Máster Universitario en Formación del Profesorado de Educación Secundaria.
Fundamentos Científicos del Currículum de Matemáticas I.

FUNCIONES, LÍMITES, CONTINUIDAD, DERIVABILIDAD.

1. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$. Utiliza la definición de límite para, dado $\epsilon = 10^{-3}$, hallar un valor de δ para que se cumpla lo establecido en la definición del límite $\lim_{x \to 3/2} f(x)$.

2. ¿Cuál es el valor de $\lim_{x \to -3} \dfrac{2x^2}{x+2}$? Demuestra que en efecto, ese es el límite; para ello, encuentra una función $\delta = f(\epsilon)$ con la que se obtenga un valor admisible δ para cada ϵ que cumpla el requisito de la definición de límite.

3. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función y a un punto de acumulación de A. Demuestra que si f es continua en a entonces para toda sucesión (x_n) de puntos de A tal que $\lim_{n\to\infty}(x_n) = a$ se cumple que $f(x_n)$ es convergente y $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

4. Demuestra el recíproco del enunciado anterior. Es decir: Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función y a un punto de acumulación de A. Demuestra que si para toda sucesión (x_n) de puntos de A tal que $\lim_{n\to\infty}(x_n) = a$ se cumple que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$, entonces f es continua en a. O, lo que es equivalente, si f no es continua en a entonces existe una sucesión (x_n) de puntos de A tal que $\lim_{n\to\infty}(x_n) = a$ y la sucesión $f(x_n)$ no converge a $f(a)$.

5. Sean las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 \quad \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad x > 0 \\ 0 \quad \text{si} \quad x = 0 \\ -1 \quad \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Consideramos las funciones que se obtienen componiendo dichas funciones: $h_1 = f \circ g : x \to f(g(x))$ y $h_2 = g \circ f : x \to g(f(x))$.

a) Analizar la existencia de los siguientes límites y en caso de existencia, calcularlos:

$$\lim_{x\to 0^+} h_1(x), \quad \lim_{x\to 0^+} h_2(x), \quad \lim_{x\to 0^-} h_1(x), \; \lim_{x\to 0^-} h_2 f(x)$$

b) Analizar la continuidad de las funciones h_1 y h_2 para $x \in \mathbb{R}$.

6. Sea f una función real de variable real y sea a un punto interior del dominio de definición de f. Diremos que f es absolutamente derivable en a si la función $|f|$ es derivable en a. Estudiar si son ciertas o no las siguientes proposiciones:

a) Si f es absolutamente derivable en a, entonces f es continua en a.

b) Si f es derivable en a, entonces f es absolutamente derivable en a.

c) Si f es absolutamente derivable en a, y $f(a) = 0$ entonces f es derivable en a.

d) Si f y g son absolutamente derivables en a entonces $f \cdot g$ es absolutamente derivable en a.

7. Sea f una función real de variable real y sea a un punto interior del dominio de definición de f. Diremos que f es absolutamente derivable en a si la función $|f|$ es derivable en a. Estudiar si son ciertas o no, las siguientes proposiciones:

a) Supongamos que $f(a) = 0$ y que f es derivable en a. Entonces f es absolutamente derivable en a si y sólo si $f'(a) = 0$.

b) Si f y g son absolutamente derivables en a entonces $f + g$ es absolutamente derivable en a.

8. Dada un función real de variable real $f(x)$, se define la *derivada simétrica*, $f'_s(a)$ en un punto a mediante:
$$f'_s(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$$
a) Estudiar si existe la derivada $f'_s(0)$ de las funciones:
$f(x) = |x|, \quad f(x) = \operatorname{sen} x$
b) Demostrar que si existe la derivada ordinaria $f'(a)$ de la función f en el punto a, entonces existe la derivada simétrica $f'_s(a)$, y hallar la relación entre ambas. Enunciar el recíproco y estudiar su validez, dando una demostración o construyendo un contraejemplo.

9. Dada un función real de variable real $f(x)$, se define la *derivada simétrica*, $f'_s(a)$ en un punto a mediante:
$$f'_s(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$$
a) Estudiar si existe la derivada $f'_s(0)$ de las funciones:
$$f(x) = \sqrt{|x|}, \quad f(x) = \mathrm{e}^x, \quad f(x) = \begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x}, & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 \quad \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$
b) Demostrar que si existen las derivadas a la derecha y a la izquierda $f'_+(a)$ y $f'_-(a)$ de la función f en el punto a, entonces existe la derivada simétrica $f'_s(a)$ y hallar la relación entre ambas. Enunciar el recíproco y estudiar su validez, dando una demostración ó construyendo un contraejemplo.

10. Se considera la función[1]:
$$f(x) = \begin{cases} \exp(x^2-1) + \cos\pi x - 4x & \text{si} \quad x < 1 \\ x\,\log\left(x^2 - x + 1\right) - 3x & \text{si} \quad x \geq 1. \end{cases} \tag{1}$$
   a Hallar la función derivada $f'(x)$, en todos los puntos donde exista y analizar la continuidad de $f'(x)$.
   b Estudiar el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ en $\mathbb{R}$ así como la existencia de máximos y mínimos relativos.
   c Determinar el número de soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ y hallar intervalos que contengan una única raíz de esa ecuación.

11. Dada la función
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} + x^2 - 1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ e^{x^2} + x^2 + 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$
   a Hallar la función derivada $f'(x)$ de $f(x)$ ¿Es continua $f'(x)$? Si no lo es, ¿qué tipo de discontinuidad tiene?
   b Analizar el crecimiento, decrecimiento y puntos extremos de $f(x)$.

12. Se considera la función $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = e^{x-1} + x^3 + x + \frac{\operatorname{sen}\pi x}{\pi} - 1$$
   a) Analizar el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. Hallar el mayor intervalo sobre el que se puede definir la función f^{-1}.

[1] log significa logaritmo neperiano.

b) Hallar un intervalo donde la ecuación $f(x) = 0$ tenga solución. ¿Cuántas soluciones existen de esta ecuación?

c) Calcular si es posible $(f^{-1})'(2)$

13. Sea g una función dos veces derivable en todo $\mathbb{R}$ y tal que $g(0) = g'(0) = 0$ y $g''(0) = 2$. Consideremos la función
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 \quad \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$
Calcular $f'(0)$.

14. Analizar la existencia de derivadas sucesivas para todo valor de $x \in \mathbb{R}$ de las funciones
$$f(x) = |x|^3; \quad g_n(x) = |x|^n \operatorname{sen}(1/x),\ x \neq 0,\ g_n(0) = 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

15. Se define la función $f(x) = \exp(-1/x)$ si $x > 0$ y $f(x) = 0$ si $x \leq 0$. Probar que f es continua para todo valor de x. Calcular las derivadas f', f'', f''' en $x = 0$. Probar que la derivada n-ésima de f para $x > 0$ es de la forma:
$$\frac{\exp(-1/x)}{x^{2n}} P_n(x)$$
donde $P_n(x)$ es un polinomio. Deducir que en $x = 0$ existen las derivadas sucesivas de f y todas valen cero.

16. Dada la función
$$f(x) = \begin{cases} xe^x + 1 & \text{si} \quad x \leq 0. \\ \dfrac{x^3}{3} + ax^2 + bx + c & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$
Hallar los valores de a, b y c para que la función sea continua y derivable para todo $x \in \mathbb{R}$ y tenga un extremo (máximo o mínimo) en $x = 2$. Estudiar el crecimiento, decrecimiento, máximos mínimos absolutos y relativos de $f(x)$ en el intervalo $[-2, 3]$.

17. Dada la función
$$f(x) = \begin{cases} \left(4x - \dfrac{x^2}{2}\right) \log|x| - \dfrac{x^2}{4} & \text{si} \quad x \neq 0. \\ 0 \quad \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$
Analizar si $f(x)$ tiene derivada en todo punto. Escribir la función derivada. Estudiar el crecimiento y decrecimiento y hallar los máximos y mínimos relativos de $f(x)$. Determinar el número de soluciones de la ecuación $f(x) = 0$.

18. Dada la función
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{1 + x^2} & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 2 \\ x^3 - bx^2 + 13 & \text{si} \quad 2 < x \leq 4. \end{cases}$$
a) Halla la relación que hay entre a y b si se sabe que f es continua en $[-2,\ 4]$.

b) Teniendo en cuenta el apartado anterior, hallar los valores de a y b si se sabe que la función es derivable en $(-2,\ 4)$.

c) Calcula $f'(x)$ y estudia el crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos absolutos y relativos de f en el intervalo $[-2, 4]$.

19. Considera una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades:

i) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ para cualesquiera x_1, x_2.
ii) $f(0) \neq 0$.
iii) $f(x)$ es derivable en 0 y $f'(0) = 1$.

(a) Demuestra que $f(0) = 1$.

(b) Demuestra que $f(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(c) Utilizando la definición de derivada, prueba que $f(x)$ es derivable y $f'(x) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(d) Sea g otra función que satisface las condiciones i, ii, y iii, y considera la función:

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Demuestra que $k(x)$ es derivable en todo $\mathbb{R}$ y obtén $k'(x)$. ¿Qué relación hay entre f y g?

(e) ¿Conoces alguna función f que satisfaga las condiciones i, ii y iii? ¿Puede haber más de una?

20. Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables en todo $\mathbb{R}$ y tales que:

 1) $f(0) = 1$, $g(0) = 0$
 2) $f'(x) = -g(x)$, $g'(x) = f(x)$

 a) Sea $h(x) = f^2(x) + g^2(x)$. Calcula $h'(x)$ y utiliza el resultado obtenido para probar que $f^2(x) + g^2(x) = 1$.

 b) Sean $F(x)$ y $G(x)$ otras funciones derivables en todo $\mathbb{R}$ que cumplen las condiciones **1)** y **2)**. Considera la función $k(x) = (f(x) - F(x))^2 + (g(x) - G(x))^2$. Calcula $k'(x)$ y utiliza el resultado obtenido para decidir la relación que existe entre $f(x)$ y $F(x)$ y entre $g(x)$ y $G(x)$.

 c) ¿Conoces algún par de funciones f y g que satisfagan **1)** y **2)**? ¿Puede haber otras?

21. Se considera la función $f(x) = 3x^4 - 11x^2 + x + 2$. Utilizando los teoremas de las funciones continuas en un intervalo y los teoremas de las funciones continuas y derivables en intervalos, se pide:

 a) Hallar intervalos donde la función $f(x)$ tiene un extremo y analizar si es un máximo o un mínimo.
 b) Hallar los puntos donde $f(x)$ tiene pendiente máxima y pendiente mínima.

22. Demostrar que la función $f(x) = x^n + px + q$ con $n \geq 2$ entero y p, q reales no puede tener más de dos soluciones reales cuando n par, ni más de tres cuando n impar.

23. Determina el valor del número real k para que exista y sea finito el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} + kx}{x - \operatorname{sen}(x)}$$

 Calcula el límite para ese valor de k.

24. Sea $f : [3, 5] \to R$ una función continua que es derivable en $(3, 5)$ y tal que $f(3) = 6$ y $f(5) = 10$.

 (a) Consideremos la función $g : [3, 5] \to R$ definida por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. Demostrar que existe un $c \in (3, 5)$ tal que $g'(c) = 0$. Deducir que $f'(c)c - f(c) = 0$.

 (b) Demostrar que entre todas las rectas tangentes a la gráfica de f, al menos una de ellas pasa por el origen de coordenadas.

 (c) Sea $[a, b]$ un intervalo que no contiene al 0. Sea $h : [a, b] \to R$ una función continua que es derivable en (a, b) tal que $\dfrac{h(a)}{a} = \dfrac{h(b)}{b}$. Demostrar que existe un $x_0 \in (a, b)$ tal que la tangente a la gráfica de h en el punto $(x_0, h(x_0))$ pasa por $(0, 0)$.

25. Demostrar que cualesquiera que sean los números reales $x < y$ se cumple que $cos(y) - cos(x) \leq y - x$.

26. Demuestra que la ecuación $e^x + x^3 = 0$ tiene una y sólo una solución real. Enuncia los teoremas que utilices para demostrarlo.

27. Se considera la función $f(x)$ definida en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x \log |x| & \text{si} \quad x \neq 0. \\ 0 \quad \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

a) Demuestra que $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Estudia la derivabilidad de $f(x)$.

c) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y los extremos relativos.

d) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x)$ y los puntos de inflexión.

e) Estudia el signo de $f(x)$, los puntos de corte de la gráfica con el eje OX, y representa, de manera aproximada, la gráfica de $f(x)$, utilizando los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

28. Se considera la función $f(x)$ definida en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si} \quad |x| \leq 1 \\ \frac{1}{|x|} \quad \text{si} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

a) Calcular los valores de a, b y c para que la función sea continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

Para los valores de a, b y c obtenidos:

b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y los extremos relativos.

c) La función derivada $f'(x)$ ¿es a su vez derivable en todo $\mathbb{R}$? Justifica la respuesta.

d) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x)$ y los puntos de inflexión.

e) Calcula $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y representa, de manera aproximada, la gráfica de $f(x)$.