Cálculo I
Tema 1
1.9. Integración de funciones de una variable real

Índice

Índice

Índice

Decimos que una función F es una **primitiva** de f en un intervalo (a,b) si

$$F'(x) = f(x), \quad \text{para todo } x \in (a,b).$$

Por ejemplo, $F(x) = x^2$ es una primitiva de $f(x) = 2x$ en $\mathbb{R}$.

La función $F(x) = x^2 + 1$ también es una primitiva de $f(x) = 2x$ en $\mathbb{R}$.

La función $F(x) = \log(x)$ es una primitiva de $f(x) = 1/x$ en $(0, +\infty)$, al igual que

$$F(x) = \log(2x) = \log(2) + \log(x).$$

Teorema

Si F es una primitiva de f en un intervalo (a,b), entonces todas las primitivas son

$$F(x)+C, \quad C\in\mathbb{R}.$$

Denotamos

$$\int f(x)\,dx,$$

a una primitiva de $f(x)$. También se denomina **integral indefinida** de f.

Ejemplo:

Un coche arranca con aceleración constante $1m/s^2$, es decir, su velocidad es $v(t) = t$. ¿Cuántos metros habrá recorrido en $5s$?

Sea $e(t)$ la posición en el instante t. Como la velocidad es la derivada de la posición, tenemos que $e(t)$ es una primitiva de $v(t)$. Entonces

$$e(t) = \int v(t)\, dt = \frac{t^2}{2} + C.$$

La distancia recorrida en $5s$ será

$$distancia = e(5) - e(0) = \left(\frac{5^2}{2} + C\right) - \left(\frac{0^2}{2} + C\right) = 12{,}5m.$$

Primitivas elementales

- $\int 0\, dx = C$
- $\int k\, dx = kx + C$
- $\int kf(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$
- $\int \left(f(x) + g(x)\right)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$
- $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, si $n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x}\, dx = \log(|x|) + C$
- $\int e^x\, dx = e^x + C$
- $\int \sin\, x\, dx = -\cos\, x + C$
- $\int \cos\, x\, dx = \sin\, x + C$

Primitiva de una función compuesta

Recordemos que

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Entonces, si f y g son funciones derivables,

$$\int f'(g(x))g'(x)\,dx = f(g(x)) + C.$$

Por ejemplo,

$$\int 2xe^{x^2}\,dx = e^{x^2} + C.$$

Ejercicio. Calcular $\int \cos(\sin x)\cos x\,dx$, $\int \frac{\log x}{x}\,dx$.

Cambio de variable

Para obtener primitivas de funciones complejas, donde aparezca la composición de varias funciones, podemos usar la siguiente regla (derivada de la composición de funciones):

$$\int f'(g(x))g'(x)\,dx = \int f'(u)\,du, \qquad \text{donde } u = g(x).$$

Ejercicio. Aplicar el cambio de variable $u = \sqrt{x}$ para calcular la siguiente integral indefinida

$$\int \left(x + \sqrt{x}\right)\,dx.$$

Integración por partes

Recordemos que $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Esta regla se puede reescribir como

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx,$$

o bien

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

Esta regla, se utiliza para simplificar el cálculo de primitivas cuando aparece un producto de funciones.

Ejercicio. Calcular $\int xe^x\,dx$ y $\int \log x\,dx$.

Integración de funciones racionales

Vamos a abordar (parcialmente) el problema de calcular las primitivas de un cociente de polinomios. En primer lugar,

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx = \frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C, \quad \text{si } n \neq 1,$$

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \log|x-a| + C,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x + C.$$

Raíces reales simples

Vamos a integrar un cociente de polinomios en el que el denominador tenga todas sus raíces reales y simples, por ejemplo

$$\int \frac{x^4}{x^3 - x}\, dx.$$

En primer lugar, podemos dividir el numerador entre el denominador, obteniendo como cociente x y como resto x^2, es decir,

$$\frac{x^4}{x^3 - x} = \frac{x(x^3 - x) + x^2}{x^3 - x} = x + \frac{x^2}{x^3 - x}.$$

De este modo, podemos obtener siempre el numerador de grado menor al denominador.

Ahora calculamos las raíces del denominador, que en este caso son 0, 1 y -1, es decir, $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$.

El siguiente paso será dividir la fracción en **fracciones simples**, es decir, de la forma

$$\frac{x^2}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Multiplicando todo por $x^3 - x$ y resolviendo las ecuaciones que nos aparecen (por ejemplo dando a x los valores, 0, 1 y -1), obtenemos que $A = 0$, $B = 1/2$, $C = 1/2$. Es decir,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4}{x^3 - x}\,dx &= \int \left(x + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log|x-1| + \frac{1}{2}\log|x+1| + C. \end{aligned}$$

Raíces reales múltiples

Vamos a integrar un cociente de polinomios en el que el denominador tenga todas sus raíces reales (aunque alguna aparezca más de una vez), por ejemplo

$$\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2}\,dx.$$

Recordemos que, como antes, podemos dividir el numerador entre el denominador, obteniendo como cociente $x-1$ y como resto x^2+1, es decir,

$$\frac{x^4+1}{x^3-x^2} = \frac{(x+1)(x^3-x^2)+x^2+1}{x^3-x} = x+1+\frac{x^2+1}{x^3-x^2}.$$

Ahora calculamos las raíces del denominador, que en este caso son 0, 0 y 1, es decir, $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$.

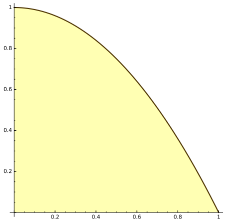
Ahora las fracciones simples a considerar serán de la forma

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}.$$

Multiplicando todo por $x^3 - x^2$ y resolviendo las ecuaciones que nos aparecen, obtenemos que $A = -1$, $B = -1$, $C = 2$. Es decir,

$$\int \frac{x^4+1}{x^3-x}\,dx = \int \left(x + 1 + \frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x-1}\right)dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + x - \log|x| + \frac{1}{x} + 2\log|x-1| + C.$$

Consideremos un intervalo $[a, b]$ y una función (continua) $f(x)$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$.



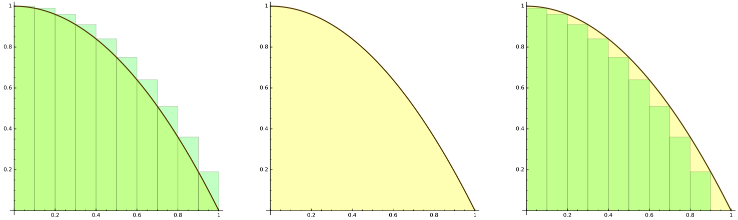
Llamamos **integral definida** de f entre a y b al área limitada entre las rectas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ y la gráfica de la función y la denotamos

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Podemos aproximar la integral definida dividiendo el intervalo en subintervalos de anchura fija, es decir, consideramos $n \in \mathbb{N}$, $h = (b-a)/n$ y los valores

$$x_0 = a, \quad x_k = a + kh, \quad x_n = a + nh = b.$$

Entonces, el área entre x_k y x_{k+1} será aproximadamente el área del rectángulo de base $[x_k, x_{k+1}]$ y altura $f(x_k)$ (ó $f(x_{k+1})$).



La aproximación anterior, a partir de las áreas de rectángulos, nos permite definir la integral definida incluso cuando la función no es positiva.

Concretamente, si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$, definimos la integral definida de f entre a y b como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Con esta definición, la integral de una función negativa es el área comprendida entre las rectas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ y la gráfica de la función, considerada con signo negativo.

Si la función cambia de signo, entonces la integral medirá el área entre la gráfica de la función y el eje x, tomando como de área positiva las regiones donde la función sea positiva y como negativa las regiones donde la función sea negativa.

Teorema (Teorema fundamental del cálculo)

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y F es una primitiva de f en el intervalo $[a, b]$, entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Ejercicio. Calcular el área comprendida entre las rectas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ y la gráfica de la función $f(x) = 1 - x^2$.

Ejercicio. Calcular el área de la región encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 1 - x^2$.

Ejercicio. Calcular el área de las regiones encerradas entre la gráfica de $f(x) = x^3 - x$ y el eje x.

Método del trapecio

Recordemos que podemos aproximar la integral definida dividiendo el intervalo en subintervalos de anchura fija, es decir, consideramos $n \in \mathbb{N}$, $h = (b-a)/n$ y los valores

$$x_0 = a, \quad x_k = a + kh, \quad x_n = a + nh = b.$$

Entonces, el área entre x_k y x_{k+1} será aproximadamente el área del rectángulo de base $[x_k, x_{k+1}]$ y altura $(f(x_k) + f(x_{k+1}))/2$. Es decir:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx \approx & \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right) = \\ & = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right).\end{aligned}$$