Cálculo I
Tema 1
1.8. Análisis de funciones

Índice

- Dominio.
- Tabla de valores (gráfica) y puntos de corte con los ejes.
- Continuidad, signo, simetrías y periodicidad.
- Diferenciabilidad, monotonía y extremos.
- Asíntotas.
- Concavidad y convexidad.

Asíntotas

- Asíntota vertical: es la recta $x = a$ siempre que

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ó} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty.$$

- Asíntota horizontal: es la recta $y = b$ si

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b.$$

- Asíntota oblicua: es la recta $y = mx + n$ si existen los límites (que se han de calcular en este orden)

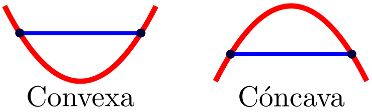
$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx.$$

Concavidad y convexidad

Consideremos una función f continua en un intervalo $[a, b]$.

Decimos que f es **convexa en** $[a, b]$ si dados dos puntos de la gráfica, el segmento que los une está por encima de la gráfica.

Decimos que f es **cóncava en** $[a, b]$ si dados dos puntos de la gráfica, el segmento que los une está por debajo de la gráfica.



Concavidad y convexidad

Si f es dos veces diferenciable en un intervalo (a, b), entonces

1. Si $f''(x) \geq 0$, para todo $x \in (a, b)$, entonces la función es convexa en (a, b).
2. Si $f''(x) \leq 0$, para todo $x \in (a, b)$, entonces la función es cóncava en (a, b).

Los puntos donde cambia la concavidad se denominan **puntos de inflexión**.

Si f es dos veces diferenciable en un punto de inflexión x, entonces $f''(x) = 0$.

Ejemplos

$$\frac{x^2}{1-x^2}, \quad x-\frac{1}{x}, \quad x+\log(1+x^2)$$

$$\sqrt{\frac{1-x^2}{4-x^2}}, \quad e^x-1-x, \quad \frac{\sin(2x)}{2}+1$$