2. Ejercicios de ecuaciones diferenciales

1. De las siguientes funciones, razonar cuál es solución de la ecuación diferencial $x' = \frac{2}{x}$.

$$x_1(t) = \frac{2}{\sqrt{t}}, \quad x_2(t) = e^{-2t}, \quad x_3(t) = 2\sqrt{t}, \quad x_4(t) = e^{2t}.$$

2. De las siguientes funciones, ¿cuál es solución de la ecuación diferencial $x' = x - 1$? (Pueden ser varias o ninguna) Razonarlo.

$$f_1(t) = e^t + 1, \quad f_2(t) = \big(e^t + 1\big)e^{-t}, \quad f_3(t) = e^t - 1, \quad f_4(t) = -\sqrt{2\,t + 1} - 1.$$

3. De las siguientes funciones, ¿cuál es solución de la ecuación diferencial $x' = x - 2$?

   (a) $x(t) = e^{2t} + 2$
   (b) $x(t) = e^t + 2$
   (c) $x(t) = -\sqrt{-2\,t + 4} - 2$
   (d) $x(t) = e^{2t}$

4. Calcular los puntos críticos y esbozar las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales autónomas.

   (a) $x'(t) = x(t) - 1$
   (b) $x'(t) = 2x(t)$
   (c) $x'(t) = x^2(t) - 1$
   (d) $x'(t) = 1/x(t)$

5. Resolver las siguientes ecuaciones autónomas:

   (a) $x'(t) = \frac{1}{x(t)}$
   (b) $x'(t)/x(t) = 2$
   (c) $x'(t) = x(t) - \frac{1}{x(t)}$
   (d) $x'(t)/x(t) = x(t) + 1$

   (a) $x(t) = \pm\sqrt{2C + 2t}$
   (b) $x(t) = \pm e^{2t+C}$
   (c) $x(t) = \pm\sqrt{e^{2C+2t} + 1}$
   (d) $x(t) = -\frac{e^{C+t}}{e^{C+t} \pm 1}$

6. Resolver los siguientes problemas de valor inicial:

(a) $x'(t) = \frac{1}{x(t)}$, $x(0) = 1$

(b) $x'(t)/x(t) = 2$, $x(0) = -1$

(c) $x'(t) = x(t) - \frac{1}{x(t)}$, $x(0) = 3/2$

(d) $x(t)x'(t) = x(t) + 1$, $x(1) = 2$

> (a) $x(t) = \sqrt{1+2t}$
>
> (b) $x(t) = -e^{2t}$
>
> (c) $x(t) = \sqrt{e^{\log(5/4)+2t} + 1}$
>
> (d) $x(t) = -\frac{e^{\log(2/3)-1+t}}{e^{\log(2/3)-1+t}-1}$

7. Un áfido crece siguendo la ley de crecimiento de Malthus

$$P'(t) = KP(t),$$

donde $P(t)$ es la población infectada que hay en el tiempo t. Si el 1 de marzo se estima que hay 6000 y el 3 de marzo hay 12000 ¿Cuántos habrá el 9 de marzo?

8. Una población de bacterias sigue la ley de crecimiento exponencial o de Malthus. Sabiendo que la concentración inicial es de 1400 bacterias/mm^2 y que una hora después tenemos 2800 bacterias/mm^2, ¿cuántas bacterias habrá a las 3 horas? ¿cuándo se alcanzarán las 44800 bacterias/mm^2?

9. Se sumerge un objeto a $30C$ en el mar que está a $10C$ grados. Sea $T(t)$ la función que describe la temperatura del objeto en cada instante de tiempo. Sabiendo que la ecuación diferencial que describe su temperatura (midiendo la temperatura en grados y el tiempo en horas) es:

$$T'(t) = 2(10 - T(t)).$$

Calcular la temperatura a las dos horas.

10. **Calentamiento y enfriamiento** Según la ley de Newton del enfriamiento, si un objeto a temperatura T se coloca en un medio que se encuentra a la temperatura constante T_M, entonces la razón de cambio de T es proporcional a la diferencia de temperatura $T - T_M$. Esto da lugar a la ED

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_M), \qquad k < 0.$$

Resuelva la ED para T.

Un termómetro que marca 100 grados se coloca en un medio que se encuentra a una temperatura constante de 70 grados. Al cabo de 6 min., el termómetro marca 80 grados. ¿Cuál es la lectura al cabo de 20 min.?

11. **Poblaciones** Sea $p(t)$ la población en el tiempo t. Si bien la población es siempre un número entero, normalmente es tan grande que se introduce un error muy pequeño al suponer que $p(t)$ es una función continua.

   Suponiendo que el crecimiento (o decrecimiento) de la población es directamente proporcional al número de individuos, obtenemos el modelo de Malthus,

$$p'(t) = cp(t),$$

   donde c es una constante. Resolviendo esa ecuación diferencial, obtenemos

$$p(t) = Ke^{ct},$$

   donde K es la población en el instante inicial.

   (a) La población mundial en 2011 fue de $7,1$ miles de millones y en 2017 de $7,7$ miles de millones. Suponiendo que cumpla un modelo de Malthus, determinar los parámetros K, c.
   (b) ¿Cuál será la población estimada por el modelo anterior en 2050?
   (c) ¿Cuándo se doblará la población respecto a 2011?

12. Los núcleos de ^{14}C se desintegran siguiendo la ecuación diferencial

$$x'(t) = -ax(t),$$

   Sabiendo que la vida media del ^{14}C es de, aproximadamente, 5700 años (aproximadamente $-8000 \ln(1/2)$ años), es decir $x(5700) = x(0)/2$, donde $x(t)$ es la solución a la ecuación diferencial.

   (a) Obtenga el valor de a.
   (b) Obtenga la edad de una concha que contiene el 25 % del ^{14}C respecto a la estimada cuando estaba viva (es decir, el valor de t tal que $x(t) = x(0)/4$).

13. Una población de bacterias sigue la ley de crecimiento de Malthus

$$P'(t) = KP(t),$$

   donde $P(t)$ es la población que hay en el tiempo t. Inicialmente se encuentran 6000 bacterias; y al cabo de 2 días hay 12000. ¿Cuántas habrá después de 8 días?

14. Un cuerpo con una temperatura de 100ºC es depositado en un medio donde la temperatura es de 20ºC. A los tres minutos, la temperatura ha bajado a 80ºC. ¿Qué temperatura tendrá a la media hora? ¿Cuánto tardará la temperatura en llegar a 50ºC?

15. La metabolización de un compuesto sigue un modelo

$$c'(t) = -kc(t),$$

   donde $c(t)$ es la concentración del compuesto y k es una constante. Sabiendo que dicha constante para cierto compuesto es de $k = 0,08$ l/h y que la concentración inicial es de 5 mg/l:

(a) calcular la concentración del compuesto a las 4 horas.

(b) ¿A qué hora se habrá metabolizado el 90% del compuesto?

(c) Supongamos que el compuesto es un medicamento y que la concentración mínima para que haga efecto es de $0,25$ mg/l. ¿Cuál es el tiempo máximo antes de tener que administrar otra dosis?

(d) Si queremos administrar una dosis cada ocho horas, ¿Cuál debe ser la dosis inicial?