Espacios vectoriales

Ejercicios

1. En $\mathbb{R}^2$ se definen las siguientes operaciones:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \text{y} \quad \alpha * (x, y) = (\alpha x, y)$$

   ¿Es un espacio vectorial?

2. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos, de $\mathbb{R}^3$ o $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, son subespacios vectoriales?

   (a) $S = \{(x, y, z) : y = 0\}$
   (b) $S = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$
   (c) $S = \{(x, y, z) : x + z = 1\}$
   (d) $S = \{(x, y, z) : x + z = 0\}$
   (e) $S = \{(x, y, z) : x + z \leq 0\}$
   (f) $S = \{(x, y, z) : xy = 0\}$
   (g) $S = \{p(x) = x^3 + ax + b : a, b \in \mathbb{R}\}$
   (h) $S = \{p(x) = ax^3 + b : a, b \in \mathbb{R}\}$

3. Estudia la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores en $\mathbb{R}^3$:

   (a) $\{(0, 1, 0), (1, 1, -1), (-1, 0, 1)\}$
   (b) $\{(0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$
   (c) $\{(1, 0, a), (a, 1, 0), (0, a, 1)\}$
   (d) $\{(1, 0, a), (a, 1, 0), (a, 0, 1)\}$

4. Estudia la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

   (a) $\{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$
   (b) $\{x, x^2, x + x^2\}$
   (c) $\{1 - x^2, 1 + x, x^2 - x, x + x^2\}$
   (d) $\{1 + x^2, 2 + x^2\}$

5. Sean $f, g, h : \{a, b, c\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas como: $f(a) = 0$, $f(b) = f(c) = 1$; $g(a) = g(c) = 1$, $g(b) = 0$; $h(a) = h(b) = 1$, $h(c) = 0$. Estudia la dependencia o independencia lineal del conjunto $\{f, g, h\}$.

6. Determina si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes o independientes. En el primer caso, encuentra una combinación lineal entre ellos y un subconjunto con un número máximo de vectores linealmente independientes.

   (a) $\{(3, 5, 1), (2, 1, 3)\}$
   (b) $\{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (0, -1, 1)\}$
   (c) $\{(1, 0, 1, 0), (2, 1, 3, 1), (0, 1, 1, 1), (2, 2, 4, 2)\}$
   (d) $\{1 + 3x + 4x^2, 4 + x^2, 3 + x + 2x^2\} \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

7. ¿Para qué valores de a el conjunto $B = \{(a, 1, 0), (1, a, 1), (0, 1, a)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$? Para $a = 2$ calcula las coordenadas del vector $v = (-1, 1, 3)$ respecto de dicha base.

8. En $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ se considera la base $B = \{1, 1 - x, (1 - x)^2, (1 - x)^3\}$. Halla las coordenadas del polinomio $p = 2 - 3x + x^2 + 2x^3$ respecto de dicha base.

9. En $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ se considera el conjunto $B = \{1, x + 3, (x + 3)^2\}$. Prueba que es una base, y halla las coordenadas del polinomio $p = a + bx + cx^2$ respecto de dicha base.

10. Averigua si los vectores $u = (1, -1, 0)$ y $w = (2, -3, 1)$ pertenecen al espacio vectorial generado por el conjunto de vectores $\{v_1 = (2, 5, 1), v_2 = (3, 4, 1), v_3 = (5, 9, 2)\}$.

11. Determina a y b para que el vector $(2, a, 3, -b)$ pertenezca al subespacio generado por los vectores $(2, 3, 1, -5)$ y $(0, 2, -1, 3)$.

12. Sean los conjuntos: $A = \{(1, 0, -1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$, $B = \{(2, 1, -1), (1, 2, 1)\}$ y $C = \{(2, 1, -1), (1, -1, 0)\}$. Demuestra que A y B generan el mismo subespacio, y que éste no coincide con el generado por C.

13. Halla una base del espacio vectorial generado por el conjunto de vectores:

$$\{v_1 = (3, 2, 0, 5), v_2 = (-1, 0, 3, -4), v_3 = (2, 2, 3, 1), v_4 = (0, 2, -9, 17)\}$$

14. Se consideran los vectores de $\mathbb{R}^4$: $(1+a, 1, 1, 1)$, $(1, 1+a, 1, 1)$, $(1, 1, 1+a, 1)$ y $(1, 1, 1, 1+a)$, $a \in \mathbb{R}$. Determina, en función de a, la dimensión y una base del espacio vectorial S que generan.

15. Halla la dimensión y una base del espacio vectorial

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a+b+3c & 2a-b \\ -a-c & a+2b+5c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

16. Estudia si es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ el conjunto de soluciones de cada uno de los siguientes sistemas:

    (a) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

    (b) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

    En caso afirmativo, determina una base.

17. Encuentra un sistema de generadores, una base y la dimensión del subespacio vectorial de soluciones del sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

18. Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, determina la dimensión y una base del espacio vectorial generado por $\{A^n : n \geq 0\}$.

19. En $\mathbb{R}^3$ se consideran $S = \{(x, y, z) : x = -z\}$ y $T = \{(x, y, z) : x = z - y\}$.

    (a) Prueba que S y T son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.

    (b) Encuentra una base de S, y halla las coordenadas de un vector arbitrario de S respecto de dicha base.

    (c) Prueba que $B_T = \{(0, 1, 1), (-1, 1, 0)\}$ es una base de T, y encuentra las coordenadas de $(-2, 1, -1) \in T$ respecto de dicha base.

20. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios vectoriales:

$$S = L(\{(1, 0, 1, 1), (1, -1, -1, 0), (0, 1, 2, 1)\})$$

$$T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - x_3 - x_4 = 0, x_2 + x_3 = 0\}$$

    Obtén las ecuaciones paramétricas e implícitas y una base de $S + T$ y de $S \cap T$.

21. En $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ se consideran los conjuntos

$$S = \{p(x) : p(-1) = 0\}$$

$$T = \{p(x) = ax^3 + bx^2 + (a + b)x + 2b : a, b \in \mathbb{R}\}$$

(a) Prueba que S y T son subespacios vectoriales.

(b) Obtén las ecuaciones paramétricas e implícitas y una base de S y de T.

(c) Calcula $S \cap T$ y $S + T$.

22. En $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se consideran los subespacios vectoriales

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Halla la dimensión y una base de los subespacios V_1, V_2, $V_1 + V_2$ y $V_1 \cap V_2$.

23. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios vectoriales:

$$S \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad T \equiv \begin{cases} x_1 = \alpha + \beta + 2\gamma \\ x_2 = \beta + \gamma \\ x_3 = -\alpha + \beta \\ x_4 = 3\beta + 3\gamma \end{cases} \quad ; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Halla bases y dimensiones de S, T, $S + T$ y $S \cap T$.

24. En $\mathbb{R}^5$ se consideran los subespacios vectoriales:

$$U = L(\{(1, 0, -1, 0, 0), (2, 1, 0, 1, -1), (4, 1, 2, 1, -1)\})$$

$$W = L(\{(1, -1, 1, -1, 1), (-2, 0, 0, 0, 3), (0, 1, 2, 1, -1), (0, -2, 2, -2, 5)\})$$

Halla bases de U, W, $U + W$ y $U \cap W$.

25. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios vectoriales:

$$U = \{(x, y, z) : z = 0\} \quad \text{y} \quad W = L(\{(0, 1, 1), (2, 0, 1), (2, 1, 2)\})$$

Halla un sistema de generadores y las dimensiones de los subespacios U, W, $U + W$ y $U \cap W$.

26. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios vectoriales:

$$S = L(\{(1, 0, 2, -1), (0, -1, 2, 0), (2, -1, 6, -2)\})$$

$$T = L(\{(1, -1, 4, -1), (1, 0, 0, 1), (-1, -2, 2, 1)\})$$

Demuestra que $\dim(S + T) = 3$ y que $\dim(S \cap T) = 2$.