Ejercicios para la segunda entrega

1. Derivación

Ejercicio 1.1. Se considera la función $f(x) = 3x^4 - 11x^2 + x + 2$. Utilizando los teoremas de las funciones continuas en un intervalo y los teoremas de las funciones continuas y derivables en intervalos, se pide:

1. Hallar intervalos donde la función $f(x)$ tiene un extremo y analizar si es un máximo o un mínimo.
2. Hallar los puntos donde la pendiente de $f(x)$ alcanza máximo y mínimo locales.

Ejercicio 1.2. Demostrar que la función $f(x) = x^n + px + q$ con $n \geq 2$ entero y p, q reales no puede tener más de dos soluciones reales cuando n par, ni más de tres cuando n impar.

Ejercicio 1.3. Determina el valor del número real k para que exista y sea finito el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - \exp(-x) + kx}{x - \operatorname{sen}(x)}$$

Calcula el límite para ese valor de k.

Ejercicio 1.4. Sea $[a, b]$ un intervalo que no contiene al 0. Sea $h : [a, b] \to R$ una función continua que es derivable en (a, b) tal que $\dfrac{h(a)}{a} = \dfrac{h(b)}{b}$. Demostrar que existe un $x_0 \in (a, b)$ tal que la tangente a la gráfica de h en el punto $(x_0, h(x_0))$ pasa por $(0, 0)$.

Ejercicio 1.5. Se considera la función $f(x)$ definida en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si} \quad |x| \leq 1 \\ \frac{1}{|x|} & \text{si} \quad |x| > 1. \end{cases} .$$

1. Calcular los valores de a, b y c que hacen que f sea continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.
2. ¿Es la función $f'(x)$ derivable en todo $\mathbb{R}$? Justifica la respuesta.

Ejercicio 1.6. Justificar si es cierta la siguiente afirmación (demostrarla o poner un contraejemplo):

• Si una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en todo $\mathbb{R}$ y tiene derivada positiva en todos los puntos salvo finitos, entonces es estrictamente creciente en todo punto.

Ejercicio 1.7. Justificar si es cierta la siguiente afirmación (demostrarla o poner un contraejemplo):

• Si una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y sabemos que es estrictamente creciente en todos los puntos salvo finitos, entonces es estrictamente creciente en todo punto.

Ejercicio 1.8. Justificar si es cierta la siguiente afirmación (demostrarla o poner un contraejemplo):

• Si una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida en todo $\mathbb{R}$ y sabemos que es estrictamente creciente en todos los puntos salvo finitos, entonces es estrictamente creciente en todo punto.

Ejercicio 1.9. Si una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente en todo punto, entonces dada cualquier $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, los máximos y los mínimos (relativos y absolutos) de $f \circ g$ se alcanzan en los mismos puntos que los de g. De hecho, $f \circ g$ es creciente en x si y sólo si lo es g.

• Comprobarlo para $f(x) = \exp(x);\ g(x) = x^3 - 3x + 2$.

Ejercicio 1.10. Si una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente en todo punto, entonces dada cualquier $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, los máximos y los mínimos (relativos y absolutos) de $f \circ g$ se alcanzan en los mismos puntos que los de g. De hecho, $f \circ g$ es creciente en x si y sólo si lo es g.

• Comprobarlo para $f(x) = x^3 + x + 1;\ g(x) = \operatorname{sen}(x)$.

Ejercicio 1.11. Si una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente en todo punto, entonces dada cualquier $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, los máximos y los mínimos (relativos y absolutos) de $f \circ g$ se alcanzan en los mismos puntos que los de g. De hecho, $f \circ g$ es creciente en x si y sólo si lo es g.

• Utilizar esto para encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de

$$(\operatorname{arc\,tg}(-\exp(x^3 - x + 2)))^5$$

sin hacer muchas cuentas, pero indicando las derivadas de las funciones que estamos componiendo.

Ejercicio 1.12. Si una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente en todo punto, entonces dada cualquier $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, los máximos y los mínimos (relativos y absolutos) de $f \circ g$ se alcanzan en los mismos puntos que los de g. De hecho, $f \circ g$ es creciente en x si y sólo si lo es g.

• Poner un ejemplo de que si la función f es creciente pero no estrictamente, entonces los intervalos de crecimiento y decrecimiento de g y de $f \circ g$ no tienen por qué coincidir.

• Poner un ejemplo de que si f no está definida en todo $\mathbb{R}$, entonces los máximos de g y de $f \circ g$ tampoco tienen por qué coincidir.

Ejercicio 1.13. Si una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente en todo punto de su dominio y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cumple que $f \circ g$ está definida en todo B, entonces los máximos y los mínimos (relativos y absolutos) de $f \circ g$ se alcanzan en los mismos puntos que los de g. De hecho, $f \circ g$ es creciente en x si y sólo si lo es g.

• Utilizando esto, ¿podemos encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de $\log(\operatorname{arc\,tg}(x^4 - x^2 + 2))$? Encontrarlos como se pueda.

Ejercicio 1.14. Si una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente en todo punto de su dominio y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cumple que $f \circ g$ está definida en todo B, entonces los máximos y los mínimos (relativos y absolutos) de $f \circ g$ se alcanzan en los mismos puntos que los de g. De hecho, $f \circ g$ es creciente en x si y sólo si lo es g.

• Utilizando esto, ¿podemos encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de $\log(\operatorname{arc\,tg}(x^3 - x))$? Encontrarlos como se pueda.

Ejercicio 1.15. Si una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente en todo punto de su dominio y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cumple que $f \circ g$ está definida en todo B, entonces los máximos y los mínimos (relativos y absolutos) de $f \circ g$ se alcanzan en los mismos puntos que los de g. De hecho, $f \circ g$ es creciente en x si y sólo si lo es g.

• Utilizando esto, ¿podemos encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de $\sqrt{\operatorname{arc\,tg}(x^3 - x)}$? Encontrarlos como se pueda.

Ejercicio 1.16. Si una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente en todo punto de su dominio y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cumple que $f \circ g$ está definida en todo B, entonces los máximos y los mínimos (relativos y absolutos) de $f \circ g$ se alcanzan en los mismos puntos que los de g. De hecho, $f \circ g$ es creciente en x si y sólo si lo es g.

• Utilizando esto, ¿podemos encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de $\sqrt{\operatorname{arc\,tg}(x^4 - x^2 + 2)}$? Encontrarlos como se pueda.

Ejercicio 1.17. Determinar los valores $c \in [-3, 4]$ que cumplen el Teorema de Valor medio para la función $f(x) = x^3 - x^2 + x + 8$.

Acompañar de algún dibujo que lo relacione con el Teorema de Rolle (no necesariamente hecho a mano).

Ejercicio 1.18. Determinar los valores $c \in [-1, 1]$ que cumplen el Teorema de Valor medio para la función $f(x) = x^3 - 3$.

Acompañar de algún dibujo que lo relacione con el Teorema de Rolle (no necesariamente hecho a mano).

Ejercicio 1.19. Determinar los valores $c \in [-2, 4]$ que cumplen el Teorema de Valor medio para la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x) + x^2 + 2$.

Acompañar de algún dibujo que lo relacione con el Teorema de Rolle (no necesariamente hecho a mano).

Ejercicio 1.20. Determinar los valores $c \in [0, 4]$ que cumplen el Teorema de Valor medio para la función $f(x) = x^4 - 4x^2 + \pi$.

Acompañar de algún dibujo que lo relacione con el Teorema de Rolle (no necesariamente hecho a mano).

Ejercicio 1.21. Determinar los valores $c \in [0, 3]$ que cumplen el Teorema de Valor medio para la función $x^4 - 3x^2 + \sqrt{\pi}$.

Acompañar de algún dibujo que lo relacione con el Teorema de Rolle (no necesariamente hecho a mano).

2. Integración

Ejercicio 2.1. Determinar la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{x^3 + x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2}\, \mathrm{d}x.$$

Ejercicio 2.2. Determinar la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{2x + 5}{(x^2 - 2)^2}\, \mathrm{d}x.$$

Ejercicio 2.3. Determinar la siguiente integral indefinida (utilizando integración por partes):

$$\int x^3 \exp(2x)\, \mathrm{d}x.$$

Ejercicio 2.4. Determinar la siguiente integral indefinida (utilizando integración por partes):

$$\int x^2 \cos(2x)\, \mathrm{d}x.$$

Ejercicio 2.5. Determinar la siguiente integral indefinida (utilizando integración por partes):

$$\int x^2 \operatorname{sen}(2x)\, \mathrm{d}x.$$

Ejercicio 2.6. Determinar la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - x}{x^2 + x - 2}\, \mathrm{d}x.$$

Ejercicio 2.7. Determinar la siguiente integral indefinida:

$$\int x\sqrt{x - 3}\, \mathrm{d}x.$$

Ejercicio 2.8. Determinar la siguiente integral indefinida utilizando el cambio de variable $u = \operatorname{sen}(x)$:

$$\int \frac{3\cos(x)}{\operatorname{sen}^3(x) + 2cos^2(x)\operatorname{sen}(x)}\, \mathrm{d}x.$$

Ejercicio 2.9. Determinar la siguiente integral indefinida utilizando el cambio de variable $u = \cos(x)$:

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\, \mathrm{d}x.$$

Indicación: En algún momento puede venir bien saber que $\operatorname{sen}(\arccos(t)) = 1/\sqrt{1 - t^2}$.

Ejercicio 2.10. Partimos de que

$$\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}. \tag{1}$$

Dados $b > 0$ y $n = 1, 2, 3, 4$ hallar el área que queda debajo de la poligonal que coincide con $f(x) = x^2$ en los puntos

$$(0 = x_0, x_1 = b/2^n, x_2 = 2b/2^n, \ldots, b = x_{2^n})$$

de manera exacta y aproximada. Deducir que $\int_0^b x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{b^3}{3}$.

Ejercicio 2.11. Determinar la siguiente integral definida

$$\int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \, \mathrm{d}x.$$

Ejercicio 2.12. Determinar la siguiente integral definida

$$\int_0^1 x\sqrt{2x-1} \, \mathrm{d}x.$$

Ejercicio 2.13. Determinar la siguiente integral definida

$$\int_1^2 \exp(x^2)x \, \mathrm{d}x.$$

Ejercicio 2.14. Determinar la siguiente integral definida (utilizando integración por partes):

$$\int_0^1 x^2 \exp(2x) \, \mathrm{d}x.$$

Ejercicio 2.15. Determinar la siguiente integral definida (utilizando integración por partes):

$$\int_0^1 x \cos(2x) \, \mathrm{d}x.$$

Ejercicio 2.16. Determinar la siguiente integral definida (utilizando integración por partes):

$$\int_0^1 x \operatorname{sen}(2x) \, \mathrm{d}x.$$

Ejercicio 2.17. Determinar la siguiente integral definida

$$\int_{-2}^3 \exp(x^2)x \, \mathrm{d}x.$$

Ejercicio 2.18. Determinar la siguiente integral definida

$$\int_{-2}^{3} x(x^2+1)^5 \, \mathrm{d}x.$$

Ejercicio 2.19. Determinar la siguiente integral definida

$$\int_{-2}^{3} |x^2-3x+2| \, \mathrm{d}x.$$

Ejercicio 2.20. Determinar la siguiente integral

$$\int_{-x}^{x} |t^2-1| \, \mathrm{d}x, \quad x \in (0,\infty).$$

Ejercicio 2.21. Determinar la siguiente integral

$$\int_{-x}^{x} |\operatorname{sen}(t)| \, \mathrm{d}x, \quad x \in (0,7).$$