

LÍMITES

- Límite de una función en un punto. Se dice que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

si cuanto más se aproxima x al punto a , más se aproxima $f(x)$ a b .

- **En lenguaje formal, si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - b| < \epsilon$.**
- Se supone que f está definida en un intervalo centrado en a , aunque posiblemente no esté definida en a .
- El valor de la función en el punto a no importa; incluso puede ser que la función no esté definida en ese punto y en cambio exista el límite.

LÍMITES

Por ejemplo, para las tres funciones

$$f(x) = x^2$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 7 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ \text{no definida} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

se tiene $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

LÍMITES LATERALES

- Límite por la derecha de una función en un punto. Se dice que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b,$$

si cuanto más se aproxima x por la derecha al punto a , más se aproxima $f(x)$ a b .

- Límite por la izquierda de una función en un punto. Se dice que

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b,$$

si cuanto más se aproxima x por la izquierda al punto a , más se aproxima $f(x)$ a b .

LÍMITES LATERALES

- La función

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in (-1, 0) \\ 1 & \text{si } x \in (0, 1) \end{cases}$$

cumple

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$

- Existe el $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ si y solo si existen los límites laterales y toman el mismo valor b , es decir si y solo si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b.$$

LÍMITES LATERALES INFINITOS

- Se dice que

$$\lim_{x \rightarrow a^{\pm}} f(x) = +\infty,$$

si cuanto más se aproxima x por la derecha (resp. izquierda) al punto a , $f(x)$ toma valores mayores que cualquier número prefijado.

- Se dice que

$$\lim_{x \rightarrow a^{\pm}} f(x) = -\infty,$$

si cuanto más se aproxima x por la derecha (resp. izquierda) al punto a , $f(x)$ toma valores menores que cualquier número prefijado.

LÍMITES LATERALES INFINITOS

- Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$, se dice que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.
- ...
- En todos los casos anteriores se dice que la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de $f(x)$.

LÍMITES LATERALES EN EL INFINITO

- Se dice que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b,$$

si cuanto mayor es x , $f(x)$ más se aproxima a b .

- Se dice que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b,$$

si cuanto menor es x , $f(x)$ más se aproxima a b .

- Se dice que la gráfica de $f(x)$ tiene la asíntota horizontal $y = b$.
- De manera análoga se definen $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

ÁLGEBRA DE LÍMITES

- Generalmente el cálculo de límites no es fácil, pero se facilita con los resultados siguientes que relacionan el límite con las operaciones de suma, multiplicación y división de funciones.
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = b + c$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = bc$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}, \quad \text{si } c \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = b^c, \quad \text{si todo está bien definido}$$

ÁLGEBRA DE LÍMITES

Si alguno de los límites es infinito, entonces se cumple:

$$a \pm \infty = \pm \infty$$

$$\pm \infty \pm \infty = \pm \infty$$

$$\infty(\pm \infty) = \pm \infty$$

$$\infty a = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0, \\ -\infty & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

$$\frac{a}{\infty} = 0$$

$$\frac{a}{0^+} = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0, \\ -\infty & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

$$a^\infty = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1, \\ 0 & \text{si } 0 < a < 1. \end{cases}$$

$$\infty^a = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0, \\ 0 & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

CÁLCULO DE LÍMITES: INDETERMINACIONES

- Indeterminación $\infty - \infty$.
- Indeterminación $0 \cdot \infty$.
- Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$.
- Indeterminación $\frac{0}{0}$.
- Indeterminación 1^∞ .
- Indeterminación 0^0 .
- Indeterminación ∞^0 .