Ejercicios

1. Halla los vectores propios de cada una de las siguientes aplicaciones o matrices.
   (a) $f(x,y) = (x, 2y)$;
   (b) $g(x,y) = (x+y, 0)$;
   (c) $h(x,y) = (2x-y, x-2y)$;
   (d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

2. Halla los vectores propios de cada una de las siguientes aplicaciones lineales:
   (a) $f(x,y,z) = (x, z, -y)$;
   (b) $f(x,y,z) = (x-y+3z, 2y-3z, -z)$;
   (c) $f(x,y,z) = (x-y+3z, y-3z, -z)$;
   (d) $f(x,y,z) = (x-y+z, 2y-z, z)$.

3. ¿Es diagonalizable en $\mathbb{R}$ el endomorfismo $f(x,y,z) = (-z, 0, x)$;

4. Siendo $B_c = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica, estudia la diagonalización del endomorfismo:
$$f(e_1 - e_2) = (-3,-2,1); \quad f(e_1 + e_3) = (-3,-3,0); \quad f(3e_2 - e_3) = (1,-1,-1)$$

5. Estudia si las siguientes matrices son diagonalizables y, en caso afirmativo, halla la matriz diagonal D y la matriz de paso P.
   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
   (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

6. Estudia la diagonalización de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$. En caso de ser diagonalizable, halla la matriz de paso y la matriz diagonal.

7. Estudia la diagonalización de las matrices:
   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
   (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   (c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
   (d) $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En caso de ser diagonalizables, halla D, P y comprueba que $A^n = PD^nP^{-1}$.

8. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
   (a) Estudia si es diagonalizable.
   (b) Calcula A^n.

9. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el endomorfismo de matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ respecto de la base canónica.
   (a) Halla sus valores y vectores propios.
   (b) Halla una base B de $\mathbb{R}^3$ en la que la matriz $M(f, B)$ sea diagonal.
   (c) Calcula A^n.

10. Sea $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por $f(M) = M + M^t$.
    (a) Prueba que es lineal.
    (b) Halla la matriz de f respecto de la base canónica.
    (c) Estudia si es diagonalizable y, en su caso, halla una base de vectores propios.

11. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el endomorfismo que proyecta todo vector (x, y, z) sobre el plano $x + y - z = 0$. Halla la matriz de f respecto de la base canónica.

12. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
    (a) Calcula A^n.
    (b) Estudia la diagonalización de la matriz $B = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.
    (c) Sea $C = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Calcula C^n.

13. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el endomorfismo definido por la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Estudia la diagonalización de A.

14. Estudia la diagonalización de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y calcula A^n.

15. Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dos endomorfismos tales que $f \circ g = g \circ f$. Si f es diagonalizable y sus valores propios son distintos, demuestra que existe una base de $\mathbb{R}^3$ en la que las matrices asociadas a f y g son ambas diagonales.

16. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo diagonalizable con un solo valor propio $\lambda = 2$. Halla f.

17. Halla P tal que $P^{-1}AP = D$ para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

18. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$.
    (a) ¿Cuándo es diagonalizable?

(b) Si A es diagonalizable, calcula A^n.

19. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

    (a) ¿Para qué valores de a es diagonalizable?

    (b) Si A es diagonalizable, calcula A^n.

20. Sea $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por $f(A) = A - A^t$. Estudia si es diagonalizable.

21. Sea $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el endomorfismo definido como $f(A) = A + A^t + (a_{11} + a_{22})\,\mathrm{Id}$.

    (a) Halla la matriz de f respecto de la base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

    (b) Estudia si es diagonalizable.