Aplicaciones Lineales

Ejercicios

1. Estudia la linealidad de las siguientes aplicaciones:
   (a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (x + y, x - y, x)$
   (b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x) = (-3x, 2x)$.
   (c) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x + y, 1)$.
   (d) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = xy$.
   (e) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $f(x, y) = (x \cos\phi - y \sin\phi, x \sin\phi + y \cos\phi)$, con $0 \leq \phi < 2\pi$.
   (f) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida por $f(a, b, c) = a + bx + cx^2$.

2. Estudia la linealidad de las siguientes aplicaciones:
   (a) $f : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : A = A^t\}$ definida por $f(A) = \frac{A+A^t}{2}$ (A^t es la matriz traspuesta de A).
   (b) $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A = A^t\}$, definida por $f(A) = AA^t$.
   (c) $f : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ definida por $f(p(x)) = p(x + 1)$
   (d) $f : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, definida por $f(p(x)) = p(x) + 1$.

3. Prueba que las siguientes aplicaciones, definidas sobre el espacio vectorial de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, son lineales.
   (a) $f(p(x)) = p'(x)$
   (b) $g(p(x)) = \int_0^x p(t)dt$

4. Sean $p_1 = 1 + x^2 + 2x^3$, $p_2 = 1 + x$, $p_3 = 1 + x^3$, $p_4 = x - x^3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
   (a) ¿Existe alguna aplicación lineal $f : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ que cumple que $f(p_1) = x - 1$, $f(p_2) = 1 + 3x^2$, $f(p_3) = x^2$ y $f(p_4) = 1$.?
   (b) ¿Existe una aplicación lineal $g : L(\{p_1, p_2, p_3\}) \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $g(p_1) = 2x - 3$, $g(p_2) = x^2 - 1$, $g(p_3) = 1 + x$?

   Ojo: $L(\{p_1, p_2, p_3\})$ **significa *el subespacio generado por*** $\{p_1, p_2, p_3\}$. En general, cada vez que ponga $L(\{v_1, \ldots, v_n\})$ eso significa lo mismo que $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle$.

5. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios $S = L(\{(0, 1, 0), (1, 1, 0)\})$ y $T = L(\{(1, 0, 1)\})$.
   (a) Expresa cada vector $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ como suma de un vector $u_S \in S$ y otro $u_T \in T$.
   (b) Demuestra que la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $f(u) = u_S$ es lineal.

6. Sea $B = \{v_1, v_2\}$ una base de V, y f y g dos endomorfismos sobre V definidos por
   $$\begin{cases} f(v_1) = -3v_1 + v_2 \\ f(v_2) = v_1 - v_2 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} g(v_1) = v_1 + v_2 \\ g(v_2) = v_1 \end{cases}$$
   Encuentra las matrices, respecto de la base B, asociadas a f, g, $f \circ g$ y $g \circ f$

7. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz, respecto de la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$, es $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcula $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$ y $f(e_1 + 2e_2 - e_3)$. ¿Es una matriz invertible?

8. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz, respecto de la base canónica es $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Encuentra una base del subespacio de $\mathbb{R}^3$ formado por los vectores que cumplen que $f(v) = (0, 0, 0)$.

9. Encuentra la matriz, respecto de las bases usuales en los correspondientes espacios, de las siguientes aplicaciones lineales:

   (a) $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$, definida como $f(A) = A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   (b) $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, definida como $f(A) = A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A$.

   (c) $f : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definida como $f(1) = x^2 + 1$, $f(x) = x + 2$, $f(x^2) = x^3 - x$ y $f(x^3) = 1$.

   (d) $f : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida como $f(p(x)) = (p(1), \int_0^1 p(x)dx)$.

10. Sea $f : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida como $f(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c-d & a-b \end{pmatrix}$. Obtén la matriz de la aplicación lineal respecto de las bases que elijas.

11. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal de ecuaciones

$$\begin{cases} y_1 = x + 2z \\ y_2 = -x - y - z \\ y_3 = 2y - 3z \\ y_4 = x - z \end{cases}$$

   (Esta manera de describir f es equivalente a $f(x, y, z) = (x + 2z, -x - y - z, 2y - 3z, x - z)$). Halla las ecuaciones paramétricas e implícitas del subespacio de $\mathbb{R}^3$ formado por los vectores que cumplen que $f(v) = (0, 0, 0, 0)$.

12. Sean $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $g : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ las aplicaciones definidas por

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & x_2 \\ x_2 & x_2 - x_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad g(A) = \begin{pmatrix} 1 & x \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$$

   (a) Prueba que son aplicaciones lineales.

   (b) Halla sus matrices respecto de las bases usuales. ¿Cuáles son sus rangos?

   (c) Halla la matriz de $g \circ f$ y su rango.

13. En $\mathbb{R}^3$ se define el endomorfismo f cuya matriz, respecto de la base canónica, es $A_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

   (a) Halla los valores de a para los que A no es invertible.

   (b) Para $a = 2$, encuentra un vector $u \neq 0$ tal que $f(u)$ es múltiplo de u.

14. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que $f(0, 0, -1) = (2, -5, -3)$ y $f(v) = 3v$, para todo $v \in S = \{(x, y, z) : x + z = 0\}$. Halla su matriz respecto de la base canónica.

15. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal definida por la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Halla el valor de a para que $(1, a, -a, 0) \in \mathrm{Im} f$.

   (b) Halla $f^{-1}(1, 0, 0, 0)$ (esto es, los vectores que cumplen que $f(v) = (1, 0, 0, 0)$).

   (c) En $\mathbb{R}^3$ se considera el subespacio vectorial U generado por la base $B_1 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0)\}$ y en $\mathbb{R}^4$ el subespacio vectorial V generado por la base $B_2 = \{(1, 0, 0, -1), (1, 1, 1, -1), (2, 0, -1, 1)\}$. Halla la matriz de $f : U \longrightarrow V$ respecto de las bases dadas.

16. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que: $f(1,1,1) = (1,1,0)$, $f(-1,1,1) = (0,0,1)$ y $f(-1,-2,1) = (0,0,0)$.

   (a) Halla su matriz respecto de la base canónica.

   (b) Halla su matriz respecto de la base $B = \{(1,1,1), (-1,1,1), (-1,-2,1)\}$.

17. Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Sea $S = L(\{A, B, C\})$ y $g : S \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida por $g(A) = x, g(B) = x^2 + 1$ y $g(C) = x^2 + x + 1$.

   (a) Halla las ecuaciones de g respecto de las bases $B_1 = \{A, B, C\}$ y $B_2 = \{1, x, x^2\}$, y respecto de las bases $B_3 = \left\{A, B, E = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ y $B_4 = \{x, x^2 + 1, 1\}$.

   (b) Estudia si existe alguna aplicación lineal $f : S \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $f(A) = x$, $f(B) = x^2 + 1, f(C) = x^2 + x + 1$ y $f(D) = 2x^2 + x$.

18. Sea $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\begin{cases} f(e_1) + f(e_2) = ae_1 + (a+1)e_2 + e_3 \\ f(e_1) + f(e_3) = -e_1 + ae_2 + 2e_3 \\ f(e_3) = -e_1 + e_3 \end{cases}$$

   (a) Halla la matriz de f respecto de B. ¿Para qué valores de a es invertible la matriz? Calcula $f^{-1}(-2,-2,0)$.

   (b) Para $a = 2$ sea $B' = \{u_1 = e_1 - e_2,\ u_2 = e_3,\ u_3 = 2e_2 + e_3\}$. Prueba que B' es base y halla la matriz de f respecto de B'.

19. Sea $f_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal cuya matriz respecto de la base canónica es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & k & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$.

   (a) ¿Para qué valores de k es invertible?

   (b) Halla, si es posible, bases respecto de las cuales la matriz de f_1 es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (c) Halla $f^{-1}(S)$ donde $S = L(\{(2,1,-1), (-3,2,1)\})$.