

Matrices y Sistemas lineales de ecuaciones

Ejercicios

1. Halla el rango de cada una de las siguientes matrices:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 8 & 10 & 3 \\ -2 & 2 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

2. Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, ¿qué condición debe verificar $k \in \mathbb{R}$ para $AB = 0$?

3. Calcula la inversa, si existe, de las siguientes matrices:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Calcula la inversa, si existe, de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Calcula, según los valores de n , el rango de las matrices:

(a) $A_n = \begin{pmatrix} n+1 & 1 & 1 \\ 1 & n+1 & 1 \\ 1 & 1 & n+1 \end{pmatrix}$

$$(b) B_n = \begin{pmatrix} n+1 & 1 & n \\ 1 & n+1 & 1 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}$$

Obtén la matriz inversa en los casos que se pueda.

6. Resuelve, por el método de Gauss, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$(a) \begin{cases} x - 3y + z = -2 \\ 2x + y - z = 6 \\ x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + y + z + t = -2 \\ x - y - z + t = -4 \\ x - y + z + t = -6 \\ x + y - z + t = 0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 3x + y - z = 10 \\ x - 2y - z = -2 \\ -x + y + z = 0 \\ 2x - y - 3z = 7 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + 9y - 5z = 0 \end{cases}$$

7. Discute, según los valores reales de los parámetros, los siguientes sistemas lineales:

$$(a) \begin{cases} x - 3y + 5z = 2 \\ 2x - 4y + 2z = 1 \\ 5x - 11y + 9z = k \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + ky + 6z = 6 \\ -x + 3y + (k - 3)z = 0 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} y + z = 2 \\ x + y + z = a \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} ax + by + z = 1 \\ ax + y + bz = 1 \\ ax + y + z = b \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} ax + by + 2z = 1 \\ ax + (2b - 1)y + z = 1 \\ ax + by + (b + 3)z = 2b - 1 \end{cases}$$

Resuelve, cuando sea posible, los que dependen de un único parámetro.

8. Resuelve la ecuación matricial $Ax = b$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y

(a) $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 7 & 6 & 5 \\ 10 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

(b) $X \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

10. Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & m \end{pmatrix}$ $m \in \mathbb{R}$, encuentra todas las matrices $B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$ tales que $AB = 0$.

11. Obtén todas las matrices $B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$ que conmutan con la matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ con $x, y \in \mathbb{R}$.

12. Encuentra todos los polinomios $p(x)$ de grado 2, con coeficientes reales, tales que:

(a) $p(1) = 2$, $p(-1) = 4$ y $p(3) = 16$;

(b) $p(1) = p(-1) = 0$.

13. Elimina parámetros en las siguientes ecuaciones paramétricas:

(a) $\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 1 - 3\alpha \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x = 1 - 3\alpha + \beta \\ y = \alpha - 2\beta \\ z = 2 + \beta \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \gamma \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_1 = a + 2b - c \\ x_2 = a - b \\ x_3 = 3b \\ x_4 = b + c \\ x_5 = a - b + 2c \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x_1 = a + b + 2c \\ x_2 = a + 2b + 3c \\ x_3 = a + c \\ x_4 = 0 \\ x_5 = a - b \end{cases}$