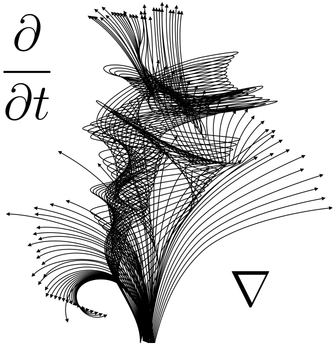
Cálculo I
2.1. Ecuaciones diferenciales

Introducción a las ecuaciones diferenciales



Las primeras ecuaciones diferenciales surgen al tratar de resolver ciertos problemas de Mecánica y Geometría. Hoy en día, constituyen el modelo matemático de numerosos problemas en todas las ciencias y la ingeniería, en particular, en biología.

E.D. AUTÓNOMA DE PRIMER ORDEN

Dada cierta función $f(x)$, queremos obtener la función $x(t)$ tal que

$$x'(t) = f(x(t)).$$

t es la **variable independiente**

$x(t)$ es la **variable dependiente** o función incógnita.

La ecuación se dice de **primer orden** porque sólo aparece la primera derivada de la función incógnita.

La ecuación se denomina **autónoma** porque la variable independiente, t, sólo aparece como argumento de la función x.

Este tipo de ecuaciones modelan problemas de sistemas "autónomos", es decir, que no están influídos por factores externos (o que esa influencia es constante en el tiempo).

E.D. autónoma de primer orden

Supondremos que f es una función continua y con derivada continua.

Las soluciones son todas las funciones $x(t)$ definidas en algún intervalo (a, b) tales que

$$x'(t) = f(x(t)).$$

Admitiremos que $a = -\infty$ o que $b = +\infty$.

Ejemplo

Consideremos la ecuación $x'(t) = x(t)$. Muchas veces se omite la variable t y se escribe

$$x' = x.$$

Tenemos que $f(x) = x$ y las soluciones son $x(t) = Ce^t$.

E.D. autónoma de primer orden

Recordemos que f es una función continua y con derivada continua.

En estas hipótesis, las gráficas de las soluciones no se cortan, es decir, si $x_1(t)$, $x_2(t)$ son dos soluciones distintas, entonces

$$x_1(t) \neq x_2(t) \quad \text{para todo } t \text{ donde estén las dos definidas.}$$

Problema de valor inicial.
Dados t_0, x_0, existe una única función $x(t)$ que verifica

$$x'(t) = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0.$$

E.D. autónoma de primer orden

Ejemplo

La única solución del problema de valor inicial

$$x' = x, \quad x(0) = 1,$$

es $x(t) = e^t$.

La única solución del problema de valor inicial

$$x' = x, \quad x(0) = -1,$$

es $x(t) = -e^t$.

E.D. autónoma de primer orden

Se llama **órbita** de la solución a la imagen, es decir,

$$\operatorname{orb}(x) = \{x(t) \colon t \in (a, b)\}$$

Se llama punto de equilibrio a un valor x_0 tal que $f(x_0) = 0$.

Si x_0 es un punto de equilibrio de $x' = f(x)$, entonces $x(t) = x_0$ es una solución de la ecuación diferencial.

Ejemplo

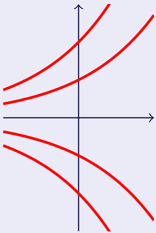
La ecuación $x' = x$ *tiene un punto de equilibrio,* 0. *Luego* $x(t) = 0$ *es solución.*

La ecuación $x' = x^2 - 1$ *tiene dos puntos de equilibrio,* -1, 1. *Luego* $x(t) = 1$ *y* $x(t) = -1$ *son soluciones.*

E.D. autónoma de primer orden

Ejemplo

Gráficas y órbitas de las soluciones de $x' = x$*:*



Ecuaciones autónomas

Vemos cómo resolver una ecuación diferencial autónoma de primer orden,

$$x'(t) = f(x(t)) \Longleftrightarrow \frac{dx}{dt} = f(x(t)).$$

Supondremos que f es una función continua y con derivada continua.

Se dice que x_0 es un **punto de equilibrio** o **crítico**, si $f(x_0) = 0$. Si x_0 es un punto de equilibrio, entonces $x(t) = x_0$ es solución.

Ecuaciones autónomas

Veamos cómo calcular las soluciones que no sean puntos de equilibrio. Consideremos una solución $x(t)$ que tal que $f(x(t)) \neq 0$. Entonces

$$\frac{x'(t)}{f(x(t))} = 1 \Longrightarrow \int \frac{x'(t)\,dt}{f(x(t))} = \int 1\,dt = t + C.$$

Aplicando el cambio de variable $x = x(t)$,

$$\int \frac{dx}{f(x)} = t - C.$$

Despejando x de esa ecuación, obtenemos la solución $x(t)$.

Ecuaciones autónomas

Ejemplo

Veamos cómo son los puntos de equilibrio, órbitas y soluciones de la ecuación

$$x' = ax + b,$$

en función de los distintos valores de a, b.

Ejemplo: Modelo de Malthus

Este modelo fue propuesto en 1798 por el economista y demógrafo Thomas Malthus. Suele ser útil como modelo estimativo para intervalos de tiempo no muy grandes. Se ha usado para el estudio de colonias de bacterias, poblaciones de pequeños mamíferos e incluso para población humana.

Ejemplo: Modelo de Malthus

Consideremos que $p(t)$ es el tamaño de cierta población en el instante t. Según el modelo de Malthus, el crecimiento de la población seguiría un modelo de cierta tasa de crecimiento constante c (diferencia entre la tasa de natalidad y la tasa de mortalidad) y proporcional al tamaño de la población.

$$p'(t) = cp(t)$$

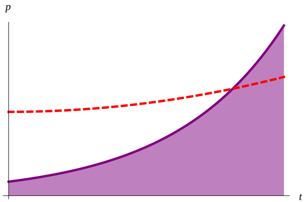
La resolución de esta ecuación son las curvas de la forma

$$p(t) = Ke^{ct}, K > 0$$

donde K es el tamaño de la población en $t = 0$.

Ejemplo: Modelo de Malthus

En la gráfica podemos ver en morado el crecimiento exponencial que predice el modelo de Malthus y en rojo el crecimiento cuadrático de los recursos.



Ley de Newton del enfriamiento

La razón de cambio de la temperatura de un cuerpo en contacto con otro es proporcional a la diferencia de temperatura entre ambos. Si T(t) representa la temperatura del cuerpo en el instante t, T_0 es la temperatura de un medio en contacto con él (que suponemos que no cambia de temperatura) y K es cierta constante, entonces la ley de Newton queda establecida por medio de la ecuación diferencial:

$$T'(t) = K(T_0 - T(t))$$

Las soluciones a esta ecuación son

$$T(t) = T_0 + Ce^{-Kt}$$

Ejemplo: Desintegración radioactiva

Ciertos elementos o sus isótopos son inestables, desintegrándose en isótopos de otros elementos mediante emisión de partículas α, partículas β o fotones. Por ejemplo, un átomo de radio se desintegra en un átomo de radon, emitiendo una partícula α en el proceso, $^{226}\mathrm{Ra} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Rn}$. La desintegración de un único núcleo radiactivo es un proceso aletorio, y el tiempo exacto de desintegración no puede ser determinado con exactitud. Sin embargo pueden hacerse afirmaciones concretas en el proceso de desintegración de un gran número de átomos radiactivos.

Ejemplo: Desintegración radioactiva

La cuestión es: ¿Cuántos núcleos hay en una muestra de un elemento radiactivo en el instante de tiempo t?

En una muestra que contiene un gran número de núcleos radiactivos, la disminución del número de núcleos radiactivos en un intervalo de tiempo pequeño es directamente proporcional a la longitud del intervalo de tiempo y al número de núcleos presente en el tiempo inicial.

Si denotamos por $x(t)$ el número de núcleos radiactivos en el tiempo t y el intervalo de tiempo por h, la ley se traduce en

$$x(t+h) - x(t) = -ax(t)h,$$

donde a es la constante estrictamente positiva de proporcionalidad.

Ejemplo: Desintegración radioactiva

Si dividimos ambos lados de $x(t+h) - x(t) = -ax(t)h$, entre h y tomamos límite cuando $h \to 0$, obtenemos

$$x'(t) = -ax(t).$$

La velocidad de desintegración del elemento radiactivo es directamente proporcional a la cantidad de materia disponible. Las soluciones a esta ecuación son de la forma

$$x(t) = Ce^{-at}.$$

Ejemplo: Modelo Logístico

El Modelo de Malthus implica que multitud de factores no sean tenidos en cuenta, de hecho es un modelo extremadamente simple. Una sustancial mejora en las suposiciones del modelo de Malthus viene dada por el Modelo Logístico, propuesto por el matemático belga P. F. Verhulst en 1836.

Ejemplo: Modelo Logístico

Consideremos, de nuevo, que $p(t)$ es el tamaño de cierta población en el instante t. El modelo de Verhulst asume que la tasa de crecimiento disminuye cuando la población se acerca al nº máximo de individuos que admite el medio.

La ecuación propuesta es

$$p'(t) = cp(t)\left(1 - \frac{p(t)}{K}\right)$$

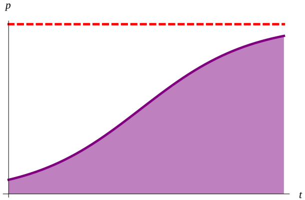
donde c es la tasa de crecimiento (con recursos ilimitados) y K la capacidad del sistema.

Ejemplo: Modelo logístico

Las soluciones del modelo de Verhulst son

$$p(t) = \frac{Kp_0e^{ct}}{K + p_0\left(e^{ct} - 1\right)}.$$

En la gráfica podemos ver en morado el crecimiento logístico que predice el modelo de Verhulst y en rojo la capacidad máxima del sistema.



Ejemplo: Modelo Logístico con cosecha

Consideremos, el modelo de Verhulst,

$$p'(t) = cp(t)\left(1 - \frac{p(t)}{K}\right).$$

Podemos modificar ese modelo para introducir una cosecha (o migraciones o cualquier otro factor externo),

$$p'(t) = cp(t)\left(1 - \frac{p(t)}{K}\right) - a(t)$$

donde $a(t)$ es el número de individuos que se están cosechando por unidad de tiempo.

Si $a(t)$ no es una función constante, el modelo es **no autónomo**.

Modelo de Lotka-Volterra (depredador-presa)

Consideremos ahora dos poblaciones x, y (en este caso, medidas en densidad de individuos). La presa crecerá exponencialmente, salvo por la depredación, que supondremos proporcional al producto de las densidades y el depredador créce por la depredación y decrece por mortalidad natural.

$$\begin{cases} x' = \quad Ax - Bxy, \\ y' = -Cy + Dxy \end{cases}$$


Modelo Lotka-Volterra (depredador-presa)

El modelo predice un comportamiento "cíclico" de las poblaciones de depredadores y presas. La paradoja de los pesticidad dice que el uso de pesticidas puede aumentar la población de parásitos.