Cálculo I
Tema 1
1.5. La derivada. Ejemplos y reglas de derivación

Índice

Derivada de una función en un punto

- Una función f definida en un intervalo centrado en x_0, es derivable en x_0 si existe el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

- Este valor $f'(x_0)$ se llama derivada de f es el punto x_0. También se escribe

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)\,, \text{ o también } f'(x) = \frac{df}{dx}(x)\,.$$

Ejemplo

Sea $f(x) = x^2$. En cada punto x_0 se obtiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2x_0 h + h^2}{h} = 2x_0$$

y así $f'(x_0) = 2x_0$.

Se suele escribir $f'(x) = 2x$ para la función $f(x) = x^2$, o también

$$\frac{df}{dx}(x) = 2x, \quad \text{ó } \frac{dx^2}{dx}(x) = 2x.$$

Ejemplo

Si $f(x) = |x|$ y $x_0 = 3$ entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|3 + h| - |3|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3 + h - 3}{h} = 1$$

y si $x_0 = 0$ entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & si \quad h \to 0^+ \\ -1 & si \quad h \to 0^- \end{cases}$$

que no existe.

Interpretación geométrica de la derivada

- La gráfica de la función f es el conjunto de puntos

$$\{(x, f(x)) : x \text{ pertenece al dominio de la función }\}.$$

  También se dice que la gráfica de f es la curva $y = f(x)$.

- Considérense los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ de la gráfica de la función f. La pendiente de la recta (secante a la gráfica de f o secante a la curva $y = f(x)$) que pasa por dichos puntos es

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Interpretación geométrica de la derivada

- Si $h \to 0$, las pendientes de las rectas secantes convergen a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f (o a la curva $y = f(x)$) en el punto $(x_0, f(x_0))$.
- Por tanto, la pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ es

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

- En cada punto $(x_0, f(x_0))$ de la gráfica de una función f, la recta tangente tiene como expresión

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

- Es una recta que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ y que tiene como pendiente $f'(x_0)$.

Interpretación geométrica de la derivada

Por ejemplo, para la función $f(x) = x^2$ se pueden calcular las rectas tangentes en los puntos $(0, 0)$ y en $(2, 4)$

$$\mathbf{r_1} : y = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0) = 0 + 0 \cdot (x - 0) = 0$$
$$\mathbf{r_2} : y = f(2) + f'(2) \cdot (x - 2) = 4 + 4 \cdot (x - 2) = 4x - 4$$

Las rectas tangentes a la gráfica de $y = x^2$ en los puntos $(0, 0)$ y $(2, 4)$ tienen como ecuaciones

$$y = 0$$
$$y = 4x - 4$$

Las funciones elementales se pueden derivar en todo punto de su dominio (excepto x^a, $0 < a < 1$, que no es derivable en $x = 0$).

La siguiente tabla muestra una serie de funciones y sus derivadas (a es una constante):

función	derivada	función	derivada
a	0	x^a	ax^{a-1}
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\log(x)$	$1/x$
$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$	$\cos(x)$	$-\operatorname{sen}(x)$

Reglas de derivación

Además de las derivadas de las funciones elementales, hay una serie de reglas (propiedades de las derivadas) cuya aplicación permite el cálculo de derivadas de expresiones más complejas. Estas reglas son:

- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.
  Así, por ejemplo, $\left(x + x^2 + \operatorname{sen} x\right)' = 1 + 2x + \cos x$.
- $(\alpha f)' = \alpha f'$.
  Por ejemplo, $\left(17x^3\right)' = 17\left(x^3\right)' = 17 \cdot 3x^2 = 51x^2$.

Reglas de derivación

- $$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

  Por ejemplo,

  $$(x \cdot \operatorname{sen} x)' = 1 \cdot \operatorname{sen} x + x \cdot \cos x = \operatorname{sen} x + x \cos x.$$

- $$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

  Ejemplo:

  $$\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)' = \frac{1 \cdot \operatorname{sen} x - x \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x - x \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

Ejemplo

Con estas reglas tan sencillas, y sabiendo derivar las funciones más simples, como las elementales, se pueden derivar expresiones más complejas, como por ejemplo,

$$\left(\frac{e^x - 17x}{x \operatorname{sen} x}\right)' = \frac{(e^x - 17x)' \cdot x \operatorname{sen} x - (e^x - 17x) \cdot (x \operatorname{sen} x)'}{(x \operatorname{sen} x)^2}$$

$$= \frac{(e^x - 17) \cdot x \operatorname{sen} x - (e^x - 17x) \cdot (\operatorname{sen} x + x \cos x)}{(x \operatorname{sen} x)^2}$$

Regla de la cadena

Sean f y g funciones tales que g es derivable en x y f lo es en $g(x)$. Entonces $f \circ g$ es derivable en x y

$$(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Regla de la cadena. Notación

- Considérese la composición de funciones $(z \circ y)(x) = z(y(x))$.
- Derivando respecto de x se obtiene

$$\frac{d(z \circ y)}{dx}(x) = \frac{dz}{dy}(y(x))\frac{dy}{dx}(x) = \left(\frac{dz}{dy} \circ y\right)(x)\frac{dy}{dx}(x).$$

- Si se suprimen los argumentos de las funciones, se tiene

$$\frac{d(z \circ y)}{dx} = \left(\frac{dz}{dy} \circ y\right)\ \frac{dy}{dx}.$$

- Si se suprime la expresión $\circ y$, se tiene

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx},$$

fórmula fácil de recordar.

Regla de la cadena

Por ejemplo,

$$
\begin{aligned}
&\left(\operatorname{sen}\left(x^2\right)\right)' = \cos\left(x^2\right) \cdot 2x \\
&\left(\operatorname{sen}^2 x\right)' = 2 \operatorname{sen} x \cos x \\
&(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))' = \cos(\operatorname{sen} x) \cdot (\cos x) \\
&\left(e^{1+x^2}\right)' = e^{1+x^2} \cdot 2x \\
&(\ln(x + \operatorname{sen} x))' = \frac{1}{x + \operatorname{sen} x} \cdot (1 + \cos x)
\end{aligned}
$$

Crecimiento de una población

- La tasa es un coeficiente que expresa el cociente entre la cantidad y la frecuencia de un fenómeno.
- Sea $f(t)$ el número de individuos de una población (de bacterias) en el tiempo t. Si bien la población es siempre un número entero, normalmente es tan grande que se introduce un error muy pequeño al suponer que $f(t)$ es una función continua.

Aplicaciones de la derivada

- La tasa de crecimiento de la población en el intervalo de tiempo $(t, t+h)$ es

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h},$$

  que puede interpretarse como la velocidad media de crecimiento de la población en el intervalo de tiempo $(t, t+h)$.
- La tasa de crecimiento (instantánea) es

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}.$$

Crecimiento de una población

- Las bacterias se reproducen mediante división celular simple.
- La tasa de crecimiento es proporcional a la población presente. Esta hipótesis es consistente con las observaciones de crecimiento de bacterias.
- Mientras exista espacio suficiente y un buen suministro de alimento para las bacterias, se puede suponer también que la tasa de mortalidad es cero. (Recuerde que en la división celular la célula madre no muere, sino que se convierte en dos nuevas células).
- Un modelo matemático para la población de bacterias que siga las hipótesis anteriores viene definido por

$$f'(t) = af(t), \qquad a > 0.$$

Otros modelos

Las derivadas intervienen en multitud de modelos biológicos:

- El modelo de Lotka-Volterra y los modelos de Gause describen la interacción entre las poblaciones de un depredador y su presa.
- La datación mediante el carbono 14.
- La adsorción y metabolización de compuestos biológicos.
- El crecimiento de tumores o de peces (modelo de Von Bertalanffy)
- La transmisión de información en una neurona (modelo de Hodgkin y Huxley)
- Etc.

Función derivable en un conjunto

Decimos que una función f es derivable en un intervalo (a,b) si es derivable en cada punto $x \in (a,b)$.

Se dice que f es derivable en un conjunto U unión de intervalos abiertos si en cada intervalo en derivable.

Ejemplo

Comprobar que la función $f(x) = |x|$ es derivable en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Derivabilidad y continuidad

Teorema

Si una función f es derivable en un punto x_0, entonces es continua en x_0

Teorema

Sea una función f derivable en un conjunto $(a,b)\backslash\{x_0\}$, continua en x_0 y tal que existen los límites laterales $\lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ y $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$. Entonces f es derivable en x_0 si y sólo si

$$\lim_{x\to x_0^-} f'(x) = \lim_{x\to x_0^+} f'(x).$$