Tema 4: Los números reales

Introducción

En el tema 2 de esta asignatura, a partir de los números naturales, con sus operaciones y su orden, que suponemos conocidos, así como las propiedades que éstos satisfacen, y utilizando la teoría de conjuntos, se construyeron los números enteros y a partir de ellos los racionales, de manera que cada enunciado sobre números racionales o sobre números enteros se puede reducir a un enunciado sobre los números naturales.

Nuestro objetivo en este tema es construir el cuerpo de los números reales a partir de los números racionales. Al construir los números reales a partir de los racionales, todo enunciado sobre números reales queda reducido a un enunciado sobre los números naturales.

Definiremos los números reales como clases de equivalencias de sucesiones de Cauchy de números racionales. Esta construcción es la que aparece en los textos [2] y [3].

Otra vía para definir los números reales es la de las cortaduras de Dedekind (subconjuntos de números racionales que satisfacen ciertas propiedades), que puede consultarse en [1].

Es muy frecuente introducir los números reales de forma axiomática, en la forma que exponemos a continuación, que consiste en definir los números reales como un cuerpo ordenado (Axiomas del I al VII) que satisface además un octavo axioma, de completitud, que lo caracteriza, es decir, puede probarse que un cuerpo que satisfaga estos axiomas es único (salvo isomorfismos). Una prueba de la unicidad puede consultarse en el capítulo 29 de [5] o en [3].

Cualquier propiedad del cuerpo de los números reales se deduce exclusivamente de estos axiomas. En este tema daremos una construcción del cuerpo de los números reales a partir de los racionales y comprobaremos que se cumplen los axiomas.

Definición axiomática de los números reales

Se llama conjunto de los números reales a un conjunto $\mathbb{R}$ en el que están definidas dos operaciones, llamadas suma y producto:

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R} \xrightarrow{+} \mathbb{R}\ (x,y)\mapsto x+y, \qquad \mathbb{R}\times\mathbb{R} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{R}, \quad (x,y)\mapsto x\cdot y$$

que satisfacen los siguientes axiomas.

Axioma I. Propiedades conmutativas: para todo par de elementos $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$x + y = y + x, \quad x \cdot y = y \cdot x$$

Axioma II. Propiedades asociativas: para toda terna de elementos $x, y, z \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$x + (y + z) = (x + y) + z, \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

Axioma III. Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma: para toda terna de elementos $x, y, z \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$x(y + z) = xy + xz$$

Axioma IV. Existencia de elementos neutros: existen en $\mathbb{R}$ dos elementos distintos, que se denotan 0 y 1 tales que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$x + 0 = 0 + x = x, \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = 1$$

Axioma V. Existencia de elemento opuesto para la suma y de inverso para el producto:

a) Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un elemento $y \in \mathbb{R}$ tal que

$$x + y = y + x = 0$$

Puede probarse que para cada x este elemento es único. Se denota $-x$.

b) Para cada $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, existe un elemento $y \in \mathbb{R}$ tal que

$$xy = yx = 1$$

Puede probarse que para cada $x \neq 0$ este elemento es único. Se denota x^{-1}.

Estos cinco axiomas son los que definen la estructura algebraica de cuerpo conmutativo. De manera que, en esta definición axiomática, el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es un cuerpo conmutativo.

Axiomas de orden.

Los dos siguientes axiomas son los de orden.

$\mathbb{R}$ contiene un subconjunto, que se denota P ó $\mathbb{R}^+$, se llama parte positiva de $\mathbb{R}$, y sus elementos se llaman positivos, cumpliendo las siguientes propiedades:

Axioma VI. Propiedad de tricotomía: cada elemento $x \in \mathbb{R}$ satisface una y solo una de las siguientes posibilidades:

$$x \in P; \qquad x = 0, \qquad -x \in P$$

Es decir, los subconjuntos $\{0\}$, P y $-P = \{x \in \mathbb{R} : -x \in P\}$ forman una partición de $\mathbb{R}$.

Axioma VII. Estabilidad de las operaciones: si $x, y \in P$ entonces

$$x + y \in P, \qquad xy \in P.$$

A partir de estos axiomas se define en $\mathbb{R}$ una estructura de orden: $x \leq y$ si $x = y$ o si $y - x \in P$ y se prueba que este orden es compatible con la suma ($x < y \implies x + z < y + z, \forall z$) y el producto ($x < y,\ z > 0, \implies xz < yz$). Así, $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado. Los números racionales, $\mathbb{Q}$ forman también un cuerpo ordenado.

La diferencia sustancial entre $\mathbb{R}$ y el resto de cuerpos ordenados radica en la propiedad de la completitud, que se recoge en el último axioma.

Axioma VIII. De completitud de Dedekind. Si A y B son subconjuntos que forman una partición de $\mathbb{R}$ tal que $a < b$ para cada $a \in A$ y $b \in B$, entonces existe un número real $c \in \mathbb{R}$ (que es único) que cumple:

- si $x \in \mathbb{R}$ y $x < c$ entonces $x \in A$
- si $x \in \mathbb{R}$ y $x > c$ entonces $x \in B$.

Es decir,

- o bien $A = \{x \in R : x \leq c\}$ y $B = \{x \in R : x > c\}$;
- o bien $A = \{x \in R : x < c\}$ y $B = \{x \in R : x \geq c\}$.

1. Construcción de los números reales

1.1. El anillo de las sucesiones

A lo largo de esta sección A será un anillo conmutativo y con unidad, es decir, un conjunto en el que se han definido dos operaciones internas,

$$+ : A \times A \longrightarrow A, \ \ (a, b) \mapsto a + b, \quad \cdot : A \times A \longrightarrow A, \ \ (a, b) \mapsto a \cdot b$$

que cumplen las propiedades asociativa, conmutativa, existencia de elemento neutro, que denotaremos por 0 para la operación suma, $+$ y por 1 para la operación producto, $\cdot$, todo elemento a tiene opuesto para la suma, $-a$, y el producto es distributivo respecto de la suma $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Definición 1.1. Una sucesión de elementos de A es una aplicación $x : \mathbb{N} \to A$, $x(n) = x_n$.

Es habitual representar una sucesión mediante su imagen $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n)_n = (x_n)$. En adelante, utilizaremos cualquiera de estas notaciones.

Denotaremos por $\mathscr{S}(A)$, o simplemente por $\mathscr{S}$ si no hay lugar a confusión, al conjunto de las sucesiones de elementos de A. En $\mathscr{S}$ se definen las operaciones suma y producto:

$$(x_n) + (y_n) := (x_n + y_n), \quad (x_n) \cdot (y_n) := (x_n \cdot y_n)$$

Es sencillo comprobar que la suma y el producto de sucesiones de elementos de A dotan a $\mathscr{S}$ de estructura de anillo conmutativo, en el que el elemento neutro para la suma es la sucesión constante cero, $(0) = (0,0,0,\ldots)$, y el elemento unidad es la sucesión constante uno, $(1) = (1,1,1,\ldots)$.

El anillo $\mathscr{S}$ no es íntegro, es decir existen divisores de cero: las sucesiones $(1,0,1,0,1,0,\ldots)$ y $(0,1,0,1,0,1,\ldots)$ no son nulas y su producto es cero.

Aun en el caso de que el anillo A sea un cuerpo (todo elemento no nulo tiene inverso para el producto), en el anillo de las sucesiones $\mathscr{S}$ no todo elemento no nulo tiene inverso. Por ejemplo, la sucesión $(x_n) = (0,1,0,1,0,1,...)$ no tiene inverso.

1.2. Sucesiones convergentes y sucesiones de Cauchy

Empezaremos recordando el concepto de sucesión convergente y las principales propiedades de las sucesiones convergentes, que como tales no se han probado en clase, por suponerse conocidas, pero sí se han usado. Los conceptos y resultados que veremos para $\mathbb{Q}$ son aplicables a cualquier cuerpo ordenado.

Sucesiones convergentes

Definición 1.2. Se dice que una sucesión (x_n) de números racionales converge a un número racional l y se escribe $\lim_{n\to\infty}(x_n) = l$, o también, $(x_n) \to l$, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \varepsilon \in \mathbb{Q},\ \exists \nu \in \mathbb{N} \ :\ n > \nu \implies |x_n - l| < \varepsilon$$

Esto significa que, dado cualquier valor $\varepsilon > 0$, por pequeño que sea, podemos encontrar un natural ν de manera que todos los términos de la sucesión, x_n cuando $n > \nu$ están en el intervalo $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$.

Ejemplos 1.3.
1. Toda sucesión constante $(x_n) = (a)$ es convergente, y su límite es a.
2. La sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ converge a 0. ¿Qué propiedad de los números racionales se usa para probar esta afirmación?
3. La sucesión $((-1)^n)$ no es convergente.

En la definición de límite de una sucesión interviene el valor absoluto de los números racionales, que se definió en el Tema 2:

$$|x| := \text{máx}\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Así, por definición, para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

y, si $q > 0$ entonces

$$|x| \leq q \iff -q \leq x \leq q.$$

El valor absoluto cumple las siguientes propiedades.

Proposición 1.4. *Para toda pareja x, y de números racionales se cumple que:*
1. $|x| \geq 0$ *y* $|x| = 0 \iff x = 0$.
2. **Desigualdad triangular:** $|x+y| \leq |x| + |y|$.
3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
4. $||x| - |y|| \leq |x+y|$ *y* $||x| - |y|| \leq |x-y|$

Ejercicio 1.5. Compruébese que si una sucesión tiene límite, éste es único.

Recordemos que un subconjunto X de un conjunto ordenado, en este caso $\mathbb{Q}$, está acotado inferiormente si existe $a \in \mathbb{Q}$ que es cota inferior de X, es decir, $a \leq x$, $\forall x \in X$. Análogamente, X está acotado superiormente si existe $b \in \mathbb{Q}$ tal que $x \leq b, \forall x \in X$. Si X está acotado, es decir, si está acotado inferiormente por a y superiormente por b, y llamamos $M = \text{máx}\{|a|, |b|\}$ entonces $X \subseteq [-M, M]$, es decir, $|x| \leq M, \forall x \in X$, pues:

$$-M = -\text{máx}\{|a|, |b|\} \leq -|a| \leq a \leq x \leq b \leq |b| \leq \text{máx}\{|a|, |b|\} = M$$

Obviamente, si $X \subseteq [-M, M]$ entonces X está acotado inferior y superiormente. Concluimos que un subconjunto X de $\mathbb{Q}$ está acotado si y solo existe $M > 0$ tal que $X \subseteq M$. Esta es la forma en la que habitualmente se maneja la acotación de los subconjuntos de $\mathbb{Q}$.

Proposición 1.6. *Toda sucesión convergente es acotada.*

Demostración. Supongamos que $\lim_{n\to\infty}(x_n) = l$. Sea $\varepsilon = 1$. Sabemos que existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - l| < 1$, $\forall n > \nu$, luego:

$$||x_n| - |l|| \leq |x_n - l| < 1,\ \forall n > \nu$$

y por lo tanto, $|x_n| < |l| + 1$, $\forall n > \nu$. De manera que si

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_\nu|, 1 + |l|\},$$

tenemos que $|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.

■

Proposición 1.7. *La suma (respectivamente el producto) de sucesiones convergentes es una sucesión convergente y su límite es la suma (resp. el producto) de sus límites.*

Demostración. Supongamos que $\lim_{n\to\infty}(x_n) = a$ y $\lim_{n\to\infty}(y_n) = b$.

Probemos que $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$:

Dado $\varepsilon > 0$, existen ν_1 y ν_2 en $\mathbb{N}$ tales que:

$$n > \nu_1 \implies |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$n > \nu_2 \implies |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Luego, si $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$, tenemos que si $n > \nu$, entonces:

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Probemos que $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.

En primer lugar, como las dos sucesiones son acotadas, podemos encontrar $M > 0$ tal que $|x_n| < M$ y $|y_n| < M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y, tomando M mayor, si es necesario, podemos suponer también que $|a| < M$

Dado $\varepsilon > 0$, existen ν_1 y ν_2 en $\mathbb{N}$ tales que:

$$n > \nu_1 \implies |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$n > \nu_2 \implies |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Luego, si $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$, tenemos que si $n > \nu$, entonces:

$$|x_n \cdot y_n - a \cdot b| = |x_n \cdot y_n - a \cdot y_n + a \cdot y_n - a \cdot b|$$

$$\leq |x_n \cdot y_n - a \cdot y_n| + |a \cdot y_n - a \cdot b| = |x_n - a| \cdot |y_n| + |a| \cdot |y_n - b|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M = \varepsilon$$

■

Proposición 1.8. *Sea* (x_n) *una sucesión convergente. Si* $\lim_{n\to\infty}(x_n) = l \neq 0$ *y* $x_n \neq 0$. $\forall n \in \mathbb{N}$, *entonces la sucesión* $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$ *es convergente y*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_n}\right) = \left(\frac{1}{l}\right)$$

Demostración. Demuéstrese como ejercicio. ■

Ejercicio 1.9. Si la suma (el producto) de dos sucesiones es una sucesión convergente, ¿son necesariamente las dos sucesiones convergentes?

Sucesiones de Cauchy

Si una sucesión (x_n) es convergente, sus términos se acercan al límite, y por lo tanto, se acercan entre sí. Las sucesiones que tienen esta propiedad son las llamadas sucesiones de Cauchy (o sucesiones fundamentales según [3]).

Definición 1.10. Se dice que una sucesión de números racionales (x_n) es de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}, \exists \nu \in \mathbb{N} \ : \ p, q \geq \nu \implies |x_p - x_q| < \varepsilon$$

Ejemplos 1.11.

1. Toda sucesión constante $(x_n) = (a)$ es de Cauchy-
2. La sucesión $\left(\dfrac{1}{n}\right)_n$ es de Cauchy: dado $\varepsilon > 0$, si tomamos $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $\nu > \varepsilon/2$, tenemos que si $pq \geq \nu$, entonces:

$$\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right| < \frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

3. La sucesión $((-1)^n)$ no es de Cauchy: para cualquier ν existen $p, q \geq$ tales que $|(-1)^p - (-1)^q| = 2$.

Proposición 1.12. *1. Toda sucesión convergente es de Cauchy.*

2. Toda sucesión de Cauchy es acotada.

Demostración.

1. Supongamos que $\lim_{n\to\infty}(x_n) = l$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que si $n < \nu$ entonces$|x_n - l| < \varepsilon/2$. Luego, si $p, q \geq \nu$, tenemos que:

$$|x_p - x_q| \leq |x_p - l| + |l - x_q| < \varepsilon$$

2. Supongamos que (x_n) es de Cauchy. Dado $\varepsilon = 1$, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que si $p \geq \nu$ y $q \geq \nu$ entonces, $|x_p - x_q| < 1$. En particular, $|x_p - x_\nu| < 1$, luego $|x_p| < |x_\nu| + 1$, $\forall p \geq \nu$, y si

$$M = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{\nu-1}|, 1 + |x_\nu|\},$$

tenemos que $|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.

■

La siguiente proposición establece una condición suficiente para que una sucesión de números racionales sea de Cauchy.

Proposición 1.13. *Sea (x_n) una sucesión de números racionales. Si (x_n) es creciente (respectivamente, decreciente) y acotada superiormente (respectivamente, inferiormente) entonces es de Cauchy.*

Demostración. Sea (x_n) una sucesión creciente y acotada superiormente por M. Supongamos que (x_n) no es de Cauchy, entonces, $\exists \varepsilon > 0$ tal que para todo $\nu \in \mathbb{N}$, existen $p, q \geq \nu$ tales que $|x_p - x_q| > \varepsilon$.

En particular, para $\nu = 1$, existen $p_1 > q_1 \geq 1$ tales que $x_{p_1} > x_{q_1} + \varepsilon$. Para p_1, existen $p_2 > q_2 \geq p_1$ tales que

$$x_{p_2} > x_{q_2} + \varepsilon \geq x_{p_1} + \varepsilon > x_{q_1} + 2\varepsilon.$$

Reiterando este procedimiento, se prueba que para todo $n \in \mathbb{N}$ existen $p_n > q_n \geq p_{n-1}$ tales que

$$x_{p_n} > x_{q_n} + \varepsilon \geq x_{p_{n-1}} + \varepsilon > x_{q_1} + n\varepsilon.$$

Pero, tomando n suficientemente grande, llegaríamos a que:

$$x_{p_n} > x_{q_1} + n\varepsilon > M,$$

lo que contradice que M sea cota superior de (x_n).

Para el caso decreciente y acotada inferiormente, se procede de manera similar, o alternativamente, basta tener en cuenta que si (x_n) es decreciente y acotada inferiormente entonces $(-x_n)$ es creciente y acotada superiormente, y que si $(-x_n)$ es de Cauchy, también lo es (x_n). ■

Ejemplo 1.14. La sucesión (x_n) es de Cauchy y no es convergente en $\mathbb{Q}$:

$$x_1 = 2, \;\; x_{n+1} = \frac{x_n^2+2}{2x_n}$$

Observemos en primer lugar que se trata de una sucesión cuyos términos son todos mayores que 1: $x_1 = 2 > 1$ y $x_{n+1} > 1 \iff x_n^2+2 > 2x_n \iff x_n^2+2-2x_n > 0$. Como $x_n^2+2-2x_n = (x_n-1)^2+1 > 0$, concluimos que $x_{n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, si esta sucesión (x_n) tuviera un límite l este sería distinto de cero y tendría que cumplir que $l = \frac{l^2+2}{2l}$, lo que implicaría que $l^2 = 2$. Como no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 2, concluimos que la sucesión no es convergente en $\mathbb{Q}$.

Como la sucesión (x_n) está acotada inferiormente por 1, para probar que es de Cauchy, basta probar que es decreciente:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2+2}{2x_n} < x_n \iff x_n^2+2 < 2x_n^2 \iff x_n^2 > 2$$

Veamos que $x_n^2 > 2, \forall n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$, $x_1^2 = 4 > 2$; supongamos que $x_n^2 > 2$, entonces

$$x_{n+1}^2 = \frac{(x_n^2+2)^2}{4x_n^2} > 2 \iff x_n^4+4x_n^2+4 > 8x_n^2 \iff x_n^4-4x_n^2+4 = (x_n^2-2)^2 > 0$$

Por hipótesis de inducción, $x_n^2 > 2$, luego $(x_n^2-2)^2 > 0$ y por lo tanto, $x_{n+1}^2 > 2$.

Ejercicio 1.15. Probar que si una sucesión (x_n) es de Cauchy, entonces $\lim_{n\to\infty} |x_n - x_{n-1}| = 0$.

Ejemplo 1.16. La sucesión $x_1 = 1, x_2 = x_1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}, x_n = x_{n-1} + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ no es acotada (se trata de la serie armónica), por lo tanto, no es de Cauchy. Sin embargo, para esta sucesión se cumple que $\lim_{n\to\infty} |x_n - x_{n-1}| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, con lo que queda probado que esta condición no es suficiente para que una sucesión sea de Cauchy.

Denotemos por $\mathscr{C}$ al conjunto de sucesiones de Cauchy de números racionales.

Proposición 1.17. *Las sucesiones de Cauchy de números racionales forman un subanillo del anillo de todas las sucesiones de números racionales*

Demostración. Se propone como ejercicio: las sucesiones constantes (0) y (1) son de Cauchy, con lo que basta probar que la diferencia y el producto de dos sucesiones de Cauchy es una sucesión de Cauchy. ■

Sucesiones nulas, positivas y negativas

Definición 1.18. Diremos que una sucesión de Cauchy de números racionales (x_n) es nula si es convergente y su límite es cero.

Denotaremos por $\mathscr{N}$ al conjunto de todas las sucesiones nulas.

Ejercicio 1.19. Comprueba que la suma de dos sucesiones nulas y que el producto de una sucesión nula por una sucesión de Cauchy es una sucesión de Cauchy. Esto significa que las sucesiones nulas forman un ideal, $\mathscr{N}$, del anillo de sucesiones de Cauchy $\mathscr{C}$.

Definición 1.20. Diremos que una sucesión de Cauchy de números racionales (x_n) es positiva existen un número racional positivo $r > 0$, y un número natural n_0 tales que

$$\{x_n : n \geq n_0\} \subset [r, \infty)$$

Denotaremos por $\mathscr{C}^+$ al conjunto de las sucesiones de Cauchy positivas

Definición 1.21. Diremos que una sucesión de Cauchy de números racionales (x_n) es negativa existen un número racional positivo $r > 0$, y un número natural n_0 tales que

$$\{x_n : n \geq n_0\} \subset (-\infty, \ -r]$$

Denotaremos por $\mathscr{C}^-$ al conjunto de las sucesiones de Cauchy negativas

Proposición 1.22. *Cada sucesión de Cauchy de números racionales pertenece a uno y solo uno de los subconjuntos $\mathscr{C}^+$, $\mathscr{C}^-$ o $\mathscr{N}$. Es decir:*

$$\mathscr{C} = \mathscr{C}^+ \sqcup \mathscr{C}^- \sqcup \mathscr{N}$$

Demostración. Si la sucesión (x_n) no converge a cero, entonces existe un número racional $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\nu \in \mathbb{N}$ existe $n > \nu$ tal que $|x_n| > \varepsilon$, de manera que en $(-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, +\infty)$ hay infinitos términos de la sucesión, y por lo tanto en alguno de los intervalos $(-\infty, -\varepsilon]$ o $[\varepsilon, +\infty)$ hay infinitos términos de la sucesión. Supongamos que en $[\varepsilon, +\infty)$ hay infinitos términos de la sucesión.

Como (x_n) es de Cauchy, para $\varepsilon/2$ existe n_0 tal que si p y q son mayores o iguales que n_0 entonces $|x_p - x_q| < \varepsilon/2$. Podemos tomar $q > n_0$ tal que $x_q > \varepsilon/2$ (hemos supuesto que hay infinitos términos de la sucesión que cumplen esto). Entonces, como $-\varepsilon/2 < x_p - x_q < \varepsilon/2$, tenemos que $x_p > x_q - \varepsilon/2 \geq \varepsilon/2, \forall p \geq n_0$. El $r > 0$ buscado es $r = \varepsilon/2$.

Análogamente se prueba que si en $(-\infty, -\varepsilon]$ hay infinitos términos de la sucesión entonces existen $r > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $x_n \in (-\infty, -r], \forall n \geq n_0$.

Si $(x_n) \in \mathscr{N}$, entonces para todo $r > 0$, todos los términos de la sucesión a partir de uno dado están en el intervalo $[-r, r]$, luego $\mathscr{N} \cap \mathscr{C}^+ = \mathscr{N} \cap \mathscr{C}^- = \emptyset$.

Por último, $\mathscr{C}^+$ y $\mathscr{C}^-$ son disjuntos por la propia definición de estos conjuntos. ■

Ejercicio 1.23. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy no nula. Sabemos que entonces (x_n) es positiva o negativa, es decir que existen un número racional $r > 0$ y un número natural n_0 tales que o bien $\{x_n | n > n_0\} \subset [r, +\infty)$ o bien $\{x_n | n > n_0\} \subset (-\infty, -r]$. Demuestra que la sucesión definida por:

$$y_n = 1, \text{ si } n \leq n_0, \;\; y_n = \frac{1}{x_n} \text{ si } n > n_0$$

es de Cauchy y que $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = 1$.

1.3. Equivalencia de sucesiones de Cauchy

Definición 1.24. Diremos que dos sucesiones de Cauchy de números racionales (x_n) e (y_n) son equivalentes si la sucesión $(x_n - y_n)$ converge a cero. Lo denotaremos:

$$(x_n) \sim (y_n) \iff \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$$

Ejemplos 1.25.

1. Si $\lim_{n\to\infty}(x_n) = 0$, entonces $\forall (y_n) \in \mathscr{C}$ se cumple que $(x_n + y_n) \sim (y_n)$.
2. Si $\lim_{n\to\infty}(x_n) = 1$, entonces $\forall (y_n) \in \mathscr{C}$ se cumple que $(x_n \cdot y_n) \sim (y_n)$.

Como ejercicio, compruébense las siguientes afirmaciones.

Proposición 1.26. *Con la notación anterior.*

1. *La relación* $(x_n) \sim (y_n) \iff \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ *es de equivalencia. La clase de equivalencia de* (x_n) *es*
$$[(x_n)] = (x_n) + \mathscr{N}.$$
2. *Dado un número racional,* x*, la clase de equivalencia de la sucesión constante* (x) *es*
$$[(x)] = \{(x_n) \in \mathscr{C} \ : \ \lim_{n\to\infty}(x_n) = x\}$$
3. *Si* $(x_n) \sim (x'_n)$ *e* $(y_n) \sim (y'_n)$ *entonces:*
$$(x_n + y_n) \sim (x'_n + y'_n) \ \text{ e } \ (x_n \cdot y_n) \sim (x'_n \cdot y'_n)$$
4. *Las operaciones*
$$[(x_n)] + [(y_n)] := [(x_n + y_n)] \ \text{ y } \ [(x_n)] \cdot [(y_n)] := [(x_n \cdot y_n)]$$
definen una estructura de anillo conmutativo con unidad en el conjunto cociente $\mathscr{C}/\sim$*. El elemento cero es* $[(0)]$ *y el elemento unidad es* $[(1)]$*.*
5. *La aplicación*
$$i : \mathbb{Q} \to \mathscr{C}/\sim \quad x \mapsto [(x)]$$
es un morfismo de anillos (es decir, $i(x-y) = i(x) - i(y)$*,* $i(x \cdot y) = i(x) \cdot i(y)$*,* $i(1) = [(1)]$*) inyectivo.*
6. *Si* (x_n) *es una sucesión positiva (respectivamente, negativa) y* $(x_n) \sim (x'_n)$ *entonces* (x'_n) *es también una sucesión positiva (respectivamente, negativa).*

Proposición 1.27. *El anillo* $\mathscr{C}/\sim$ *es un cuerpo.*

Demostración. Sea $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \neq [(0)_{n\in\mathbb{N}}]$. Sabemos que existen un número racional $r > 0$ y un número natural n_0 tales que o bien $\{x_n | n > n_0\} \subset [r, +\infty)$ o bien $\{x_n | n > n_0\} \subset (-\infty, \ -r]$. Por el Ejercicio 1.23 sabemos que la sucesión definida por:
$$y_n = 1, \text{ si } n \leq n_0, \ \ y_n = \frac{1}{x_n} \ \text{ si } n > n_0$$
es de Cauchy y que $(x_n \cdot y_n) \to 1$. Luego $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(1)_{n\in\mathbb{N}}]$

■

1.4. El cuerpo ordenado de los números reales

En esta sección vamos a denotar por R al cuerpo $\mathscr{C}/\sim$ obtenido como cociente del anillo de las sucesiones de Cauchy de números racionales por la relación de equivalencia definida entre sucesiones de Cauchy.

Nuestro objetivo es probar que este cuerpo es el de los números reales definido en la Introducción al tema, es decir, que satisface los axiomas I-VIII. Ya hemos probado que $(R,+,\cdot)$ es un cuerpo conmutativo, es decir, que se cumplen los axiomas I-V. Además, sabemos que este cuerpo contiene, como subcuerpo al de los racionales: el morfismo natural $i:\mathbb{Q}\to\mathscr{C}/\sim,\ \ x\mapsto[(x)]$ es un morfismo de cuerpos.

El siguiente paso es definir una relación de orden en R que extiende a la de $\mathbb{Q}$ y que cumple los axiomas VI-VIII.

Definiciones 1.28. Diremos que un elemento $[(x_n)]$ del cuerpo $R=\mathscr{C}/\sim$ es positivo, si alguno de sus representantes (y por consiguiente, todos) es una sucesión positiva. Denotaremos por P al conjunto de los elementos positivos de R, es decir:

$$P=\{[(x_n)]\,:\,\exists r>0,\exists\nu\in\mathbb{N}:n>\nu\implies x_n\geq r\}$$

Diremos que un elemento $[(x_n)]$ del cuerpo $R=\mathscr{C}/\sim$ es negativo si alguno de sus representantes (y por consiguiente, todos) es una sucesión negativa.

Observemos que (x_n) es negativa si, y solo si $(-x_n)$ es positiva. Luego, el conjunto de los elementos negativos de R es precisamente:

$$-P=\{[(x_n)]\,:\,\exists r>0,\exists\nu\in\mathbb{N}:n>\nu\implies x_n\leq -r\}=\{[(x_n)]\,:\,-[(x_n)]\in P\}$$

Hemos probado en la Proposicion 1.22 que toda sucesión de Cauchy que no converge a cero es positiva o negativa, luego todo elemento no nulo de R es positivo o negativo:

$$R=\{0\}\sqcup P\sqcup -P\quad\text{(Axioma VI)}$$

Es sencillo probar que la suma y el producto de dos elementos de P son elementos de P; es decir, que R satisface el Axioma VII.

Definición 1.29. Dados $x=[(x_n)]$ e $y=[(y_n)]$ elementos de R, diremos que $x\leq y$ si $x=y$ o $y-x\in P$.

Es sencillo comprobar que se trata de una relación de orden total compatible con la suma y el producto, es decir, $(R,+,\cdot,\leq)$ es un cuerpo ordenado. Además, el morfismo natural $i:\mathbb{Q}\to R$, $i(x)=[(x)]$ es un morfismo de conjuntos ordenados, es decir, $x\leq y$ si y solo si, $i(x)\leq i(y)$, de manera que el orden definido en R extiende al orden de los números racionales.

Proposición 1.30. *El cuerpo ordenado $(R=\mathscr{C}/\sim,+,\cdot,\leq)$ satisface el Axioma VIII o Axioma de Dedekind, es decir:*

Si A y B son dos subconjuntos no vacíos de R tales que:

- $R=A\sqcup B$
- $\forall a\in A, \forall b\in B$ *se cumple que* $a<b$

entonces existe un único $c\in R$ tal que:

- *o bien* $A=\{x\in R: x\leq c\}$ *y* $B=\{x\in R: x>c\}$;
- *o bien* $A=\{x\in R: x<c\}$ *y* $B=\{x\in R: x\geq c\}$.

Demostración. Observemos que, de existir, el elemento c del enunciado debe ser necesariamente único pues si existieran dos elementos distintos c_1 y c_2 entonces como $c_1<\frac{c_1+c_2}{2}<c_2$, tendríamos que $\frac{c_1+c_2}{2}\in A\cap B$, en contra de la hipótesis de que $A\cap B=\emptyset$.

Probemos la existencia de c.

En primer lugar, veamos que en A hay números racionales. Para ello debemos tener en cuenta que para cualquier elemento $x=[(x_n)]\in R$ existe algún racional positivo q tal que $-q\leq x\leq q$: por ser (x_n) de Cauchy, es acotada, luego existe un racional positivo q tal que $-q\leq x_n\leq q$, $\forall n\in\mathbb{N}$, luego $-q\leq x\leq q$. Entonces, como A no es vacío, podemos tomar $a\in A$, y si q es un número racional positivo tal que $-q<a<q$, entonces $-q\in A$ (pues $-q$ no puede pertenecer a B por ser menor que un elemento de A).

Análogamente se comprueba que en B hay números racionales.

Tomemos pues números racionales $a_1\in A$ y $b_1\in B$.

Si $\frac{a_1+b_1}{2}$ pertenece a A, tomamos $a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$ y $b_2=b_1$.

Si $\frac{a_1+b_1}{2}$ no pertenece a A, entonces pertenece a B y tomamos $a_2=a_1$ y $b_2=\frac{a_1+b_1}{2}$.

Con a_2 y b_2 procedemos de la misma forma y así construimos dos sucesiones de números racionales, una creciente, (a_n), cuyos términos están todos en A y otra decreciente, (b_n), cuyos términos están todos en B, y además, $a_n<b_n$, $\forall n\geq 1$.

La sucesión (a_n) es creciente y está acotada superiormente, y la sucesión (b_n) es decreciente y está acotada inferiormente, luego ambas sucesiones son de Cauchy.

Además, $|a_n - b_n| \leq \frac{1}{2^n}|a_1 - b_1|$, luego $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. Esto significa que las dos sucesiones son equivalentes y definen un elemento $c = [(a_n)] = [(b_n)]$ de R, que pertencerá a A o a B.

Si $c \in A$, entonces todo elemento menor que c estará también en A, por lo que si probamos que todo elemento mayor que c está en B quedará probado que $A = \{x \in R : x \leq c\}$ y $B = \{x \in R : x > c\}$. Si $c \in B$, entonces de manera análoga se prueba que $A = \{x \in R : x < c\}$ y $B = \{x \in R : x \geq c\}$.

Supongamos que $c \in A$ y sea $x = [(x_n)] \in R$ un elemento tal que $x > c$. Si probamos que x es mayor que algún elemento b de B podemos concluir que $x \in B$.

Como $x = [(x_n)] > c = [(b_n)]$, es decir, $[(x_n - b_n)] > 0$, existen un número racional $r > 0$ y un natural ν tales que $x_n - b_n \geq r$, $\forall n \geq \nu$.

Por ser (x_n) una sucesión de Cauchy, dado $\varepsilon = \frac{r}{2}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, si $p, q > m$ entonces $|x_p - x_q| < \frac{r}{2}$.

Luego, si $n_0 = maximo\{\nu, m\}$, tenemos:

$$b_{n_0} \leq x_{n_0} - r < x_n + \frac{r}{2} - r = x_n - \frac{r}{2},\ \forall n > n_0$$

Es decir, $x_n - b_{n_0} > \frac{r}{2}$, $\forall n > n_0$. Esto significa que $(x_n) - b_{n_0} > 0$, es decir, $b_{n_0} < x = [(x_n)]$. Luego, $x \in B$.

■

Definición 1.31. Llamaremos cuerpo de los números reales al cuerpo ordenado $(\mathscr{C}/\sim, +, \cdot, \leq)$ y lo denotaremos por $\mathbb{R}$.

2. Algunas propiedades de los números reales

Hemos construido el cuerpo ordenado de los números reales $(\mathbb{R}, +, \cdot \leq)$ como el cociente en el conjunto de sucesiones de Cauchy de números racionales $\mathscr{C}$ por la relación $(x_n) \sim (y_n) \iff (x_n - y_n) \to 0$ y hemos comprobado que esta construcción satisface los axiomas que caracterizan a $\mathbb{R}$ como cuerpo ordenado y completo. Hemos comprobado que los racionales forman un subcuerpo ordenado de $\mathbb{R}$, es decir, mediante la aplicación inyectiva

$$i : \mathbb{Q} \to \mathscr{C}/\sim \quad x \mapsto [(x)]$$

$\mathbb{Q}$ se identifica con su imagen en $\mathbb{R}$. Esta aplicación no es epiyectiva, si una sucesión de Cauchy (x_n) no es convergente, entonces el número real $[(x_n)]$ no es racional, decimos que estos números son irracionales. La sucesión definida en el ejemplo 1.14 $x_1 = 2,\ \ x_{n+1} = \frac{x_n^2+2}{2x_n}$ define un número irracional $x = [(x_n)]$ cuyo cuadrado es igual a 2.

El valor absoluto de un número real se define de la misma forma que para los números racionales.

Definición 2.1. El valor absoluto de un número real x es el número real positivo

$$|x| := \text{máx}\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Así, si $q > 0$,

$$|x| \leq q \iff -q \leq x \leq q.$$

El valor absoluto cumple para los números reales las mismas propiedades que para los racionales.

Proposición 2.2. *Para toda pareja x, y de números reales se cumple que:*

1. $|x| \geq 0$ *y* $|x| = 0 \iff x = 0$.
2. **Desigualdad triangular:** $|x+y| \leq |x| + |y|$.
3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
4. $||x| - |y|| \leq |x+y|$ *y* $||x| - |y|| \leq |x-y|$

2.1. Representación decimal

Proposición 2.3. *El orden de $\mathbb{R}$ es arquimediano, es decir, dado un número real x, existe un número natural n tal que $|x| < n$.*

Demostración. Por definición, un número real x es una clase de equivalencia de sucesiones de Cauchy de números racionales, $x = [(x_n)]$. Por ser la sucesión (x_n) de Cauchy es acotada, es decir, existe un número racional positivo K tal que $-K < x_n < K$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego, por la definición de orden en $\mathbb{R}$ tenemos que $|x| < K$. Como el orden en $\mathbb{Q}$ es arquimediano, sabemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K < n$. Luego, $|x| < n$. ■

Observemos que la propiedad arquimediana es equivalente a decir que $\mathbb{N}$ no es acotado en $\mathbb{R}$.

Representación decimal de un número real

LLamamos parte entera de un número real x al único número entero z tal que

$$z \leq x < z + 1$$

Veamos cómo se obtienen las cifras decimales de x.

Escribamos cada intervalo $[0,\ 1/10^n)$ de la forma:

$$\left[0, \frac{1}{10^n}\right) = \bigsqcup_{i=0}^{9} \left[\frac{i}{10^{n+1}}, \frac{i+1}{10^{n+1}}\right)$$

Dado $x \in \mathbb{R}$, llamamos x_0 a su parte entera e $y_1 = x - x_0$, tenemos:

$$x = x_0 + y_1,\ 0 \leq y_1 < 1,\ \text{luego } \dot{\exists} c_1 \in \mathbb{N}, 0 \leq c_1 \leq 9 :\ \frac{c_1}{10} \leq y_1 < \frac{c_1 + 1}{10}$$

Sea $x_1 = z + \frac{c_1}{10}$, $y_2 = x - x_1$:

$$x = x_1 + y_2,\ 0 \leq y_2 < \frac{1}{10},\ \text{luego } \dot{\exists} c_2 \in \mathbb{N}, 0 \leq c_2 \leq 9 :\ \frac{c_2}{10^2} \leq y_2 < \frac{c_2 + 1}{10^2}$$

Sea $x_2 = z + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2}$, $y_3 = x - x_2$:

$$x = x_2 + y_3,\ 0 \leq y_3 < \frac{1}{10^2},\ \text{luego } \dot{\exists} c_3 \in \mathbb{N}, 0 \leq c_3 \leq 9 :\ \frac{c_2}{10^3} \leq y_3 < \frac{c_3 + 1}{10^3}$$

De esta forma construimos una sucesión de números racionales $(x_n)_n)$:

$$x_n = z + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \ldots + \frac{c_n}{10}$$

que converge a x, pues $x - x_n < \frac{1}{10^n}$. Esta sucesión nos proporciona las cifras decimales de x, podemos obtener tantas cifras decimales como queramos.

Sabemos que cuando los números racionales admiten una expresión decimal finita o periódica. Veamos la demostración de este resultado.

Proposición 2.4. *Todo número racional admite una expresión decimal finita o periódica.*

Demostración. Es claro que basta probar el enunciado para los números racionales positivos. Sea q un número racional positivo, es decir, $q = m/n$, siendo m y n números naturales. Dividiendo m entre n obtenemos $m = an + r_1$, con $0 \leq r_1 < n$ y

$$\frac{m}{n} = \frac{an + r_1}{n} = a + \frac{r_1}{n}$$

De manera que a es la parte entera de m/n y $r_1/n < 1$. Dividiendo ahora $10r_1$ entre n, tenemos $10r_1 = c_1 n + r_2$, con $0 \leq r_2 < n$ y $c_1 \leq 9$, pues $10r_1 = c_1 n + r_2 < 10n$, luego $c_1 \leq 9$ y

$$\frac{m}{n} = a + \frac{1}{10}\frac{10r_1}{n} = a + \frac{1}{10}\frac{c_1 n + r_2}{n} = a + \frac{c_1}{10} + \frac{1}{10}\frac{r_2}{n}$$

Análogamente, dividiendo $10r_2$ entre n obtenemos

$$\frac{m}{n} = a + \frac{1}{10}\frac{10r_1}{n} = a + \frac{1}{10}\frac{c_1 n + r_2}{n} = a + \frac{c_1}{10} + \frac{1}{10^2}\frac{10r_2}{n} = a + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \frac{1}{10^2}\frac{r_3}{n}$$

con $r_3 < n$ y $c_2 < 9$. Reiternado el proceso, obtendremos un resto nulo, $r_{k+1} = 0$ o bien un resto repetido $r_{k+p} = r_k$. En el primero de los casos, si $r_{k+1} = 0$, el número racional q tiene una expresión decimal finita:

$$\frac{m}{n} = a + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \cdots + \frac{c_k}{10^k} = a, c_1 c_2 \ldots c_k.$$

En el segundo caso, si $r_{k+p} = r_k$, entonces $c_k = c_{k+p}$, $r_{k+p+1} = r_k$, $c_{k+p+2} = c_{k+2} \ldots, r_{k+p+(p-1)} = r_{k+(p-1)}$ y $c_{k+p+(p-1)} = c_{k+(p-1)}$ y los restos y cocientes se van repitiendo periódicamente:

$$r_{k+dp+s} = r_{k+s}, \quad \text{y} \quad c_{k+dp+s} = c_{k+s}, \; \forall d \in \mathbb{N}, \; 0 \leq s < p$$

de manera que el número racional $q = m/n$ tiene una expresión decimal periódica:

$$q = \frac{m}{n} = a + \frac{c_1}{10} + \cdots + \frac{c_k}{10^k} + \frac{c_{k+1}}{10^{k+1}} + \cdots + \frac{c_k}{10^k} + \frac{c_{k+1}}{10^{k+1}} + \ldots$$

$$q = \frac{m}{n} = a, c_1 c_2 \ldots c_{k-1} \overline{c_k c_{k+1} \ldots c_{k+p}}$$

■

Ejercicio 2.5.

1. Enunciar y demostrar un método para obtener la fracción irreducible que corresponde a un número racional expresado de forma decimal.
2. Caracterizar las fracciones irreducibles m/n cuya expresión decimal tiene un número finito de cifras decimales.
3. El que la expresión decimal de un número racional sea finita o periódica, ¿depende de la base de numeración?

2.2. $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$

Proposición 2.6. *$\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, es decir, para toda pareja de números reales tales que $x < y$ existe un número racional q tal que $x < q < y$. Es decir, en todo intervalo (x, y) hay algún número racional.*

Demostración. Por la propiedad arquimediana, sabemos que existe un número natural $n > 0$ tal que $\frac{1}{y-x} < n$, o sea $y - x > \frac{1}{n}$.

Sea $m = \text{mínimo}\{k \in \mathbb{N} : nx < k\}$, entonces $m - 1 \leq nx < m$, luego

$$\frac{m-1}{n} < x < \frac{m}{n}$$

y tenemos que:

$$y = x + (y - x) > \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{m}{n} > x$$

■

2.3. Existencia del supremo (ínfimo)

Teorema fundamental del orden en $\mathbb{R}$ 2.7. *Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente (o inferiormente) tiene supremo (o ínfimo).*

Demostración. Sea $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ acotado superiormente. Consideremos los subconjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ no es cota superior de } E\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ es cota superior de } E\}$$

A y B forman una partición de $\mathbb{R}$: son no vacíos, son disjuntos y su unión es todo $\mathbb{R}$. Además, si $a \in A$ y $b \in B$ entonces $a < b$. Por el Axioma de Dedekind, sabemos que existe un único $c \in R$ tal que:

1. $x < c \implies x \in A$;
2. $x > c \implies x \in B$.

Si probamos que $c \in B$, es decir, que c es cota superior de E, entonces, por 1, tenemos que c es la menor de las cotas superiores de E, es decir, el supremo de E.

Supongamos que c no es cota superior de E, es decir, que existe $x \in E$ tal que $x > c$. Sea $y = \dfrac{x+c}{2}$. Entonces, y no es cota superior de E, pues $y < x$, pero como $y > c$ llegamos a que y sí debe ser cota superior de E, lo que es una contradicción. Concluimos que c es cota superior de E. ■

Utilizando este teorema se prueba que todo número real positivo tiene raíz real positiva de cualquier orden.

Proposición 2.8. *Si a es un número real mayor que cero, entonces, para todo $n \geq 2$ existe un único número real positivo b tal que $b^n = a$.*

Demostración. Fijado $n \geq 2$, definimos el conjunto $A = \{x \in [0, +\infty) : x^n < a\}$, que no es vacío ($0 \in A$). Si $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ es tal que $a < m < m^n$, entonces m es cota superior de A.

Sea b el supremo de A, $b = \sup(A)$. Veamos que no puede ocurrir que $b^n < a$ ni que $b^n > a$. Observemos en primer lugar que

$$\left(b + \frac{1}{k}\right)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b^{n-1} \frac{1}{k^i} = b^n + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} b^{n-1} \frac{1}{k^{i-1}} = b^n + \frac{c}{k}$$

y que

$$\left(b - \frac{1}{k}\right)^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} b^{n-1} \frac{1}{k^i} > b^n - \binom{n}{1} b^{n-1} \frac{1}{k} - \binom{n}{3} b^{n-3} \frac{1}{k^3} - \ldots = b^n - \frac{d}{k}$$

Si $b^n < a$, entonces, tomando $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande podemos obtener que

$$\left(b + \frac{1}{k}\right)^n = b^n + \frac{c}{k} < a$$

es decir, que $b + \dfrac{1}{k} \in A$, llegamos a una contradicción, pues b es cota superior de A. Luego no puede ocurrir que $b^n < a$.

Supongamos ahora que $b^n > a$. Entonces, tomando k suficientemente grande podemos obtener que $b^n - \dfrac{d}{k} > a$, luego

$$\left(b - \frac{1}{k}\right)^n > b^n - \frac{d}{k} > a$$

y si $x^n < a < \left(b - \frac{1}{k}\right)^n$ entonces $x < b - \dfrac{1}{k}$; es decir, $b - \dfrac{1}{k}$ será una cota superior de A menor que b, en contradicción con que b es el supremo de A.

Luego tiene que cumplirse que $b^n = a$.

Si existe otro número c tal que $c^n = b^n = a$, entonces $b = c$ pues si $b < c$ entonces $b^2 < bc < c^2$ y reiterando el argumento obtenemos que $b^n < c^n$.

■

2.4. Sucesiones de números reales

En $\mathbb{R}$ se definen los conceptos de sucesión convergente y sucesión de Cauchy de manera enteramente análoga a como se hizo para $\mathbb{Q}$, si (x_n) es una sucesión de números reales y $l \in \mathbb{R}$, decimos que $\lim_{n\to\infty}(x_n) = l$, o también, $(x_n) \to l$, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \varepsilon \in \mathbb{R},\ \exists \nu \in \mathbb{N}\ :\ n > \nu \implies |x_n - l| < \varepsilon$$

Una sucesión (x_n) de números reales es de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists \nu \in \mathbb{N}\ :\ p, q \geq \nu \implies |x_p - x_q| < \varepsilon$$

Las propiedades de las sucesiones convergentes de números racionales siguen siendo válidas (y la demostración es la misma) para sucesiones de números reales: el límite de una sucesión convergente es único, la suma y el producto de sucesiones convergentes es convergente y el límite de la suma (del producto) es la suma (el producto) de los límites. Lo mismo ocurre con las sucesiones de Cauchy: toda sucesión convergente es de Cauchy; toda sucesión de Cauchy es acotada; la suma y el producto de sucesiones de Cauchy es una sucesión de Cauchy; toda sucesión creciente(decreciente) y acotada superiormente (inferiormente) es de Cauchy.

Ejercicio 2.9. Sea (x_n) una sucesión de números racionales.

1. Si (x_n) converge a $l \in \mathbb{Q}$ como sucesión de números racionales, entonces converge a l como sucesión de números reales. Es decir, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \varepsilon \in \mathbb{Q},\ \exists \nu \in \mathbb{N}\ :\ n > \nu \implies |x_n - l| < \varepsilon$$

entonces

$$\forall \varepsilon > 0,\ \varepsilon \in \mathbb{R},\ \exists \nu \in \mathbb{N}\ :\ n > \nu \implies |x_n - l| < \varepsilon$$

2. Si (x_n) es de Cauchy como sucesión de números racionales, entonces es de Cauchy como sucesión de números reales. Es decir, si

$$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}, \exists \nu \in \mathbb{N} \,:\, p,q \geq \nu \implies |x_p - x_q| < \varepsilon$$

entonces

$$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists \nu \in \mathbb{N} \,:\, p,q \geq \nu \implies |x_p - x_q| < \varepsilon$$

Proposición 2.10. *Todo número real es límite de una sucesión de Cauchy de números racionales.*

Demostración. Por definición, un número real x es una clase de equivalencia de sucesiones de Cauchy de números racionales, $x = [(x_n)]$. Veamos que $\text{lím}_{n\to\infty}(x_n) = x$. Sea $\varepsilon > 0$. Como (x_n) es de Cauchy, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq \nu$ entonces $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Si fijamos $n \geq \nu$, tenemos que, $\forall m > \nu$ se cumple que

$$x_n - \varepsilon < x_m < x_m + \varepsilon$$

luego

$$x_n - \varepsilon < [(x_m)] = x < x_m + \varepsilon$$

es decir, $|x_n - x| < \varepsilon$. ■

Teorema 2.11. *Toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ es convergente.*

Demostración. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy. Para cada $n \geq 1$, sea $r_n \in \mathbb{Q}$ tal que $x_n < r_n < x_n + \dfrac{1}{n}$.

Probemos que la sucesión (r_n) es de Cauchy. Por la desigualdad triangular

$$|r_n - r_m| \leq |r_n - x_n| + |x_n - x_m| + |x_m - r_m|$$

Dado $\varepsilon > 0$, existen n_0 y n_1 tales que:

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n,m \geq n_0$$

$$\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \forall n,m \geq n_1$$

Luego, si $\nu = \text{máx}\{n_0, n_1\}$ entonces

$$|r_n - r_m| < \varepsilon, \quad \forall n,m \geq \nu$$

Como (r_n) es una sucesión de Cauchy de números racionales, define un número real $x = [(r_n)]$ y, como hemos probado en 2.10, $(r_n) \to x$.

Veamos que $\lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}(r_n) = x$. Dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces:

$$|x_n - r_n| \leq \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |r_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$$

luego,

$$|x_n - x| \leq |x_n - r_n| + |r_n - x| < \varepsilon$$

■

Ejemplo 2.12. La sucesión del ejemplo 1.14

$$x_1 = 2, \;\; x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$$

es de Cauchy, luego es convergente en $\mathbb{R}$. Su límite es $\sqrt{2}$.

Corolario 2.13. *Toda sucesión de números reales creciente (decreciente) y acotada superiormente (inferiormente) es convergente.*

Demostración. Toda sucesión de números reales creciente y acotada superiormente es de Cauchy, luego es convergente. ■

2.5. El número e

Proposición 2.14. *Sea a un número real mayor que cero. Consideremos la sucesión de números reales (a_n) definida por*

$$a_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$$

1. *La sucesión (a_n) es monótona creciente.*
2. *Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $m+1 \geq a$ y $n > m$, entonces*

$$a_n < 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \ldots + \frac{a^m}{m!} + \frac{a^{m+1}}{(m+1)!}\frac{m+2}{m+2-a}$$

Demostración. 1.) $a_n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\dfrac{a^k}{n^k}$. Comparemos el k-ésimo sumando de a_n y el de a_{n+1}

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\frac{a^k}{n^k} &= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{k!}\frac{a^k}{n^k}\\ &= \frac{a^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\\ &< \frac{a^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)\\ &= \frac{(n+1)\cdot(n)\cdot\ldots\cdot(n+1-(k-1))}{k!}\frac{a^k}{(n+1)^k} = \binom{n+1}{k}\frac{a^k}{(n+1)^k}\end{aligned}$$

El k-ésimo sumando de a_{n+1} es mayor que el k-ésimo sumando de a_n y además, a_{n+1} un sumando más que a_n, luego $a_{n+1} > a_n$.

2.) Escribamos de nuevo el k-ésimo sumando de a_n:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\frac{a^k}{n^k} &= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{k!}\frac{a^k}{n^k}\\ &= \frac{a^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < \frac{a^k}{k!}\end{aligned}$$

(pues todos los factores $\left(1-\dfrac{m}{n}\right)$, $m = 1,\ldots,k-1 < n$ son menores que 1). Luego,

$$a_n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{a^k}{n^k} < \sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!} \tag{1}$$

Luego, si $n > m$, podemos escribir:

$$a_n < 1+a+\frac{a^2}{2!}+\ldots+\frac{a^m}{m!}+\frac{a^{m+1}}{(m+1)!}\left(1+\frac{a}{m+2}+\ldots+\frac{a^{n-m-1}}{(m+2)(m+3)\ldots n}\right)$$

La suma entre paréntesis es menor que la suma de la progresión geométrica

$$1+\frac{a}{m+2}+\frac{a^2}{(m+2)^2}+\ldots+\frac{a^k}{(m+2)^k}+\ldots$$

de razón $\dfrac{a}{m+2} < 1$, es decir, $S = \dfrac{1}{1-\dfrac{a}{m+2}} = \dfrac{m+2}{m+2-a}$ y obtenemos lo que queríamos demostrar

$$a_n < 1+a+\frac{a^2}{2!}+\ldots+\frac{a^m}{m!}+\frac{a^{m+1}}{(m+1)!}\frac{m+2}{m+2-a}$$

■

Corolario 2.15. *Si a es mayor que cero, la sucesión* $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ *es convergente.*

Definición 2.16. Se llama número e al límite:

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Observemos que si $n > 1$,

$$a_1 = (1+1) = 2 < a_n$$

y, como $a = 1$, para obtener la acotación dada en 2.14 podemos tomar $m = 0$ y tenemos que

$$a_n < 1 + \frac{1}{1!}\frac{2}{2-1} = 3$$

de manera que $2 < e < 3$.

Veamos otra forma de obtener el número e.

Dado $a > 0$ consideremos la sucesión:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}$$

Es inmediato comprobar que esta sucesión es creciente pues:

$$s_{n+1} = s_n + \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$$

Si probamos que es acotada superiormente, concluimos que es convergente.

Fijado m, para todo $n > m$ tenemos que:

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\frac{a^k}{k!} < a_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{a^k}{k!}$$

es decir,

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{a^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < a_n$$

y, tomando límite cuando $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{a^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{m}\frac{a^k}{k!} \le \lim_{n\to\infty} a_n$$

Es decir,

$$s_m \leq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$$

luego (s_n) es convergente y

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!} \leq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$$

Por otra parte, en la demostración de 2.14 hemos obtenido 1

$$a_n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!} = s_n$$

luego,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$$

En particular, para $a = 1$ obtenemos el número e

$$e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Proposición 2.17. *El numero e es irracional.*

Demostración. Supongamos que e es racional, es decir, que existen naturales pyq tales que $e = \dfrac{p}{q}$.

Si $n > q$,

$$0 < s_n - s_q = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!} = \frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \ldots + \frac{1}{n!} =$$

$$\frac{1}{(q+1)!}\left(1+\frac{1}{(q+2)}+\frac{1}{(q+2)(q+3)}+\ldots\right) <$$

$$\frac{1}{(q+1)!}\left(1+\frac{1}{(q+1)}+\frac{1}{(q+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(q+1)^{n-1}}\right)$$

El término entre paréntesis es la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica de razón $\dfrac{1}{q+1}$. La suma de todos los términos de esta progresión es $\dfrac{q+1}{q}$, luego

$$s_n - s_q < \frac{1}{(q+1)!}\frac{q+1}{q} = \frac{1}{q!q}$$

Tomando $\lim_{n\to\infty}$, obtenemos que

$$0 < e - s_q < \frac{1}{q!q}$$

y, multiplicando por $q!$:

$$0 < q!\,(e - s_q) < \frac{1}{q}$$

Observemos que $q!s_q$ es un número entero, y como habíamos supuesto $e = \frac{p}{q}$, $q!e$ también es un número entero, así que hemos obtenido un número entero n tal que

$$0 < n < \frac{1}{q}$$

Concluimos que e es irracional. ■

2.6. Números algebraicos y trascendentes

Sabemos que $\sqrt{2}$ es un número irracional. Una diferencia fundamental entre $\sqrt{2}$ y el número e es que $\sqrt{2}$ es raíz de un polinomio con coeficientes racionales (de hecho, enteros): $p(x) = x^2 - 2$. Los números reales que cumplen esta condición, es decir, que satisfacen alguna ecuación polinómica $p(x) = 0$, con coeficientes racionales se dicen que son **algebraicos** sobre $\mathbb{Q}$. Puede probarse (no es sencillo) que el número e no es algebraico, es decir, no es raíz de ningún polinomio con coeficientes racionales; lo mismo ocurre con el número π. Estos números que no son algebraicos se llaman **trascendentes**.

Cuando un número real α es algebraico, el menor subcuerpo de $\mathbb{R}$ que contiene a α y a todos los racionales, que se denota $\mathbb{Q}(\alpha)$ es un $\mathbb{Q}$ espacio vectorial de dimensión finita, mientras que si α es trascendente, entonces la dimensión de $\mathbb{Q}(\alpha)$ como $\mathbb{Q}$ espacio vectorial es infinita, pues para todo $n \geq 1$, la familia de vectores $\{1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n\}$ es linealmente independiente.

Que el número π sea trascendente prueba la imposibilidad de la **cuadratura del círculo**, es decir, de construir con regla y compás el lado de un cuadrado con el mismo área de un círculo dado: si el círculo tiene radio r, el lado del del cuadrado debería medir $r\sqrt{\pi}$ y este número no se puede constructible con regla y compás, por no serlo π.

A los números reales que se pueden construir con regla y compás se les llama **constructibles**. Se puede probar que estos números forman un subcuerpo

$\mathbb{K}$ de $\mathbb{R}$ que contiene a los racionales:

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{R}$$

Se puede demostrar que si $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces α es algebraico y el polinomio con coeficientes racionales de menor grado que tiene a α por raíz tiene grado 2^n.

La cuadratura del círculo es un problema clásico de construcciones con regla y compás. Los otros dos grandes problemas clásicos son los de la duplicación del cubo y la trisección del ángulo:

- **Duplicación del cubo:** el problema consiste en construir, con regla y compás el lado de un cubo cuyo volumen sea el doble que el de otro cubo dado. Si el cubo inicial tiene un volumen igual a 1, el lado del nuevo cubo debe medir $\sqrt[3]{2}$, que es un número irracional algebraico. Este número es algebraico porque el polinomio de menor grado con coeficientes racionales que lo tiene como raíz es $x^3 - 2$, que tiene grado 3.
- **Trisección del ángulo**: dividir en tres partes iguales un ángulo dado. Si el ángulo dado es de 60 se trata de construir con regla y compás un ángulo de 20, es decir, su seno y su coseno. Con la fórmula del ángulo triple tenemos:

  $$\cos(3\beta) = 4\cos^3(\beta) - 3\cos(\beta)$$

  Como $\cos(60) = \dfrac{1}{2}$, entonces $\cos(20)$ es raíz de $4x^3 - 3x^2 - \dfrac{1}{2}$, es decir de $8x^3 - 6x - 1$. Puede probarse que este polinomio es irreducible (no tiene raíces racionales) y por lo tanto es el de menor grado que tiene a $\cos(20)$ por raíz, por lo que este número no es constructible.

3. Cardinal de los números reales

3.1. $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son numerables

A partir de los números naturales hemos ido ampliando los conjuntos de números $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Tanto el anillo de los números enteros como el cuerpo de los números racionales son conjuntos numerables, es decir, tienen el mismo tamaño que el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales. Este hecho puede sorprender a primera vista pues al ser las contenciones $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ estrictas, se podría pensar que cada uno de estos conjuntos es más grande que el anterior. Para aclarar esta cuestión, debemos establecer primero qué es el tamaño de un conjunto. Partiremos de dos ideas intuitivas fundamentales. En primer lugar, para cada número natural n, el conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$ es finito y tiene n elementos y diremos que un conjunto A es finito cuando podamos contar sus elementos, es decir cuando podamos definir una aplicación biyectiva entre A y $\{1,2,\ldots,n\}$, en cuyo caso diremos que A tiene n elementos. En segundo lugar, dos conjuntos, finitos o no, tendrán el mismo tamaño cuando a cada elemento de uno de ellos le podamos asignar un elemento y solo uno del otro, es decir, cuando entre ellos se pueda establecer una biyección.

Definición 3.1. Se dice que un conjunto A es equipotente al conjunto B, y se denota $A \sim B$ si existe una aplicación biyectiva $f : A \to B$.

Es fácil comprobar que esta relación $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

Cuando dos conjuntos A y B son equipotentes, se dice también que tienen el mismo cardinal, y se denota $|A| = |B|$

Definición 3.2. Un conjunto A es finito si es vacío (tiene cero elementos) o si es equipotente con $\{1,2,\ldots,n\}$, para algún $n \in \mathbb{N}$, en cuyo caso diremos que A tiene n elementos o que el cardinal de A es igual a n.

Es fácil comprobar que se cumplen las siguientes propiedades:

- Si B es un conjunto finito y $f : A \to B$ es inyectiva, entonces A es finito y el número de elementos de A es menor o igual que el de B.
  Esta propiedad se enuncia a veces como **Principio de Dirichlet o del palomar:** si n palomas se distribuyen en m palomares y $n > m$, $(n \neq m)$, entonces habrá algún palomar con más de una paloma. Es decir, si A es un conjunto finito con n elementos, B es un conjunto finito con m elementos y $n > m$ entonces no existe ninguna aplicación inyectiva $A \to B$.
- Todo subconjunto de un conjunto finito es finito.
- La imagen por una aplicación de un conjunto finito es un conjunto finito, es decir: si A es finito, $f : A \to B$ cualquier aplicación, entonces $f(A)$ es finito.

Ejercicio 3.3. Compruébese que si un conjunto A tiene n elementos, entonces el conjunto de partes de A, es decir $\mathscr{P}(A) = \{B | B \subseteq A\}$, tiene 2^n elementos.

Definición 3.4. Si un conjunto es finito no es equipotente con ninguno de sus subconjuntos propios (distintos del total) ("El todo es mayor que la parte"). Por tanto, si un conjunto admite una biyección con alguna de sus partes entonces no es finito, en cuyo caso diremos que es infinito.

Ejemplos 3.5.

1. El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ es infinito pues podemos establecer la biyección:

$$s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}, \quad s(n) = n + 1.$$

2. El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ es infinito, pues admite una biyección con el conjunto P de los números enteros pares:

$$f : \mathbb{Z} \to P, \quad f(z) = 2z.$$

3. El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ tiene el mismo cardinal que el intervalo $(-1, 1)$, pues la siguiente aplicación es biyectiva:

$$f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$$

Definiciones 3.6. Diremos que un conjunto A es infinito-numerable, o que tiene cardinal $\aleph_0$ (alef cero) si es equipotente con el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$. Es decir, cuando exista una biyección $f : \mathbb{N} \to A$, en cuyo caso, se suele denotar $f(n) = a_n$ y se escribe $A = \{a_n | n \in N\} = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$

Diremos que un conjunto es numerable si es finito o si es infinito-numerable.

Un conjunto que no es numerable se dice no numerable.

Ejemplos 3.7.

1. El conjunto de los números enteros es numerable, pues la siguiente aplicación es biyectiva:

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} 2n & \text{si} \quad n \geq 0 \\ -2n - 1 & \text{si} \quad n < 0 \end{cases}$$

2. El conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es infinito-numerable.
   Para definir una biyección f entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$ vamos a "contar" los elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ recorriendo las sucesivas diagonales:
   Empezamos por $(0, 0)$ (acordamos que esta es la diagonal cero), y asignamos $f(0, 0) = 0$. Pasamos a $(1, 0)$ y recorremos la diagonal 1: $f(1, 0) = 1$, $f(0, 1) = 2$; saltamos a la siguiente diagonal: $f(2, 0) = 3$, $f(1, 1) = 4$, $f(0, 2) = 5$; saltamos a la tercera diagonal, etc...

Calculemos $f(x,y)$ para cualquier par (x,y). Observemos que la diagonal 0 está formada por un punto, el $(0,0)$, la diagonal 1 por dos puntos $(1,0)$ y $(0,1)$; la diagonal por los puntos $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$ y en general, los puntos (x,y) de la diagonal n son tales que $x+y=n$ y, como x toma $n+1$ valores: $0,1,2,\ldots,n$, esta diagonal está formada por $n+1$ puntos. El primer punto de la diagonal n es el $(n,0)$, el segundo el $(n-1,1)$, etc... Para contar el lugar que ocupa el punto (x,y) (empezando a contar por 1), debemos tener en cuenta que el punto (x,y) está en la diagonal $x+y$; en las diagonales anteriores hay $1+2+\cdots+x+y$ puntos; en la diagonal $x+y$, el punto (x,y) está en lugar $y+1$. Luego, empezando a contar por 1, el punto (x,y) está en el lugar:

$$1+2+\cdots+(x+y)+(y+1)=\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}+(y+1)$$

Si empezamos a contar desde 0, (x,y) estará en el lugar:

$$1+2+\cdots+(x+y)+(y+1)=\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}+y$$

Es decir, la biyección buscada es:

$$f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N},\quad f(x,y)=\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}+y$$

3. El conjunto $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ es numerable.

Proposición 3.8. *Si un conjunto A es numerable y existe una aplicación inyectiva $i:B\to A$, entonces B es numerable. En particular, todo subconjunto de un conjunto numerable es numerable.*

Demostración. Basta probar que todo subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ es infinito-numerable (como ejercicio, explíquense los detalles).

Sea C un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Consideremos la aplicación $h:\mathbb{N}\to C$ definida inductivamente por: $h(0)=\text{mín}(C)$, $h(1)=\text{mín}(C-\{h(0)\})$ ....

$$h(n)=\text{mín}(C-\{h(0),h(1),\ldots h(n-1)\})$$

Por la propia definición de h, tenemos que $h(0)<h(1)<h(2)<\ldots...$, luego si $k\neq n$, $h(k)\neq h(n)$. Es decir, h es inyectiva.

Para probar que h es epiyectiva, tomemos $c\in C$. Como h es inyectiva y $\mathbb{N}$ es infinito, el conjunto $\{n\in\mathbb{N}|h(n)\geq c\}$ no es vacío. Sea $m=\text{mín}\{n\in$

$\mathbb{N}|h(n) \geq c\}$. Veamos que $h(m) = c$. Por definición, $h(m) \geq c$. Si $c < h(m) =$ $\text{mín}(C - \{h(0), h(1), \ldots h(m-1)\})$, entonces $c \in \{h(0), h(1), \ldots h(m-1)\}$ y por lo tanto, $h(m-1) \geq c$, en contra de la elección de m como el menor natural que cumple $h(m) \geq c$, luego $h(m) = c$ ■

Ejercicio 3.9. En la demostración de la proposicion anterior ¿dónde se ha utilizado que C es infinito?

Corolario 3.10. *(Cantor, 1873) El conjunto de los números racionales es numerable.*

Demostración. Escribamos cada número racional q como una fracción irreducible con denominador positivo, $q = m/n$, siendo $\text{m.c.d.}(m,n) = 1$ y $n > 0$. Si a cada racional $q = m/n$ le asociamos el par $(m.n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ definimos una aplicación inyectiva en un conjunto numerable:

$$i : \mathbb{Q} = \{q = \frac{m}{n} | \text{m.c.d.}(m,n) = 1,\ n > 0\} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \quad q = \frac{m}{n} \to i(q) = (m,n)$$

■

Otra forma de probar que $\mathbb{Q}$ es numerable consiste en definir la siguiente aplicación inyectiva:

$$\begin{aligned} &\mathbb{Q} \stackrel{\phi}{\hookrightarrow} \mathbb{N} \\ &\tfrac{m}{n} \mapsto \phi\left(\tfrac{m}{n}\right) = \quad \begin{cases} 2 \cdot 3^m \cdot 5^n & \text{si} \quad m \geq 0 \\ 3^{-m} \cdot 5^n & \text{si} \quad m < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

donde $\frac{m}{n}$ es irreducible.

Entre $\phi(\mathbb{Q})$ y $\mathbb{N}$ podemos establcer la siguiente biyección:

$$\begin{aligned} &\mathbb{N} \stackrel{h}{\to} \phi(\mathbb{Q}) \\ &0 \mapsto h(0) = && \text{mín}(\phi(\mathbb{Q})) \\ &1 \mapsto h(1) = && \text{mín}(\phi(\mathbb{Q}) - \{h(0)\}) \\ &2 \mapsto h(2) = && \text{mín}(\phi(\mathbb{Q}) - \{h(0), h(1)\}) \\ &\vdots && \vdots \\ &n \mapsto h(n) = && \text{mín}(\phi(\mathbb{Q}) - \{h(0), h(1), \ldots h(n-1)\}) \end{aligned}$$

Como ejemplo de conjunto no numerable tenemos el de las partes de $\mathbb{N}$.

Proposición 3.11. *Sea X un conjunto. No existe ninguna aplicación epiyectiva* $h : X \to \mathscr{P}(X)$.

Demostración. Dada una aplicación $h : X \to \mathscr{P}(X)$, consideramos el subconjunto

$$X_h = \{x \in X \ : \ x \notin h(x)\}$$

Entonces, $X_h \notin \mathrm{Im}(h)$ (compruébese como ejercicio). ∎

Corolario 3.12. *El conjunto* $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ *no es numerable.*

3.2. Números reales. Hipótesis del continuo.

Vamos a probar que los números reales no se pueden contar, es decir, que $\mathbb{R}$ no es numerable. Puede probarse (no lo haremos aquí) que el conjunto de todos los números algebraicos sobre $\mathbb{Q}$ es numerable, esto significaque *la mayoría* de los números reales son trascendentes.

Como indicamos en 3.6, se dice que los conjuntos infinito-numerables, es decir, los equipotentes con $\mathbb{N}$ tienen cardinal $\aleph_0$ (alef cero). Análogamente, se dice que los conjuntos equipotentes (que admiten una biyección) con $\mathbb{R}$ tienen el cardinal del continuo $\mathfrak{c}$. Puesto que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, se dice que $\aleph_0 < \mathfrak{c}$ (observemos que ni $\aleph_0$ ni $\mathfrak{c}$ son números). George Cantor (1845-1918), probó en 1874 que $\mathbb{R}$ es equipotente al conjunto $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ de partes de $\mathbb{N}$, que como hemos probado en 3.12 no es numerable.

Otra demostración de que $\mathbb{R}$ no es numerable es la siguiente.

Teorema 3.13. $\mathbb{R}$ *no es numerable.*

Demostración. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una aplicación. Vamos a probar que f no es epiyectiva.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ escribimos la expresión decimal de $f(n)$:

$$f(n) = x_n, x_{n1}x_{n2}\dots x_{n_k}\dots$$

Definimos el número real $y = 0, y_1y_2\dots y_k\dots$ donde

$$y_n = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x_{nn} \neq 3 \\ 5 & \text{si} \quad x_{nn} = 3 \end{cases}$$

Puesto que $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \neq x_{nn}$, tenemos que $y \neq f(n)$; es decir, $y \notin \mathrm{Im}(f)$. ∎

Por analogía al caso finito, se dice que el cardinal de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ es $2^{\aleph_0}$, de manera que Cantor probó que $c = 2^{\aleph_0}$ y conjeturó que este cardinal es el siguiente a $\aleph_0$, por lo que se denota también como $\aleph_1$. Esta conjetura, conocida como **Hipótesis del continuo**, establece que no existe ningún conjunto con cardinal mayor que $\aleph_0$ (es decir, tal que admita una aplicación inyectiva $\mathbb{N} \to A$ pero no una biyectiva $\mathbb{N} \to A$) y menor que $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ (es decir, que admita una aplicación inyectiva $A \to \mathbb{R}$ pero no una biyectiva $A \to \mathbb{R}$). Cantor no logró probar esta conjetura. Conseguir una demostración era considerado a principios del siglo XX como uno de los grandes problemas de las Matemáticas, formando parte de la célebre lista de los problemas de Hilbert, expuesta por éste en la conferencia del II Congreso Internacional de Matemáticas (ICM) celebrado en París en 1910. En 1938, Kurt Gödel probó que la Hipótesis del continuo es compatible con los axiomas de la Teoría de Conjuntos. Sin embargo, en 1962 Paul Cohen probó que la negación de la Hipótesis del continuo también es compatible con los mismos axiomas. Esto significa que la Hipótesis del continuo es *indecidible* con la axiomática de la Teoría de conjuntos, de manera que puede construirse sin contradicción una Matemática que incluya como cierta la Hipótesis del continuo, y también puede construirse sin contradicción una Matemática que incluya como axioma su negación.

Bibliografía

[1] H.D. EBBINGHAUS et al. *Numbers* Graduate Texts in Mathematics, 123. Springer-Verlag, 1991.

[2] J.A. FERNÁNDEZ VIÑA. *Lecciones de Análisis Matemático I*. Ed. Tecnos, Madrid, 1981.

[3] E. LINÉS. *Principios de Análisis Matemático*. Ed. Reverté, 1983.

[4] F. SÁNCHEZ. *Cálculo I* Universidad de Extremadura. (http://matematicas.unex.es/ fsanchez/calculoI/)

[5] M. SPIVAK. *Cálculo Infinitesimal*. 2ª Edición Ed. Reverté, 1992.