

Examen Final de Cálculo I.

Grado en Biología; 24 de enero de 2023.

1. Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ 2 & \text{si } x \geq 4. \end{cases}$$

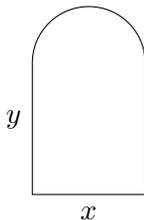
Determinense su dominio, sus puntos de continuidad y de diferenciabilidad y los intervalos donde es creciente y donde es decreciente. (2 puntos)

2. Calcule los siguientes límites

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-5}{x+6} \right)^{-x+3}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-10} - \sqrt{2x^2+5}).$$

(2 puntos)

3. Se considera una ventana como la que se indica en la figura (la parte inferior es rectangular y la superior una semicircunferencia). El perímetro de la ventana mide 5 metros. Halla las dimensiones x y y para que la superficie de la ventana sea máxima. (Expresar los resultados en función de π). (2 puntos)



4. Consideremos las funciones $f(x) = 1 - \cos(x)$ y $g(x) = \sin(x)$. Determinense el área que encierran sus dos gráficas entre 0 y $\pi/2$ (obsérvese que $f(0) = g(0) = 0$ y que $f(\pi/2) = g(\pi/2) = 1$). (2 puntos)
5. Sabemos que la temperatura de un termómetro metido en agua va variando a lo largo del tiempo según la Ley de Newton del enfriamiento: $T'(t) = k(T_\infty - T(t))$, donde k es una constante positiva, $T(t)$ es la temperatura en el instante t y T_∞ es la temperatura del agua.

Sabiendo que la temperatura que registró el termómetro a las 10:00 era de 30°C , que a las 12:00 es de 20°C y que la temperatura del agua es de 10°C , se pide:

- Plantear y resolver el problema de valor inicial que determina la temperatura que registra el termómetro en cada instante.
- Determinar la temperatura que registrará el termómetro a las 14:00.
- Determinar la temperatura que registró el termómetro a las 11:00.

(2 puntos)

Tiempo para el examen: dos horas y media (2:30).