Cálculo I
Tema 1
Funciones de una variable: dominio y representación

Índice

Funciones

Dados dos conjuntos D y E, una **función** es una correspondencia que asocia a cada elemento de D un único elemento de E.

Dado un elemento x de D y una función f, el único elemento de D asociado a x por la función se denomina **imagen** de x y se denota $f(x)$. También se denomina **valor** de f en x.

El conjunto D se llama **dominio** de la función. La **imagen** de la función es el subconjunto de elementos de E que están asociados a algún elemento de D. Si denominamos f a la función, el dominio de f también se denota $\mathrm{Dom}(f)$ y la imagen de f se denota $\mathrm{Im}(f)$.

Ejemplos de funciones

- Si $D = \{1, 2, 3\}$, y $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, podemos definir la función que a 1 le asocia 2, a 2 le asocia 4 y a 3 le asocia 6. Entonces la imagen es $\{2, 4, 6\}$.
- Si $D = \mathbb{N}$ y $E = \mathbb{N}$, podemos definir la función que a cada número de D le asocia el doble de ese número.
- Podemos pensar en funciones mucho más complejas y de las cuales no conozcamos su expresión. Por ejemplo, a cada instante de tiempo, podemos asignarle la temperatura media de la clase.

Tipos de funciones

- Decimos que una función es **sobreyectiva** si la imagen de la función es todo E.
- Decimos que una función es **inyectiva** si a elementos distintos de D les corresponden imágenes distintas.
- Decimos que una función es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.

Definición de funciones

- Si el dominio es finito, podemos definir la función dando para cada elemento del dominio su elemento asociado.
- Mediante una expresión que dependa del elemento del dominio. Por ejemplo, si $D = E = \mathbb{N}$ y f es la función que asigna a cada elemento de D su doble, lo denotamos:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{N}, \\ x &\mapsto f(x) = 2x. \end{aligned}$$

Esta definición se denomina **en forma explícita**.

Definición de funciones

- Mediante una ecuación que relacione cada elemento del dominio con su imagen. Si denotamos como x el elemento del dominio y como y su imagen, podemos definir la función anterior **en forma implícita** como

$$y - 2x = 0.$$

Definición de funciones

¡Ojo! No toda expresión implícita define una función. Por ejemplo, la ecuación de la circunferencia,

$$x^2 + y^2 = 1,$$

no define una función. En efecto, al despejar y para obtener la forma explícita, tenemos

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad \text{ó} \quad y = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Es decir, para un mismo valor de x (por ejemplo $x = 0$), obtenemos dos valores de y, ($+1$ y -1). Sin embargo, sí podemos asociar dos funciones a dicha ecuación,

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad f(x) = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Intervalos

Para describir subconjuntos de $\mathbb{R}$, utilizaremos la notación de intervalos. Así, (a, b) denotará todos los números reales x tales que $a < x < b$ y $[a, b]$ denotará todos los números reales x tales que $a \leq x \leq b$.

Análogamente

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \colon a < x \leq b\}, \quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x < b\}.$$

Para denotar los intervalos no acotados, usaremos

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \colon x < b\}, \quad (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \colon x \leq b\},$$

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \colon a < x\}, \quad [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x\}.$$

Funciones reales de una variable real

Estamos interesados en funciones cuyo dominio e imagen son subconjuntos de $\mathbb{R}$. Las llamaremos **funciones reales de una variable real**. Así que una función $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asocia a cada número $x \in D$ un único valor $f(x) \in \mathbb{R}$.

Por ejemplo, la función $f\colon [3,\ 4] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ denotará la función que a cada x que cumpla $3 \leq x \leq 4$ asocia el número $\sqrt{x}$ (siempre tendremos $\sqrt{x} \geq 0$).

Dominio

- El dominio de una función real de variable real será el conjunto sobre el que esté definida la función. El dominio puede estar indicado en la definición de la función, por ejemplo:

  $$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}, \quad \text{si } x < -1 \text{ ó } x > 1.$$

  En este caso, nos están indicando que el dominio será $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

- Si no aparece explícitamente el dominio de la función, se entenderá que es el mayor conjunto en el que es posible definir la función. Por ejemplo, el dominio de $f(x) = \sqrt{x}$ es el conjunto de números reales mayores o iguales que 0, es decir, $\mathrm{Dom}(f) = [0, +\infty)$.

Gráficas de funciones

- La gráfica de la función $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es el subconjunto del plano
$$\{(x, f(x)) : x \in D\}.$$
- La definición de función exige que a cada x del dominio de la función le corresponda un único $f(x)$ de la imagen de la función, lo que geométricamente significa que cada línea vertical que interseca a la gráfica de la función lo haga en un único punto.

Gráficas

- Considérese en el plano x, y la ecuación de la circunferencia de centro el origen y radio la unidad, $x^2 + y^2 = 1$. Al resolver la ecuación con respecto de x se obtienen dos soluciones

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad y = -\sqrt{1 - x^2}.$$

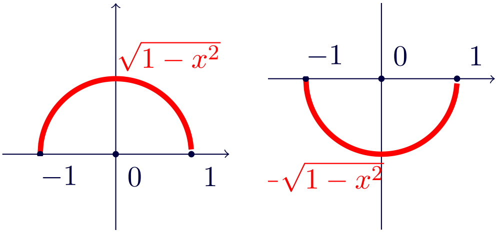
- La definición de función exige que a cada x del dominio de la función le corresponda un único y de la imagen de la función.

Gráficas

Así que se dice que las dos *soluciones* definen dos funciones

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad g(x) = -\sqrt{1-x^2},$$

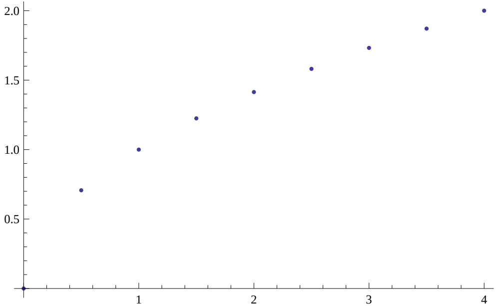
cuyas gráficas son



Gráficas de funciones

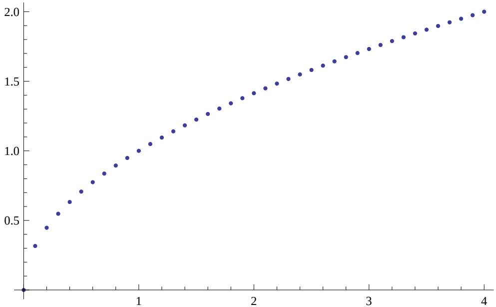
- Para dibujar la gráfica se construye una tabla de valores, se dibujan los puntos y, una vez que queda claro cómo es la gráfica, se hace el dibujo.
- A lo largo del tema, iremos viendo cómo estudiar la función para hacernos una idea sobre cómo se comporta en los puntos donde la tabla de valores no nos aclara cómo es la función.
- Veamos un ejemplo. Se han dado varios valores a la variable x y se han calculado los valores de la función $f(x) = \sqrt{x}$. Al unir esos puntos se consigue dibujar la gráfica de la función.

Gráficas de funciones



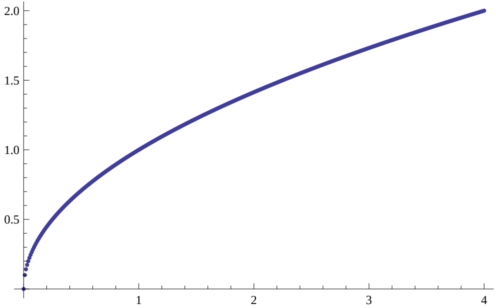
x	$f(x)$
0	0
0,5	$\sqrt{0,5}$
1	1
1,5	$\sqrt{1,5}$
$\dots$	$\dots$

Gráficas de funciones



x	$f(x)$
0	0
0,1	$\sqrt{0,1}$
0,2	$\sqrt{0,2}$
0,3	$\sqrt{0,3}$
...	...

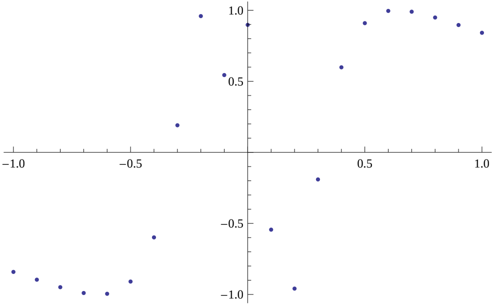
Gráficas de funciones



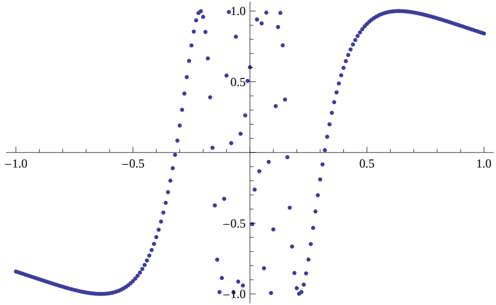
x	$f(x)$
0	0
0,01	$\sqrt{0,01}$
0,02	$\sqrt{0,02}$
0,03	$\sqrt{0,03}$
...	...

Gráficas de funciones

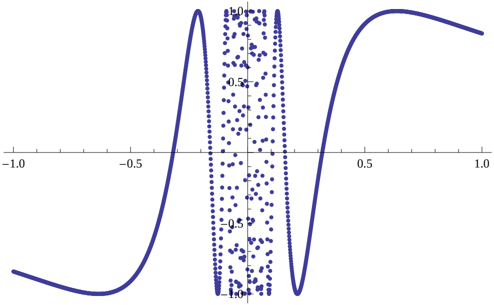
- Este método no siempre funciona y a veces empeora al dibujar más y más puntos.
- Por ejemplo, para $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$, dibujar puntos con valores x próximos a 0 hace cada vez más confuso el dibujo de la gráfica.


1.0
0.5
−0.5
−1.0
−1.0
−0.5
0.5
1.0

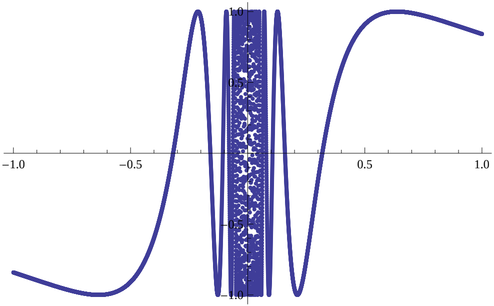
Gráficas de funciones



Gráficas de funciones



Gráficas de funciones



Gráficas de funciones

Ejemplo

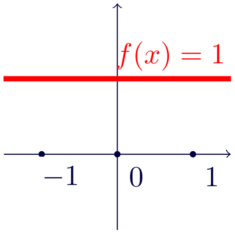
Representar las siguientes funciones calculando el valor en los puntos -1, $-0{,}5$, 0, $0{,}5$, 1*:*

1. $f(x) = x + 1$
2. $f(x) = x^2$
3. $f(x) = \frac{1}{x}$
4. $f(x) = \ln(x + 0{,}2)$

Comparar las gráficas obtenidas con los resultados en Geogebra o Wolfram Alpha.

Funciones constantes

Una función es **constante** cuando la imagen de cada punto del dominio es siempre el mismo valor.



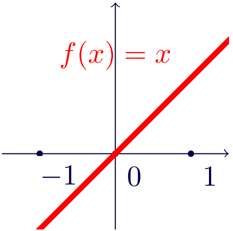
Es decir, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = a$.

Su gráfica es una recta horizontal.

Funciones lineales

Una función es **lineal** cuando la imagen de cada punto del dominio es proporcional a su valor.

Es decir, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax$.

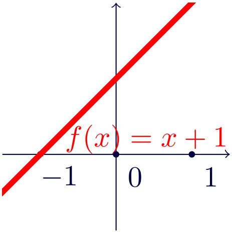


Su gráfica es una recta que pasa por el origen. Conocido un punto de la gráfica distinto del origen, podemos calcular la constante a. Además, podemos obtener el valor de cualquier otro punto aplicando una regla de tres.

Funciones afines

Una función es **afín** cuando es suma de una función constante y una lineal.

Es decir, existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$.



Su gráfica es una recta. Conocidos dos puntos de la gráfica, podemos calcular las constantes a y b y obtener la ecuación de su gráfica $y = ax + b$. Si $a \neq 0$ entonces corta el eje x en un único punto, $x_0 = -b/a$.

Funciones afines

El dominio de las funciones constantes, lineales y afines es $\mathbb{R}$.

La imagen de la función constante es un único punto, y la de las funciones lineales y las afines es $\mathbb{R}$, salvo cuando son constantes.

La función constante no es inyectiva y las funciones lineales y afines son inyectivas salvo cuando son constantes.

Las función constante no es sobreyectiva, pero las funciones lineales y afines sí lo son (cuando no son constantes).

Funciones afines

Ejemplo

1. *Supongamos que tenemos muchos frutos todos iguales y nos dicen que en 7 kilos hay 26 frutos.*
    1. *Obtener la función que relaciona el número de frutos con su peso.*
    2. *¿Cuántos frutos hay en 11 kilos? Resolver usando la función anterior y también por regla de tres.*
2. *Calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos* $(1,3)$ *y* $(4,2)$*.*
3. *El crecimiento de cierto animal es una función afín que depende de la edad. Sabiendo un ejemplar de 1 año pesa 1.3 kgs y un ejemplar de 3 años y medio pesa 2.6 kgs:*
    1. *Calcular la función afín que modeliza dicho crecimiento.*
    2. *Calcular el peso al nacer.*

Funciones afines en Biología

Las funciones afines (normalmente denominadas lineales) son las más empleadas como modelo. Por ejemplo, podemos tratar de relacionar el tamaño del fémur con el tamaño del animal.

Para calcular la función afín que mejor se ajusta a los datos se utiliza la **regresión lineal**.

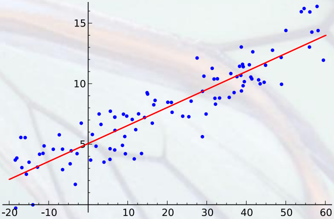


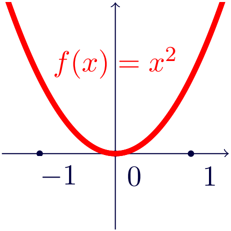
Figura: De Sewaqu, dominio público, Wikipedia.

Polinomios

Un **polinomio** es una función de la forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

para $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ fijados, con $a_n \neq 0$. Se dice que n es el **grado** del polinomio.



El dominio de los polinomios es $\mathbb{R}$. ¿Cuál es su imagen? ¿Son inyectivos/epiyectivos?

Si $n = 2$, la gráfica es una parábola. Más adelante estudiaremos cómo los las gráficas de los polinomios de grado más alto.

Polinomios

Recordatorio

Para sumar polinomios basta sumar los coeficientes con el mismo grado.

Para multiplicar polinomios, usaremos la propiedad distributiva. En particular, es conveniente aprenderse las siguientes identidades:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Polinomios

Los puntos del dominio tal que su imagen por el polinomio es el cero se denominan **raíces** del polinomio.

Un polinomio p tiene la raíz x_0 si y sólo si se escribe como

$$p(x) = (x - x_0)q(x).$$

Ejemplo

Calcular las raíces de los polinomios $x^2 - x$, $x^2 - x - 1$, $x^2 + x + 1$, $x^3 + x - 2$ *y* $(x-1)(x-2)(x-3)$.

Radicales y potencias

Recordatorio

Propiedades que verifican las potencias:

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a}, \quad x^{a+b} = x^a x^b, \quad x^{a-b} = \frac{x^a}{x^b},$$

$$(x^a)^b = x^{ab}, \quad (xy)^a = x^a y^a, \quad x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}.$$

Ejemplo

Simplificar las expresiones: $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$, $\frac{(3\sqrt{2})^3}{3^2 2^3}$, $\frac{\sqrt[3]{24^4}}{12^{3/2}}$.

Radicales y potencias

Una **función potencia** es una función definida como $f(x) = x^a$, para $a \in \mathbb{R}$.

El dominio de definición, depende del valor de a:

1. Si $a \in \mathbb{N}$ (o $a = m/n$ con $m, n \in \mathbb{N}$ y n es impar), entonces el dominio es $\mathbb{R}$. *Ejemplos*: $x^2, x^5, x^{2/3}$.
2. Si $a \in \mathbb{Z}$ y $a \leq 0$ (o $a = -m/n$ con $m, n \in \mathbb{N}$ y n es impar), entonces el dominio es $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. *Ejemplos*: $x^{-1}, x^0, x^{-2/3}$.
3. Si no estamos en los casos anteriores y $a > 0$, entonces el dominio es $[0, +\infty)$. *Ejemplos*: $x^{1/2}, x^{\pi}$.
4. Si no estamos en los casos anteriores y $a < 0$, entonces el dominio es $(0, +\infty)$. *Ejemplos*: $x^{-1/2}, x^{-\pi}$.

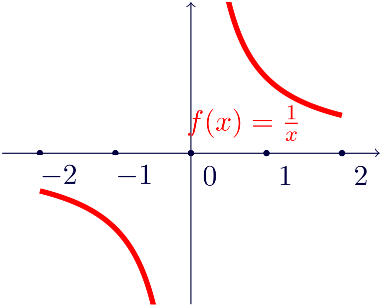
Ejemplo

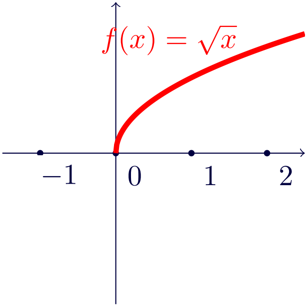
Obtener el dominio de las funciones x^{-1}, x^3, $x^{3/2}$, $x^{-3/2}$, $x^{-1/3}$.

Radicales y potencias

Si $f(x) = x^a$, entonces $f(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$ y $a > 0$.

Además, en todo caso, $f(x) > 0$ si $x > 0$.

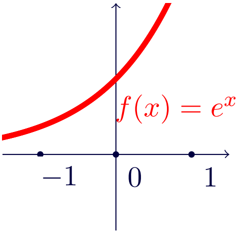




Exponencial

La función **exponencial** se define como $f(x) = e^x$, donde $e \approx 2{,}718282$. Su dominio es $\mathbb{R}$.

$e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. $e^x > 1$ si y sólo si $x > 0$.



Recordatorio

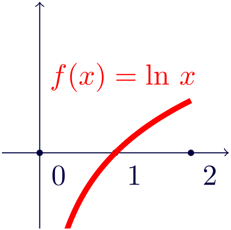
Cumple las mismas propiedades que las potencias:

$$e^{a+b} = e^a e^b, \quad (e^a)^b = e^{ab}.$$

Logaritmo neperiano o natural

La función **logaritmo neperiano** o **logaritmo natural**, $\ln x$, es la función inversa de la exponencial,

$$e^{\ln x} = \ln\left(e^x\right) = x.$$



Su dominio es $\mathbb{R}^+$.

Recordatorio

El logaritmo verifica las siguientes propiedades

$$\ln\, x + \ln\, y = \ln(xy), \quad y \ln\, x = \ln\, x^y.$$

Escala logarítmica y semilogarítmica

Para representar datos de magnitudes muy diferentes se utilizan las escalas **logarítmica** y **semilogarítmica**.
En escala logarítmica, se preserenta en la posición i el valor 10^i.
Es decir, si tenemos un valor x, lo representamos en la posición $\log_{10}(x)$.
Decimos que la escala es semilogarítmica cuando usamos escala logarítmica sólo en un eje.

Ejemplo

Representar en escala logarímica y semilogarítmica (en el eje x o y) los puntos

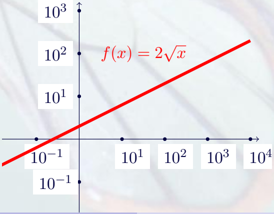
$$(10^{-4}, 3),\ (1, 10^{-2}),\ (0{,}1, 0{,}01),\ (2, 3) \approx (10^{0{,}3}, 10^{0{,}5}),\ (2{\cdot}10^2, 10^3).$$

Funciones potencia en Biología

Las funciones del tipo $f(x) = ax^b$ son muy utilizadas para comparar dos magnitudes físicas de los animales (Alometría). Por ejemplo, para relacionar el tamaño de tetrápodo con el de su fémur o el de un huevo respecto del ave.

En escala logarítmica, las gráficas de estas funciones son rectas, porque tenemos

$$\log(y) = \log(ax^b) = \log(a) + \log(x^b) = \log(a) + b\log(x).$$

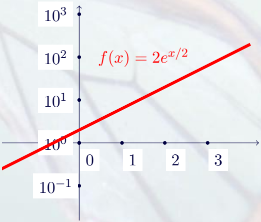


Exponencial y logaritmo en Biología

Las funciones exponenciales del tipo $f(x) = be^{ax}$ se utilizan en Biología para modelar el crecimiento de un animal o de una población.

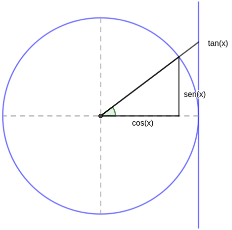
Usando escala semilogarítmica (logarítmica sólo en el eje y), las gráficas de estas funciones son rectas, porque tenemos

$$\log(y) = \log(be^{ax}) = \log(b) + \log(\exp(ax)) = \log(b) + ax.$$



Funciones trigonométricas

Recordemos que las **funciones trigonométricas**, $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$ y $\tan(x)$, para x un ángulo en radianes, se definen según el esquema adjunto.



Recordatorio

Algunas propiedades: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$,

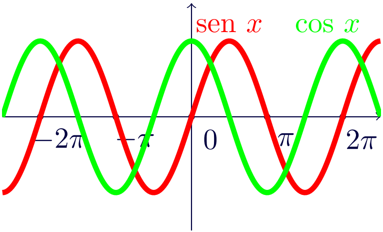
$$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) \pm \cos(a)\operatorname{sen} b,$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen} b.$$

Funciones trigonométricas

Las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son 2π-periódicas, y la función $\tan x$ es π-periódica,

$$\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen}(x), \quad \cos(x+2\pi) = \cos(x), \quad \tan(x+\pi) = \tan x.$$



Funciones trigonométricas

Ejemplo

Demostrar que se cumplen las siguientes propiedades:

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x), \quad \cos(-x) = \cos(x),$$

$$\operatorname{sen}(x \pm \pi) = -\operatorname{sen}(x), \quad \cos(x \pm \pi) = -\cos(x),$$

$$\operatorname{sen}(\pi/2 - x) = \cos(x), \quad \tan(x + \pi/2) = \tan(x - \pi/2).$$

Funciones trigonométricas en Biología

El uso de las funciones trigonométricas en Biología suele estar más relacionado con comportamientos periódicos que con ángulos.

Un ejemplo serían los ritmos circadianos. Por ejemplo, la temperatura de un animal a lo largo del día se suele aproximar por una ecuación de la forma

$$T(t) = T_0 + a\cos((t - t_0)\pi/12),$$

donde T_0 es la temperatura media, t_0 es la hora a la que se alcanza la temperatura máxima, y a es la mitad de la diferencia entre la temperatura máxima y mínima.