1. Calcúlese el revestimiento universal de una superficie compacta S.

<u>Solución</u>: Toda superficie compacta es semilocalmente simplemente conexa (porque es variedad topológica), y por lo tanto tiene un revestimiento simplemente conexo que es el universal. Sea $X \xrightarrow{\Pi} S$ revestimiento universal; X será una superficie (variedad topológica conexa de dimensión 2) porque Π es homeomorfismo local, aunque X puede no ser compacta.

Sabemos que la única superficie compacta simplemente conexa es S_2. Supongamos probado que $\mathbb{R}^2$ es la única superficie no compacta que es simplemente conexa. También sabemos que S_2 es el revestimiento universal de S_2 y de $\mathbb{P}_2$.

Probemos que si $X = S_2$ entonces $S = S_2$ ó $S = \mathbb{P}_2$. Como consecuencia, si $S \neq S_2$ y $S \neq \mathbb{P}_2$ entonces el revestimiento universal de S será $\mathbb{R}^2$.

Sea $\Pi : S_2 \longrightarrow S$ revestimiento (que será universal). Dado $x_0 \in S$, $\Pi^{-1}(x_0)$ es un cerrado del compacto S_2, y como la topología de $\Pi^{-1}(x_0)$ es la discreta debe ser $\Pi^{-1}(x_0)$ finito; el cardinal de las fibras es igual al cardinal del grupo de Galois del revestimiento, y dicho grupo es $\Pi_1(S)$; por lo tanto el grupo $\Pi_1(S)$ es finito. Para terminar basta tener en cuenta que los únicos grupos fundamentales de superficies compactas que son finitos son

$$\Pi_1(S_2) = 0 \quad , \quad \Pi_1(\mathbb{P}_2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} .$$

2. Obténganse todos los revestimientos conexos del toro $\mathbb{T}$.

<u>Solución</u>: La aplicación

$$\pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S_1 \times S_1 = \mathbb{T}$$
$$(x,y) \longmapsto (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$$

es un revestimiento (porque lo es $\mathbb{R} \to S_1$, $t \mapsto e^{2\pi t i}$), que debe ser universal porque $\mathbb{R}^2$ es simplemente conexo, y por lo tanto es de Galois de grupo $\Pi_1(\mathbb{T}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. En virtud del teorema de Artin tenemos entonces

$$\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{T} .$$

La igualdad $\mathrm{Aut}_{\mathbb{T}} \mathbb{R}^2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ se describe del siguiente modo: cada $(n,m) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ define el automorfismo

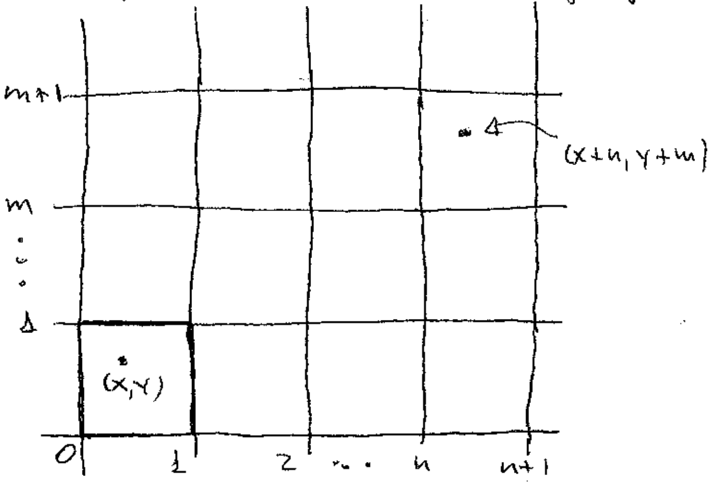
$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{(n,m)} \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (x+n, y+m),$$

que claramente hace conmutativo el triángulo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[rr, "(n,m)"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{R}^2 \arrow[dl, "\pi"] \\ & \mathbb{T} & \end{tikzcd} \quad ;$$

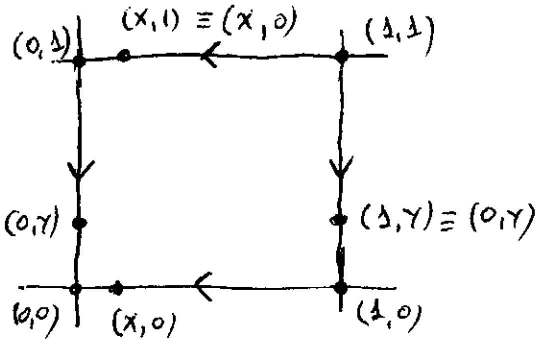
y no hay más automorfismos de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{T}$ que los de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Veamos el "teorema de Artin", esto es, que el cociente de $\mathbb{R}^2$ por la acción del grupo $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ es el toro $\mathbb{T}$.



En el cociente de $\mathbb{R}^2$ por $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ todos los cuadrados de la malla del dibujo se identifican, luego basta ver qué ocurre en el cuadrado unidad $[0,1] \times [0,1]$.

Cada punto del interior sólo está relacionado con él mismo, y los bordes del cuadrado se identifican como en el dibujo. Es claro entonces que el cociente de $\mathbb{R}^2$ por $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ es el toro



Ahora, todo revestimiento conexo de $\mathbb{T}$ es un cociente del universal, y según el teorema de Galois todo cociente del universal se corresponde con un subgrupo de $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$.

Todo grupo conmutativo es un $\mathbb{Z}$-módulo de modo que sus subgrupos son sus submódulos. Como $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo libre de rango 2, un submódulo suyo debe ser libre de rango 0, 1 ó 2; es decir, los submódulos de $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ son 0, $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ y los de la forma

$$\langle v\rangle := \{n\cdot v : n\in\mathbb{Z}\} \quad \text{con} \quad v\in\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z},\ v\neq(0,0).$$

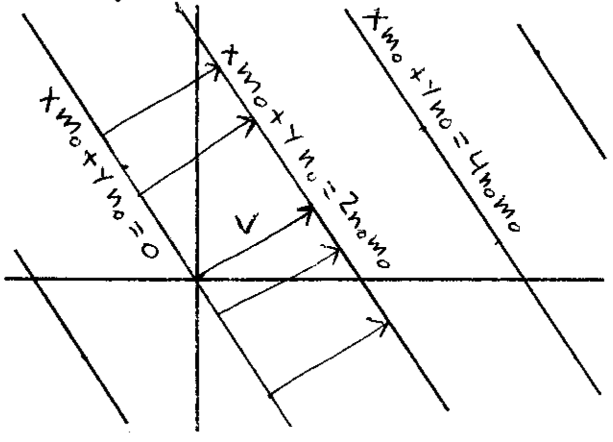
Para el 0 el revestimiento que se obtiene es

$$\mathbb{R}^2/_0 = \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\ \pi\ } \mathbb{T},$$

y para $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ es

$$\mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}} = \mathbb{T} \xrightarrow{\ =\ } \mathbb{T}.$$

Fijemos $v=(n_0,m_0)\in\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, $v\neq(0,0)$, y consideremos el subgrupo $H=\langle v\rangle=\{(nn_0,nm_0) : n\in\mathbb{Z}\}$.



Cada punto de $\mathbb{R}^2$ se identifica con un punto de la banda comprendida entre las rectas $xm_0+yn_0=0$ y $xm_0+yn_0=2n_0m_0$ (cada punto de $\mathbb{R}^2$ lo llevamos a un punto de dicha banda si lo trasladamos por un mutiplo entero de v convenientemente elegido).

Dentro de la banda, cada punto del interior solo está relacionado con él mismo, y las dos rectas que delimitan la banda se identifican paralelamente. Es claro entonces que el cociente de $\mathbb{R}^2$ por la acción de H es un cilindro C: $\mathbb{R}/H = C$.

Por ejemplo, si fuera $v=(1,0)$ entonces $H=\langle v \rangle = \mathbb{Z}\times 0 \subseteq \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ y por lo tanto

$$C = \mathbb{R}\times\mathbb{R}/_H = \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R} = S_1 \times \mathbb{R},$$

obteniéndose el revestimiento

$$\begin{aligned} C = S_1\times\mathbb{R} &\longrightarrow S_1\times S_1 = \mathbb{T} \\ (x,y) &\longmapsto (x, e^{2\pi y i}) \end{aligned}.$$

Nótese que por ser $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ un grupo conmutativo, dos subgrupos suyos son conjugados si y sólo si son iguales. ¿Qué conclusión se obtiene de este último hecho?

---

3. Dado un punto p de un espacio topológico X, si C es la componente arco-conexa de X a la que pertenece p, pruébese entonce que hay un isomorfismo natural

$$\Pi_1(C)_p = \Pi_1(X)_p .$$

Solución: Ejercicio sencillo.

4. Sea G un grupo topológico, esto es, un grupo dotado de una topología que hace continuas las operaciones

$$\begin{aligned} G\times G &\xrightarrow{\ \cdot\ } G \\ (g_1,g_2) &\longmapsto g_1\cdot g_2 \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} G &\xrightarrow{\text{inverso}} G \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned} .$$

Pruébese que el grupo fundamental de G en el elemento neutro e es conmutativo (independientemente de que lo sea G). Pruébese también que para todo par de elementos $g, \bar{g} \in G$, los grupos $\Pi_1(G)_g$ y $\Pi_1(G)_{\bar{g}}$ son canónicamente isomorfos (aunque G no sea arco-conexo).

<u>Solución</u>: En los lazos en el neutro $e \in G$, además de la composición de lazos tenemos una nueva operación: dados $\sigma, \sigma' : I \longrightarrow G$ lazos en e definimos el lazo producto $\sigma \cdot \sigma'$ como

$$\begin{aligned} \sigma \cdot \sigma' : I &\longrightarrow G \qquad \text{producto de } G \\ t &\longmapsto \sigma(t) \cdot \sigma'(t) \quad ; \end{aligned}$$

la composición de los lazos σ y σ' lo denotamos $\sigma\sigma'$.
Esta nueva operación es compatible con la relación de homotopía:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_1 \equiv \sigma_1' \\ \sigma_2 \equiv \sigma_2' \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma_1 \cdot \sigma_2 \equiv \sigma_1' \cdot \sigma_2' .$$

En efecto, si $\sigma_1 \overset{H_1}{\equiv} \sigma_1'$ y $\sigma_2 \overset{H_2}{\equiv} \sigma_2'$, entonces $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \overset{H_1 \cdot H_2}{\equiv} \sigma_1' \cdot \sigma_2'$ con $H_1 \cdot H_2(t) := H_1(t) \cdot H_2(t)$.

Veamos que respecto a la relación de homotopía esta operación es la misma que la composición de lazos, esto es, que para todo par de lazos en e se cumple $\sigma\sigma' \equiv \sigma \cdot \sigma'$: si σ_e es lazo constante e tenemos

$$\left.\begin{array}{l} \sigma \equiv \sigma\sigma_e \\ \sigma' \equiv \sigma_e\sigma' \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma \cdot \sigma' \equiv (\sigma\sigma_e) \cdot (\sigma_e\sigma') = \left\{\begin{array}{ll} \sigma(2t) \cdot e & , 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ e \cdot \sigma'(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{array}\right\} = \sigma\sigma'.$$

Ahora es fácil ver que $\Pi_1(G)_e$ es conmutativo:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma \equiv \sigma_e\sigma \\ \sigma' \equiv \sigma'\sigma_e \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma\sigma' \equiv \sigma \cdot \sigma' \equiv (\sigma_e\sigma) \cdot (\sigma'\sigma_e) = \sigma'\sigma .$$

Probemos la segunda parte del enunciado. Para cada $g \in G$ sea $C(g)$ la componente arco-conexa de G a la que pertenece g. Fijado $g_0 \in G$ está bien definida la aplicación

$$\begin{array}{ccc} C(e) & \longrightarrow & C(g_0) \\ g & \longmapsto & g_0 \cdot g \end{array} .$$

En efecto, dado $g \in C(e)$, si $\gamma : I \longrightarrow G$ es un arco tal que $\gamma(0) = e$ y $\gamma(1) = g$, entonces $\bar{\gamma} : I \longrightarrow G$, $\bar{\gamma}(t) = g_0 \cdot \gamma(t)$ es un arco (no olvidemos que el producto de G es continuo) tal que $\bar{\gamma}(0) = g_0$ y $\bar{\gamma}(1) = g_0 \cdot g$, de modo que $g_0 g \in C(g_0)$. Así obtenemos una aplicación continua $C(e) \longrightarrow C(g_0)$ que es homeomorfismo; su homeomorfismo inverso es

$$\begin{array}{ccc} C(g_0) & \longrightarrow & C(e) \\ g & \longmapsto & g_0^{-1} \cdot g \end{array} .$$

Por lo tanto, aplicando el ejercicio $\underline{3}$. obtenemos:

$$H_1(G)_{g_0} \approx H_1(C(g_0))_{g_0} \approx H_1(C(e))_e \approx H_1(G)_e .$$

<u>Ejercicio</u>: Compruébese que $C(e)$ es un subgrupo de G.