L(dx_i))\wedge\dots\wedge dx_n$$

$$= \sum_{i=1}^n dx_1\wedge\dots\wedge(d(D^L x_i))\wedge\dots\wedge dx_n = \sum_{i=1} dx_1\wedge\dots\wedge \overset{i}{df_i}\wedge\dots\wedge dx_n$$

$$= \sum_{i=1}^n dx_1\wedge\dots\wedge\overbrace{\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}dx_j\right)}^{i}\wedge\dots\wedge dx_n$$

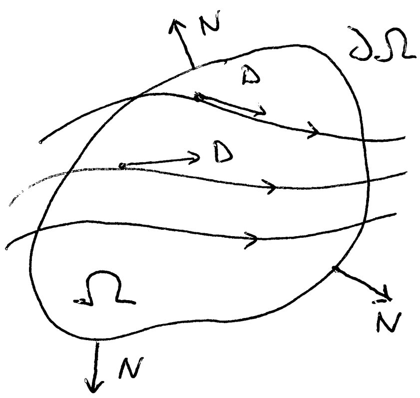
$$= \sum_{i=1}^n dx_1\wedge\dots\wedge\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}dx_i\right)\wedge\dots\wedge dx_n$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\cdot dx_1\wedge\dots\wedge dx_n = \left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)\cdot dx_1\wedge\dots\wedge dx_n.$$

- Fijemos ahora una variedad con borde compacta Ω en X, y sea N el campo unitario normal al borde $\partial\Omega$ que apunta hacia fuera: para cada $x\in\partial\Omega$, N_x es el vector de módulo 1 del espacio vectorial T_xX que es ortogonal al subespacio $T_x(\partial\Omega)$ y que apunta hacia fuera de Ω (este vector N_x está bien determinado porque $\dim(T_x(\partial\Omega))^\perp = 1$).

Con la métrica riemanniana inducida por la de X, y con la orientación que Ω induce en su borde, tenemos que $\partial\Omega$ es una variedad riemanniana orientada de dimensión $n-1$; en particular tenemos su forma de volumen $\omega_{\partial\Omega}$.

<u>Definición</u>: Dado un campo tangente D sobre X, se llama <u>flujo de D a través de $\partial\Omega$</u> a la integral



$$\int_{\partial\Omega} D\cdot N \quad \left(:= \int_{\partial\Omega}(D\cdot N)\cdot\omega_{\partial\Omega}\right).$$

Si tenemos un "fluido" cuyas partículas describen las trayectorias (curvas integrales) del campo D, entonces la anterior integral representa la cantidad de fluido que atraviesa

Teorema (de la divergencia): El flujo de un campo D a través del borde de Ω es igual a la integral de la divergencia de D sobre Ω:

$$\int_{\partial\Omega} D\cdot N = \int_{\Omega} \operatorname{div} D .$$

Demost.: Recordemos que $\int_{\Omega} \operatorname{div} D := \int_{\Omega} (\operatorname{div} D)\cdot \omega_X$. Tenemos

$$(\operatorname{div} D)\cdot \omega_X = D^L \omega_X = (d\circ i_D + i_D \circ d)(\omega_X) = d(i_D \omega_X) + i_D(d\omega_X),$$

y como $d\omega_X = 0$ porque $\Omega^{n+1}(X) = 0$ (al ser $\dim X = n$), debe ser

$$(\operatorname{div} D)\cdot \omega_X = d(i_D \omega_X) .$$

Aplicando el teorema de Stokes a la $(n-1)$-forma $i_D\omega_X$ obtenemos

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} D)\cdot \omega_X = \int_{\Omega} d(i_D\omega_X) = \int_{\partial\Omega} i_D\omega_X ;$$

concluimos la demostración si probamos la igualdad

$$(i_D\omega_X)_{|\partial\Omega} = (D\cdot N)\cdot \omega_{\partial\Omega} ,$$

lo que bastará hacer localmente.

Sea $(U; u_1,\dots,u_n)$ un entorno abierto coordenado de X tal que $\Omega\cap U = \{x\in U : u_1(x)\le 0\}$ y $du_1\wedge du_2\wedge\dots\wedge du_n$ define la orientación sobre U. Consideremos una base $\{D_2,\dots,D_n\}$ ortonormal positiva de campos tangentes sobre $\partial\Omega\cap U$ (localmente existe); recordemos que $u_2,\dots,u_n$ son coordenadas sobre $\partial\Omega\cap U \equiv u_1=0$ tales que $du_2\wedge\dots\wedge du_n$ define la orientación del borde, así que si (a_{ij}) es la matriz de cambio de $\{D_2,\dots,D_n\}$ a la base $\{\partial u_2,\dots,\partial u_n\}$, entonces $\det(a_{ij})>0$. Por otra parte, como N apunta hacia fuera de Ω, existen funciones diferenciables $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathcal{C}^\infty(\partial\Omega \cap \mathcal{U})$ tales que

$$N = f_1 \cdot \partial u_1 + f_2 \cdot \partial u_2 + \dots + f_n \cdot \partial u_n \,, \qquad f_1 > 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega \cap \mathcal{U}.$$

Veamos que sobre $\partial\Omega \cap \mathcal{U}$, la base ortonormal $\{N, D_2, \dots, D_n\}$ de campos tangentes a X está orientada positivamente; en efecto, como $du_1 \wedge \dots \wedge du_n$ define la orientación sobre $\mathcal{U}$, bastará ver que el determinante de la matriz de cambio de $\{N, D_2, \dots, D_n\}$ a $\{\partial u_1, \partial u_2, \dots, \partial u_n\}$ es positivo: la mencionada matriz de cambio es

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} N & D_2 & \cdots & D_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ f_2 & & & \\ \vdots & & (a_{ij}) & \\ f_n & & & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \partial u_1 \\ \partial u_2 \\ \vdots \\ \partial u_n \end{array} \end{array} ,$$

y su determinante es $f_1 \cdot \det(a_{ij}) > 0$.

Probemos ya que las $(n-1)$-formas $i_D \omega_X$ y $(D \cdot N) \cdot \omega_{\partial\Omega}$ son iguales sobre el abierto $\partial\Omega \cap \mathcal{U}$ de $\partial\Omega$, para lo cual es suficiente ver que coinciden sobre la base $\{D_2, \dots, D_n\}$:

- $(i_D \omega_X)(D_2, \dots, D_n) = \omega_X(D, D_2, \dots, D_n)$
$$= \left(\begin{array}{c} \text{determinante de la matriz de} \\ \text{cambio de } \{D, D_2, \dots, D_n\} \text{ a } \{N, D_2, \dots, D_n\} \end{array} \right) = D \cdot N,$$

ya que

$$\begin{array}{c} \text{matriz de cambio de} \\ \{D, D_2, \dots, D_n\} \text{ a } \{N, D_2, \dots, D_n\} \end{array} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} D & D_2 & \cdots & D_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} D \cdot N & 0 & \cdots & 0 \\ D \cdot D_2 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ D \cdot D_n & 0 & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} N \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{array} \end{array} ;$$

- $(D \cdot N) \cdot \omega_{\partial\Omega}(D_2, \dots, D_n) = (D \cdot N) \cdot 1 = D \cdot N.$

(13) $\boxed{7.1}$ Sea X una variedad diferenciable de dimensión n y sea ω_0 una n-forma sobre X que no se anula en ningun punto. Si para cada n-forma de soporte compacto ω sobre X denotamos

$$\int_X \omega = \text{integral de } \omega \text{ según la orientación definida por } \omega_0,$$

$$\overline{\int_X} \omega = \text{" " } \omega \text{ " " " " } -\omega_0,$$

pruébese la igualdad
$$\overline{\int_X}\omega = -\int_X \omega .$$

S: Bastará probarlo para n-formas ω cuyo soporte está contenido en un abierto coordenado U con un número finito de componentes conexas, en cuyo caso podemos elegir coordenadas $u_1,\dots,u_n$ sobre U de modo que

$du_1\wedge\dots\wedge du_n$ define la orientación determinada por ω_0,
$-du_1\wedge\dots\wedge du_n$ " " " " " $-\omega_0$.

Existe una unica $f\in\mathcal{C}^\infty(U)$ tal que $\omega = f(u_1,\dots,u_n)\cdot du_1\wedge\dots\wedge du_n$, y tenemos
$$\int_X \omega = \int_U f(u_1,\dots,u_n)\cdot du_1\wedge\dots\wedge du_n ,$$
donde la anterior integral se calcula así:
$$U \xrightarrow[\sim]{(u_1,\dots,u_n)} V\ (\subseteq \mathbb{R}^n) \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad (x_1,\dots,x_n)\longmapsto f(x_1,\dots,x_n), \quad f(u_1,\dots,u_n) = f\circ(u_1,\dots,u_n)$$
$$\int_U f(u_1,\dots,u_n)\cdot du_1\wedge\dots\wedge du_n := \int_V f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n .$$

Si consideramos sobre U las funciones coordenadas $v_1=-u_1, v_2=u_2,\dots,v_n=u_n$, como $dv_1\wedge\dots\wedge dv_n = d(-u_1)\wedge du_2\wedge\dots\wedge du_n = -du_1\wedge\dots\wedge du_n$, será
$$\overline{\int_X}\omega = \int_U g(v_1,\dots,v_n)\,dv_1\wedge\dots\wedge dv_n$$
para la única $g\in\mathcal{C}^\infty(U)$ tal que $\omega = g(v_1,\dots,v_n)\cdot dv_1\wedge\dots\wedge dv_n$.
Es fácil ver que para la función $g(x_1,\dots,x_n) = -f(-x_1,x_2,\dots,x_n)$ se cumple
$$\omega = f(u_1,\dots,u_n)\cdot du_1\wedge\dots\wedge du_n = f(-v_1,v_2,\dots,v_n)\cdot d(-v_1)\wedge dv_2\wedge\dots\wedge dv_n$$
$$= -f(-v_1,v_2,\dots,v_n)\cdot dv_1\wedge\dots\wedge dv_n = g(v_1,\dots,v_n)\cdot dv_1\wedge\dots\wedge dv_n ,$$
luego
$$\int_U g(v_1,\dots,v_n)\cdot dv_1\wedge\dots\wedge dv_n = \int_W g(\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n ,$$
donde $V \xrightarrow[\sim]{\varphi} W$, $\varphi(x_1,\dots,x_n) = (-x_1,x_2,\dots,x_n)$.

Resumiendo:
$$\int_X \omega = \int_V f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n ,$$
$$\overline{\int_X}\omega = \int_W -f(-x_1,x_2,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n . \quad (**)$$

Para obtener $(**)$ utilizamos el cambio de variables
$$y_1=-x_1,\quad y_2=x_2,\ \dots,\ y_n=x_n ,$$
cuyo jacobiano es
$$J = \left|\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right| = \begin{vmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = -1 .$$

Aplicando la fórmula del cambio de variables en la integral obtenemos
$$\overline{\int_X}\omega = \int_W -f(-x_1,x_2,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n$$
$$= \int_V -f(-x_1(y_1,\dots,y_n),x_2(y_1,\dots,y_n),\dots,x_n(y_1,\dots,y_n))\cdot|J|\cdot dy_1\dots dy_n$$
$$= -\int_V f(y_1,\dots,y_n)\cdot dy_1\dots dy_n = -\int_X \omega .$$

■

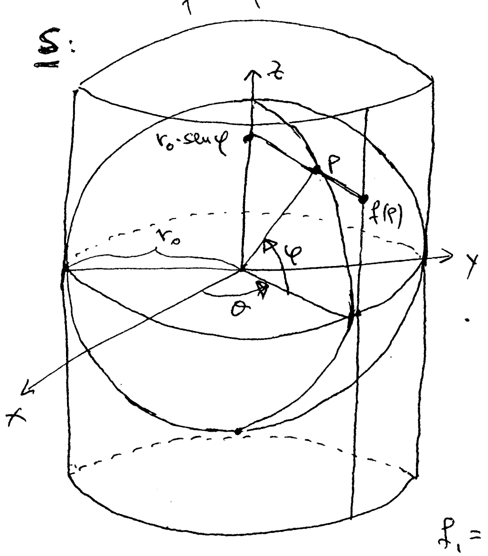
$\boxed{7.20}$ Considérese sobre $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ la 1-forma
$$\omega = \frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$$
Pruébese que ω es cerrada pero no es exacta.

S: Calculemos:
$$d\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx + \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy,$$
$$d\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \cdots = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dy,$$
por tanto
$$d\omega = d\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\wedge dx - d\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\wedge dy$$
$$= \cdots = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\wedge dx + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\wedge dy = 0.$$
Para comprobar que ω no es exacta veamos que su integral sobre la circunferencia de radio 1 no se anula(*):
$$\sigma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$$
$$t \longmapsto (\cos t, \operatorname{sen} t),$$
$$\omega|_\sigma = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t}\,d(\cos t) - \frac{\cos t}{\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t}\,d(\operatorname{sen} t) =$$
$$= -\operatorname{sen}^2 t\,dt - \cos^2 t\,dt = -dt,$$
$$\int_\sigma \omega = \int_0^{2\pi} -dt = -2\pi \neq 0.$$
∎

(*) Aplíquese el problema 12.19.

$\boxed{7.18}$ Considérese la aplicación $f: S \to C$ que a cada punto de la esfera menos los polos le asigna el punto del cilin-dro C que está a la misma longitud y altitud, donde C es el cilindro tangente a S a lo largo del ecuador. Pruébese que f conserva las áreas pero no conserva las distancia

S:



Sea r_0 el radio de la esfera y del cilindro. En coordenadas esféricos (r,θ,φ) la ecuación de S es $r=r_0$, siendo (θ,φ) coordenadas sobre S. En coordenadas cilíndr cas (r,θ,z) la ecuación de C es $r=r_0$, siendo (θ,z) coordenada sobre C. En dichas coordenadas tenemos
$$f: S \longrightarrow C$$
$$(\theta,\varphi) \longmapsto (f_1(\theta,\varphi), f_2(\theta,\varphi)) = (\theta, r_0\cdot\operatorname{sen}\varphi)$$
$$f_1 = \theta\circ f = f^*\theta \quad , \quad f_2 = z\circ f = f^*z .$$
Cambiemos C por su abierto $U = [0,2\pi]\times(-r_0, r_0)$ para que sea difeomorfismo la aplicación $f: S\to U$. La matriz de la primera forma fundamental de S en las coordenadas (θ,φ) es $\begin{pmatrix} r_0^2\cdot\cos^2\varphi & 0 \\ 0 & r_0^2\end{pmatrix}$ de modo que la forma de volumen de S es $\boxed{w_S = r_0^2\cdot\cos\varphi\, d\theta\wedge d\varphi}$ Del mismo modo se obtiene la forma de volumen de U: $\boxed{w_U = r_0\cdot d\theta\wedge dz}$.

- Veamos que $f^*w_U = w_S$ y por tanto f conserva áreas:
$$f^*w_U = f^*(r_0\cdot d\theta\wedge dz) = r_0\cdot f^*(d\theta)\wedge f^*(dz) =$$
$$= r_0\cdot df_1\wedge df_2 = r_0\cdot d\theta\wedge(r_0\cdot\cos\varphi\cdot d\varphi) = r_0^2\cdot\cos\varphi\cdot d\theta\wedge d\varphi = w_S$$

- Es obvio que f no conserva longitudes: f transforma un meridiano de la esfera, que tiene longitud $\pi\cdot r_0$, en un segmento de recta sobre el cilindro de longitud igual a $2r_0$.

∎

7.16 Calcúlese el área de la superficie tórica y el volumen del toro macizo.

S: Sea S el toro cuyo "radio externo" es b y cuyo "radio interno" es a, con $a<b$, y consideremos la siguiente parametrización de S:

$$\left.\begin{aligned} x &= (b+a\cdot \operatorname{sen}\beta)\cdot\cos\alpha \\ y &= (b+a\cdot\operatorname{sen}\beta)\cdot\operatorname{sen}\alpha \\ z &= a\cdot\cos\beta \end{aligned}\right\} ;$$

$\{\alpha,\beta\}$ son coordenadas locales sobre S.

Calculemos la restricción de la métrica estándar de $\mathbb{R}^3$ a S:

$$dx = -(b+a\cdot\operatorname{sen}\beta)\cdot\operatorname{sen}\alpha\, d\alpha + a\cdot\cos\beta\cdot\cos\alpha\, d\beta,$$
$$dy = (b+a\cdot\operatorname{sen}\beta)\cdot\cos\alpha\, d\alpha + a\cdot\cos\beta\cdot\operatorname{sen}\alpha\, d\beta,$$
$$dz = -a\cdot\operatorname{sen}\beta\, d\beta,$$

$$dx\otimes dx = (b+a\cdot\operatorname{sen}\beta)^2\cdot\operatorname{sen}^2\alpha\cdot d\alpha\otimes d\alpha + a^2\cos^2\beta\cdot\cos^2\alpha\cdot d\beta\otimes d\beta - a(b+a\cdot\operatorname{sen}\beta)\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\alpha\,(d\alpha\otimes d\beta + d\beta\otimes d\alpha),$$
$$dy\otimes dy = (b+a\cdot\operatorname{sen}\beta)^2\cdot\cos^2\alpha\, d\alpha\otimes d\alpha + a^2\cos^2\beta\cdot\operatorname{sen}^2\alpha\cdot d\beta\otimes d\beta + a(b+a\cdot\operatorname{sen}\beta)\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\operatorname{sen}\alpha\,(d\alpha\otimes d\beta + d\beta\otimes d\alpha),$$
$$dz\otimes dz = a^2\cdot\operatorname{sen}^2\beta\, d\beta\otimes d\beta,$$

y sumando obtenemos:

$$T_2|_S = (b+a\cdot\operatorname{sen}\beta)^2 d\alpha\otimes d\alpha + a^2 d\beta\otimes d\beta,$$

y por tanto $\boxed{\omega_S = a(b+a\cdot\operatorname{sen}\beta)\, d\alpha\wedge d\beta}$.

$$\text{Área} = \int_{\alpha,\beta\in(0,2\pi)} a(b+a\operatorname{sen}\beta)\,d\alpha\, d\beta = a\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}(b+a\cdot\operatorname{sen}\beta)\,d\beta\right]d\alpha =$$
$$= a\int_0^{2\pi}\left[b\beta - a\cdot\cos\beta\right]_0^{2\pi} d\alpha = \int_0^{2\pi} 2\pi a b\, d\alpha = \underline{\underline{4\pi^2 ab}}.$$

Ahora, para parametrizar el toro macizo introduzcamos una tercera coordenada $r\in(0,a)$ de modo que (r,α,β) son coordenadas locales del toro macizo y se satisfacen:

$$\left.\begin{aligned} x &= (b+r\cdot\operatorname{sen}\beta)\cdot\cos\alpha \\ y &= (b+r\cdot\operatorname{sen}\beta)\cdot\operatorname{sen}\alpha \\ z &= r\cdot\cos\beta \end{aligned}\right\}.$$

Si denotamos por V el toro macizo, haciendo cálculos análogos a los anteriores obtenemos:

$$T_2|_V = dr\otimes dr + (b+r\cdot\operatorname{sen}\beta)^2 d\alpha\otimes d\alpha + r^2 d\beta\otimes d\beta$$

de modo que $\boxed{\omega_V = r\cdot(b+r\cdot\operatorname{sen}\beta)\, dr\wedge d\alpha\wedge d\beta}$.

$$\text{Volumen} = \int_{\substack{r\in(0,a)\\ \alpha,\beta\in(0,2\pi)}} r\cdot(b+r\cdot\operatorname{sen}\beta)\,dr\,d\alpha\,d\beta = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a (rb+r^2\operatorname{sen}\beta)\,dr\right)d\alpha\,d\beta =$$
$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\left(\frac{a^2 b}{2} + \frac{a^3\operatorname{sen}\beta}{3}\right)d\beta\right)d\alpha = \int_0^{2\pi}\pi a^2 b\, d\alpha = \underline{\underline{2\pi^2 a^2 b}}.$$

7.17 Calcúlese el volumen de la bola de radio R de $\mathbb{R}^4$.

S: Introduzcamos las coordenadas esféricas de $\mathbb{R}^4$.

Sea (x,y,z,t) un punto de $\mathbb{R}^4$ de módulo $r>0$, es decir, tal que $x^2+y^2+z^2+t^2=r^2$; entonces $x^2+y^2+z^2=r^2-t^2$ y por tanto existen $\alpha\in[0,2\pi)$ $\varphi\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ tales que

$$\left.\begin{array}{l} x = (r^2-t^2)^{1/2}\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi \\ y = (r^2-t^2)^{1/2}\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\varphi \\ z = (r^2-t^2)^{1/2}\cdot\operatorname{sen}\varphi \end{array}\right\} ;$$

como $t \in (-r, -r)$, $\frac{t}{r} \in [-1, 1]$, de modo que si $t/r = \operatorname{sen}\phi$, entonces $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ y obtenemos: $(r^2-t^2)^{1/2} = r\cdot\sqrt{1-\frac{t^2}{r^2}} = r\cdot\cos\phi$,

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi\cdot\cos\phi \\ y = r\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\varphi\cdot\cos\phi \\ z = r\cdot\operatorname{sen}\varphi\cdot\cos\phi \\ t = r\cdot\operatorname{sen}\phi \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \theta\in[0,2\pi] \\ \varphi\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \\ \phi\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \end{array}.$$

Diremos que $(r, \theta, \varphi, \phi)$ son las coordenadas esféricas de (x, y, z, t). Haciendo los cálculos correspondientes se obtiene que en coordenadas esféricas es

$$T_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2\cdot\cos^2\varphi\cdot\cos^2\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\cdot\cos^2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix},$$

de modo que:

$$\boxed{\omega_{\mathbb{R}_4} = r^3\cdot\cos\varphi\cdot\cos^2\phi\cdot dr\wedge d\theta\wedge d\varphi\wedge d\phi}.$$

El volumen de la bola de radio R es

$$\text{volumen} = \int_{\substack{0<r<R \\ \theta\in(0,2\pi) \\ \varphi,\phi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}} r^3\cdot\cos\varphi\cdot\cos^2\phi\, dr\, d\theta\, d\varphi\, d\phi \underset{\text{haciendo los cálculos}}{=} \frac{\pi^2 R^4}{2}.$$

■

$\boxed{7.19}$ Sea ω una 1-forma sobre una variedad orientada X. Pruébese que si ω es exacta, entonces la integral de ω sobre cualquier curva cerrada de X es nula.

S: Sea $\sigma : [a,b] \longrightarrow X$ una curva (σ es continua y diferenciable en (a,b)); por definición, σ es cerrada si $\sigma(a) = \sigma(b)$.

Sea f una función diferenciable sobre X tal que $\omega = df$; la restricción de f a la curva es $\bar{f} = f\circ\sigma$,

$$\begin{array}{ccccc} [a,b] & \xrightarrow{\sigma} & X & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & & & \bar{f}(t) = f(\sigma(t)) \end{array},$$

de modo que:

$$\omega_{|\sigma} = df_{|\sigma} = d\bar{f} = \bar{f}'dt, \quad \text{y obtenemos:}$$

$$\int_\sigma \omega = \int_\sigma d\bar{f} = \int_a^b \bar{f}'dt = \bar{f}(b) - \bar{f}(a) = f(\sigma(a)) - f(\sigma(b)) = 0.$$

■

Formalmente:

$$\omega_{|\sigma} = \sigma^*\omega = \sigma^*(df) = d(\sigma^* f) = d(f\circ\sigma) = d\bar{f}.$$

$\boxed{7.7}$ Sea X una variedad riemanniana orientada. Dados un campo tangente D sobre X y una función diferenciable $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$, se cumple

$$\operatorname{div}(fD) = f \cdot (\operatorname{div} D) + Df.$$

S: Tenemos

$$(fD)^L \omega_X = (i_{fD} \circ d + d \circ i_{fD})(\omega_X) = i_{fD}(d\omega_X) + d(i_{fD}\omega_X);$$

como $d\omega_X \in \Omega^{n+1}(X) = 0$ $(n = \dim X)$ y $i_{fD}\,\omega_X = \omega_X(fD, -)$ $= f \cdot \omega_X(D, -) = f \cdot i_D \omega_X = f \wedge i_D \omega_X$, llegamos a

$$(fD)^L \omega_X = d(f \wedge i_D \omega_X) = df \wedge i_D \omega_X + f \wedge d(i_D \omega_X).$$

Ahora, por una parte $df \wedge \omega_X \in \Omega^{n+1}(X) = 0$ y por tanto

$$0 = i_D(df \wedge \omega_X) = i_D(df) \cdot \omega_X - df \wedge i_D \omega_X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow df \wedge i_D \omega_X = i_D(df) \cdot \omega_X = df(D) \cdot \omega_X = Df \cdot \omega_X;$$

por otra parte

$$f \wedge d(i_D \omega_X) = f \cdot (d \circ i_D)(\omega_X) = f\,[d \circ i_D(\omega_X) + \overbrace{i_D \circ d(\omega_X)}^{0}]$$

$$= f \cdot D^L \omega_X = f \cdot (\operatorname{div} D) \cdot \omega_X.$$

Sustituyendo obtenemos

$$(fD)^L \omega_X = Df \cdot \omega_X + f \cdot (\operatorname{div} D) \cdot \omega_X = [Df + f \cdot (\operatorname{div} D)]\,\omega_X,$$

es decir,

$$\operatorname{div}(fD) = Df + f \cdot (\operatorname{div} D).$$

$\boxed{7.8}$ Dado un campo tangente D sobre $\mathbb{R}^3$, pruébese que $\operatorname{div} D = 0$ si y sólo si existe $\overline{D} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ tal que $D = \operatorname{rot} \overline{D}$.

S: Sean $g = dx\otimes dx + dy\otimes dy + dz\otimes dz$ la métrica estándar de $\mathbb{R}^3$ y $\omega_3 = dx\wedge dy\wedge dz$ la forma de volumen estándar de $\mathbb{R}^3$. Supongamos en primer lugar que $\operatorname{div} D = 0$; entonces

$$0 = D^L\omega_3 = d(i_D\omega_3) + i_D(\overbrace{d\omega_3}^{=0}) = d(i_D\omega_3),$$

es decir, $i_D\omega_3$ es una 2-forma cerrada. Aplicando el lema de Poincaré tenemos que $i_D\omega_3$ es exacta: existe una 1-forma ω sobre $\mathbb{R}^3$ tal que $i_D\omega_3 = d\omega$. Ahora, teniendo en cuenta que "la polaridad asociada" a la métrica g es un isomorfismo,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) &\longrightarrow \Omega(\mathbb{R}^3) \\ \bar{D} &\longmapsto i_{\bar{D}}\, g = g(\bar{D}, -), \end{aligned}$$

tenemos que existe un campo $\bar{D}$ que por dicho isomorfismo se corresponde con la 1-forma ω: $i_{\bar{D}}\, g = \omega$; por lo tanto $i_D\omega_3 = d\omega = d(i_{\bar{D}}\, g)$, lo que por definición de rotacional significa que $D = \operatorname{rot}\bar{D}$.

Supongamos ahora que existe un campo $\bar{D} = f_1\cdot\partial_x + f_2\cdot\partial_y + f_3\cdot\partial_z$ tal que $D = \operatorname{rot}\bar{D}$, es decir,

$$D = \left(\frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z}\right)\partial_x + \left(\frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x}\right)\partial_y + \left(\frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y}\right)\partial_z\,;$$

entonces

$$\operatorname{div} D = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 g_3}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 g_2}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 g_1}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 g_3}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 g_2}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial z\partial y} = 0.$$

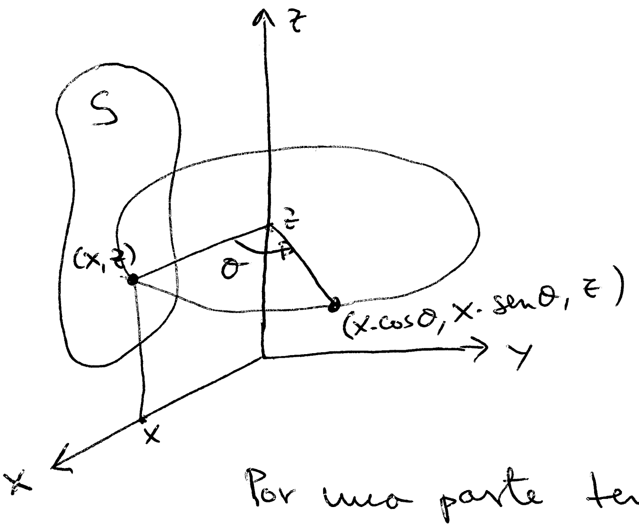
$\blacksquare$

7.21 El volumen de un cuerpo de revolución en $\mathbb{R}^3$ es igual al área de una sección multiplicada por la longitud de la circunferencia que describe el centro de gravedad de la sección.

S: Trasladando el eje de giro podemos suponer que dicho eje es el eje z. Sea entonces V el cuerpo de revolución que se obtiene girando alrededor del eje z una región plana S que se encuentra en el semiplano $y=0$, $x>0$; S será una sección de V.

Como $V \subseteq \mathbb{R}^3 - \{\text{eje } z\}$, podemos considerar las coordenadas cilíndricas (r, θ, z); recordemos que la expresión de la forma de volumen estándar en coordenadas cilíndricas es

$$\omega_3 = r \cdot dr \wedge d\theta \wedge dz.$$



Los puntos de V se obtienen girando los puntos de S alrededor del eje z:

$$V = \{ \underbrace{(x, \theta, z)}_{\substack{\text{coordenadas cilíndricas del punto que tiene}\\ \text{coordenadas cartesianas } (x\cdot\cos\theta,\ x\cdot\operatorname{sen}\theta,\ z)}} : (x,z) \in S,\ \theta \in [0, 2\pi] \}$$

Por una parte tenemos

$$\text{volumen de } V = \int_V \omega_3 = \int_V r\,dr\,d\theta\,dz \underset{\substack{r = x \\ \text{sobre } S}}{=} \int_{\substack{\theta\in[0,2\pi] \\ (x,z)\in S}} x\,dx\,d\theta\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_S x\,dx\,dz \right) d\theta = 2\pi \cdot \int_S x\,dx\,dz.$$

Por otra parte

$$\text{área de } S = \int_S dx\,dz.$$

Por último, el centro de gravedad de S (como subconjunto de $\mathbb{R}^2$) es el punto

$$P = \left(\frac{\int_S x\,dx\,dz}{\int_S dx\,dz} \, , \, \frac{\int_S z\,dx\,dz}{\int_S dx\,dz} \right),$$

y el radio de la circunferencia C que describe P al girar alrededor del eje z es la primera coordenada de P. Por lo tanto

$$\text{longitud de } C = 2\pi \cdot \frac{\int_S x\,dx\,dz}{\int_S dx\,dz} = \frac{\text{volumen de } V}{\text{área de } S}. \quad \blacksquare$$

$\boxed{7.28}$ (Ecuación de continuidad de un fluido):

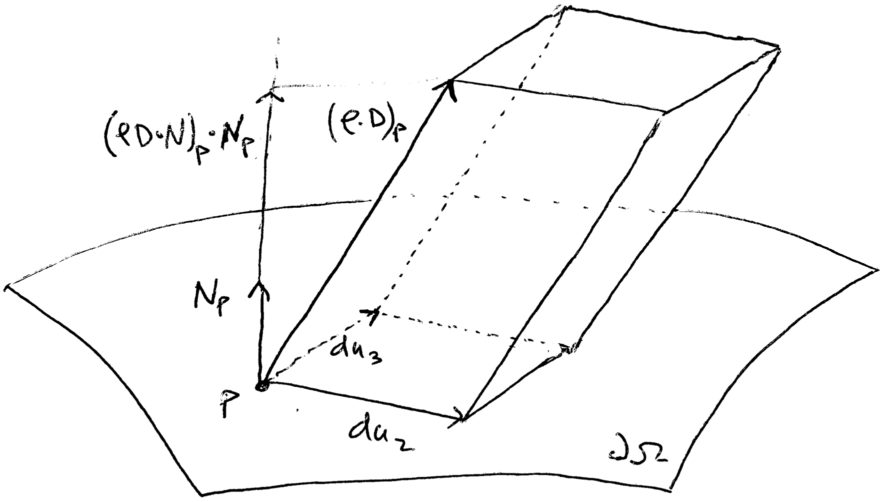
Utilizamos las hipótesis y la notación que aparecen en la Hoja 12 de problemas.

Antes de resolver el problema vamos a justificar que la integral

$$\int_{\partial\Omega} (\rho D \cdot N)\, \omega_{\partial\Omega}$$

se denomine "flujo del fluido" a través del borde.

Infinitesimalmente: fijado un punto $p \in \partial\Omega$, sea $(\mathcal{U}; u_1, u_2, u_3, u_4)$ un entorno abierto coordenado de p tal que $\mathcal{U} \cap \Omega \equiv u_1 \leq 0$ y $du_1 \wedge du_2 \wedge du_3 \wedge du_4$ define la orientación en $\mathcal{U}$, en cuyo caso $du_2 \wedge du_3 \wedge du_4$ define la orientación en $\partial\Omega \cap \mathcal{U}$; supongamos para simplificar que las coordenadas u_2, u_3, u_4 sobre $\partial\Omega \cap \mathcal{U}$ cumplen además que $\omega_{\partial\Omega} = du_2 \wedge du_3 \wedge du_4$ (sabemos que las formas $\omega_{\partial\Omega}$ y $du_2 \wedge du_3 \wedge d_4$ se diferencian en un factor positivo). La cantidad de masa del fluido que atraviesa el borde $\partial\Omega$ por su trozo infinitesimal determinado por p, du_2, du_3, du_4 es el volumen del paralelepípedo del dibujo siguiente:



(realmente el paralelepípedo está en dimensión 4: las aristas que pa... de p tien las direcciones de du_2, du_3, du_4, $(\rho D)_p$; nosotros sólo sabemos dibujar 3 dimensiones: en el dibujo aparece $\partial\Omega$ con "área", pero realmente tiene "volumen").

El volumen (4-dimensional) del paralelepípedo es igual al volumen (3-dimensional) de la base, $du_2\cdot du_3\cdot du_4$, por la altura $(\rho D\cdot N)_p$, es decir, $(\rho D\cdot N)_p\, du_2\, du_3\, du_4$. Integrando sobre $U\cap\partial\Omega$ obtenemos la cantidad total de masa del fluido que atraviesa $U\cap\partial\Omega$:

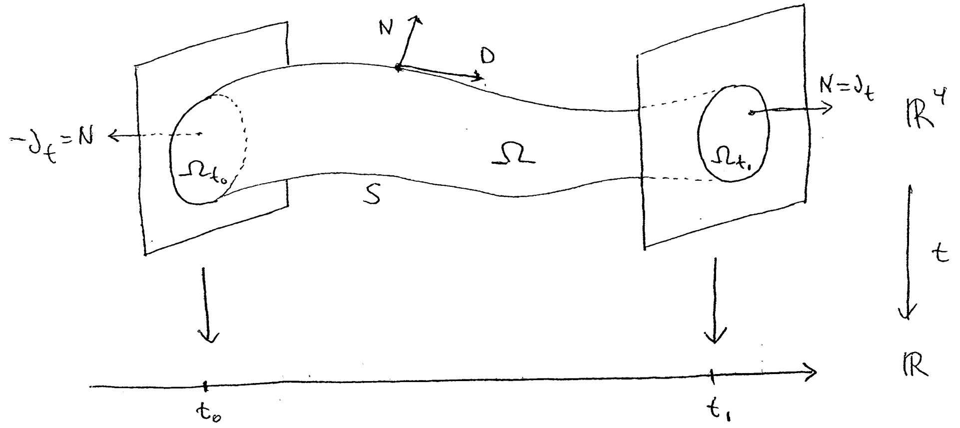
$$\int_{U\cap\partial\Omega} (\rho D\cdot N)\, du_2\, du_3\, du_4 = \int_{U\cap\partial\Omega} (\rho D\cdot N)\, du_2\wedge du_3\wedge du_4 = \int_{U\cap\partial\Omega} (\rho D\cdot N)\cdot \omega_{\partial\Omega} .$$

Resolvamos ya el problema.

(a) Tenemos que ver que el cumplimiento de la "ecuación de continuidad" es equivalente a la "conservación de la masa en el tiempo".

Sea Ω_{t_0} una cierta región (variedad con borde) de $\mathbb{R}^3$ en un instante t_0. Las partículas del fuido que ocupan tal región en el instante t_0, ocuparán en un instante t_1 posterior otra región Ω_1. Las trayectorias del fluido entre ambos instantes rellenarán una región Ω de $\mathbb{R}^4$. Obsérvese que Ω_{t_0}, Ω_{t_1} están contenidos en $\partial\Omega$. Denotemos $S = \partial\Omega - (\Omega_{t_0}\cup\Omega_{t_1})$. Obsérvese también que si N es el campo unitario normal a $\partial\Omega$ que apunta hacia fuera de Ω, entonces:

$N = -\partial_t$ sobre Ω_{t_0} y $N = \partial_t$ sobre Ω_{t_1}.



Sobre S es $D \cdot N = 0$ porque D y N son ortogonales; sobre Ω_{t_0} es $D \cdot N = D \cdot (-\partial_t) = -1$, y sobre Ω_{t_1} es $D \cdot N = D \cdot \partial_t = 1$, de modo que aplicando la ecuación de continuidad y el teorema de la divergencia obtenemos

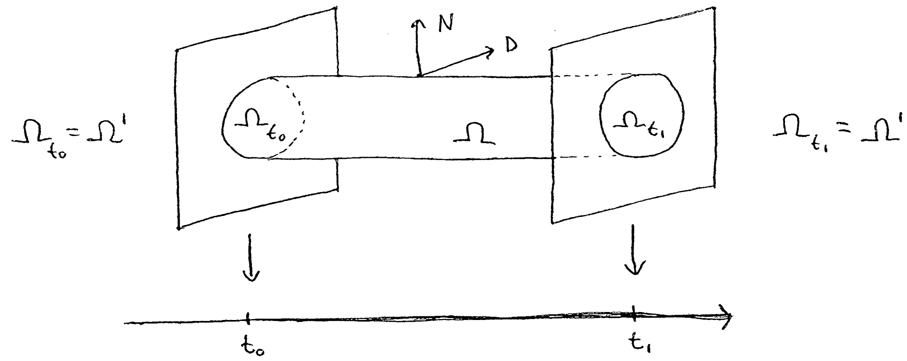
$$0 = \int_\Omega \operatorname{div}(\rho D) = \int_{\partial\Omega} \rho D \cdot N = \int_{\Omega_{t_1}} \rho D \cdot N + \int_S \rho D \cdot N + \int_{\Omega_{t_0}} \rho D \cdot N =$$

$$= \int_{\Omega_{t_1}} \rho - \int_{\Omega_{t_0}} \rho \quad \Rightarrow \quad \int_{\Omega_{t_1}} \rho = \int_{\Omega_{t_0}} \rho ,$$

es decir, la masa de fluido en Ω_{t_1} es igual a la masa de fluido en Ω_{t_0}.

Recíprocamente: Si la masa del fluido se conserva a lo largo del tiempo, entonces el teorema de la divergencia muestra que $\int_\Omega \operatorname{div}(\rho D) = 0$ para toda región Ω, luego $\operatorname{div}(\rho D) = 0$.

Una variante más elaborada del anterior argumento es la siguiente: con independencia de cómo se mueva el fluido, consideremos una región Ω de $\mathbb{R}^4$ cuyos lonchos espaciales Ω_t sean constantemente igual a una región Ω' de $\mathbb{R}^3$:



En este caso, al aplicar la ecuación de continuidad y el teorema de la divergencia, resulta: la diferencia entre la masa del fluido que hay en Ω' en el instante t_0 (la masa en Ω_{t_0}) y la masa del fluido que hay en Ω' en el instante t_1 (la masa en Ω_{t_1}), es igual a la masa del fluido que ha atravesado el borde de Ω' durante el tiempo transcurrido entre t_0 y t_1.

(b) El fluido se dice que es <u>incompresible</u> si su densidad es constante, en cuyo caso, teniendo en cuenta la igualdad

$$0 = \operatorname{div}(\rho D) = \rho \cdot \operatorname{div} D + \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{D(\rho)} = \rho \cdot \operatorname{div} D ,$$

se satisface $\operatorname{div} D = 0$. El recíproco no es cierto; si $\operatorname{div} D = 0$, entonces $D\rho = 0$, es decir, ρ es constante a lo largo de las trayectorias del fluido, pero no es ρ constante. ∎