Máster Universitario en Formación del Profesorado de Educación Secundaria.
Fundamentos Científicos del Currículum de Matemáticas I.

NÚMEROS RACIONALES, REALES, SUCESIONES DE CAUCHY, SUCESIONES CONVERGENTES.

1. Es bien conocido, desde la enseñanza secundaria, que "*todo número racional admite una expresión decimal finita o periódica*". Demuestra este resultado.

2. ¿Qué significa la expresión "*todo número irracional admite una expresión decimal infinita*" ? ¿Cómo se obtiene tal expresión? ¿Qué propiedades de la recta real utilizamos para llegar a este resultado?

3. Enuncia y demuestra un método para obtener una fracción que corresponde a un número racional expresado en forma decimal.

4. Sea x un número racional, escribamos $x = \frac{p}{q}$, siendo m.c.d.$(p, q) = 1$. Demuestra que si la expresión decimal de x es finita, $x = a, d_1 d_2 \dots d_r$, entonces $q = 2^n \cdot 5^m$, con $n \geq 0$ y $m \geq 0$.

5. Sea n un número natural. Prueba que la expresión decimal del número x no es finita:
$$x = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

6. Sean a y b números naturales. Probar que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ es racional si y sólo si a y b son cuadrados perfectos, es decir, $\sqrt{a}$ y $\sqrt{b}$ son números naturales.

7. Sean a, b, c y d números racionales y sea x un número irracional. Caracterizar, en función de a, b, c, d, cuándo es racional el número $\frac{ax + b}{cx + d}$.

8. Demostrar que si $\sqrt{a} + \sqrt[3]{b}$ es racional, entonces $\sqrt{a}, \sqrt[3]{b} \in \mathbb{Q}$.

9. ¿Para qué valores del número natural n el número $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}$ es irracional?

10. Sean a, b enteros positivos. Demostrar que $\sqrt{2}$ siempre está comprendido entre las dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{a+2b}{a+b}$. Es decir, si $\frac{a}{b} < \frac{a+2b}{a+b}$, entonces $\frac{a}{b} < \sqrt{2} < \frac{a+2b}{a+b}$, y si $\frac{a+2b}{a+b} < \frac{a}{b}$, entonces $\frac{a+2b}{a+b} < \sqrt{2} < \frac{a}{b}$ ¿Cuál de las dos fracciones está más próxima a $\sqrt{2}$. ?

11. Sean A y B dos conjuntos de números reales positivos, ambos acotados superiormente. Sea $C = \{x \cdot y : x \in A, y \in B\}$. Probar que C está acotado superiormente y que
$$\sup(C) = \sup(A) \cdot \sup(B)$$

12. Sean a y b números racionales positivos. Demostrar que si $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ es racional, entonces $\sqrt[3]{a}$ y $\sqrt[3]{b}$ son ambos racionales.

13. Prueba que $\sqrt{6}$ no es racional y que, cualesquiera que sean los números naturales n y m, el número $n\sqrt{2} + m\sqrt{3}$ no es racional.

14. Supongamos que $a, b, c \in \mathbb{Q}$ siendo $a \neq 0$ y $c \neq 0$.

a) ¿En algún caso, existe un número racional x tal que

$$\frac{ax+b}{\sqrt{3}+c} \in \mathbb{Q} \tag{1}$$

Si la respuesta es afirmativa, pon un ejemplo.

b) Para cada a, b y c en las condiciones del enunciado, ¿Existen valores de x irracionales que verifiquen la condición (1)? ¿Existe más de un valor posible? Razona la respuesta.

15. Dada la sucesión

$$a_n = \frac{2n+1}{n+4},$$

a) Probar que es monótona creciente y que está acotada superiormente.

b) Probar que tiene límite y calcular dicho límite.

c) Determinar un número natural ν tal que si $n \geq \nu$, la diferencia, en valor absoluto, entre x_n y el límite es menor que 10^{-3}.

16. Dada la sucesión de números racionales $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{2+2x_n}{2+x_n}$$

Probar que es monótona decreciente y está acotada inferiormente. Esto implica que es una sucesión de Cauchy de números racionales. Probar que esta sucesión no es convergente en $\mathbb{Q}$.

17. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números racionales para la que existen un número natural $k > 2$ y un número racional $0 < \lambda < 1$ tales que

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \lambda |x_{n-1} - x_{n-2}|, \ \forall n \geq k > 2$$

Demostrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

18. Dada la sucesión de números reales $\{a_n\}$ definida por $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{3-a_n}$, probar que es monótona y está acotada. Hallar su límite.

19. Sea la sucesión de números reales definida por $a_1 = \sqrt{3}$, $a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}$ para $n \geq 1$. Probar que es convergente y calcular su límite.

20. Se consideran tres sucesiones $\{a_n\}$ $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ tales que $a_n \leq b_n \leq c_n$. Probar, utilizando la definición de convergencia de una sucesión, que si $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = l$, entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = l$. Utiliza este hecho para calcular el

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+\cos^2 n)^2 + n^2}{2n^2+1}.$$

21. Definición del número e. Demostración de que el número e es irracional.

22. Se considera la sucesión de números reales:

$$x_1 = 1, \, x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 8} \quad \forall n > 1.$$

a) Probar que dicha sucesión tiene límite y calcularlo.

b) ¿Se puede asegurar que solo hay un número finito de términos de la sucesión que son menores que $3,9999999$? Razona la respuesta.

23. Se considera la sucesión:

$$a_n = \frac{-2n^3 + (-1)^n n^2}{3n^3 + 2}$$

Analiza si la sucesión es convergente. En caso afirmativo halla su límite y calcula un valor de n a partir del cual los términos de la sucesión distan del límite menos de una diezmillonésima.

24. Consideremos la sucesión:

$$x_1 = a,\ x_{n+1} = \frac{2 + x_n}{2}, \quad \forall n > 1.$$

Probar que, cualquiera que sea el valor del número real a, la sucesión $(x_n)_n$ es convergente. (Indicación: analizar los casos $a = 2$, $a > 2$ y $a < 2$).

25. Consideremos la sucesión:

$$x_1 = 2,\ x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n} \quad \forall n > 1.$$

a) Probar que dicha sucesión tiene límite y calcularlo.

b) ¿Se puede asegurar que solo hay un número finito de términos de la sucesión que son menores que $2,9999999$?

26. Calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$$

Funciones, Límites, Continuidad, Derivabilidad.

1. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$. Utiliza la definición de límite para, dado $\epsilon = 10^{-3}$, hallar un valor de δ para que se cumpla lo establecido en la definición del límite $\lim_{x\to 3/2} f(x)$.

2. ¿Cuál es el valor de $\lim_{x\to -3} \dfrac{2x^2}{x+2}$? Demuestra que en efecto, ese es el límite; para ello, encuentra una función $\delta = f(\epsilon)$ con la que se obtenga un valor admisible δ para cada ϵ que cumpla el requisito de la definición de límite.

3. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función y a un punto de acumulación de A. Demuestra que si f es continua en a entonces para toda sucesión (x_n) de puntos de A tal que $\lim_{n\to\infty}(x_n) = a$ se cumple que $f(x_n)$ es convergente y $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

4. Demuestra el recíproco del enunciado anterior. Es decir: Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función y a un punto de acumulación de A. Demuestra que si para toda sucesión (x_n) de puntos de A tal que $\lim_{n\to\infty}(x_n) = a$ se cumple que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$, entonces f es continua en a. O, lo que es equivalente, si f no es continua en a entonces existe una sucesión (x_n) de puntos de A tal que $\lim_{n\to\infty}(x_n) = a$ y la sucesión $f(x_n)$ no converge a $f(a)$.

5. Sean las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 \quad \text{si} & x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad x > 0 \\ 0 \quad \text{si} \quad x = 0 \\ -1 \quad \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Consideramos las funciones que se obtienen componiendo dichas funciones: $h_1 = f \circ g : x \to f(g(x))$ y $h_2 = g \circ f : x \to g(f(x))$.

a) Analizar la existencia de los siguientes límites y en caso de existencia, calcularlos:

$$\lim_{x\to 0^+} h_1(x), \quad \lim_{x\to 0^+} h_2(x), \quad \lim_{x\to 0^-} h_1(x), \; \lim_{x\to 0^-} h_2 f(x)$$

b) Analizar la continuidad de las funciones h_1 y h_2 para $x \in \mathbb{R}$.

6. Sea f una función real de variable real y sea a un punto interior del dominio de definición de f. Diremos que f es absolutamente derivable en a si la función $|f|$ es derivable en a. Estudiar si son ciertas o no, las siguientes proposiciones:

a) Si f es absolutamente derivable en a, entonces f es continua en a.

b) Si f es derivable en a, entonces f es absolutamente derivable en a.

c) Si f es absolutamente derivable en a, y $f(a) = 0$ entonces f es derivable en a.

g) Si f y g son absolutamente derivables en a entonces $f \cdot g$ es absolutamente derivable en a.

7. Sea f una función real de variable real y sea a un punto interior del dominio de definición de f. Diremos que f es absolutamente derivable en a si la función $|f|$ es derivable en a. Estudiar si son ciertas o no, las siguientes proposiciones:

a) Supongamos que $f(a) = 0$ y que f es derivable en a. Entonces f es absolutamente derivable en a, si y sólo si $f'(a) = 0$.

b) Si f y g son absolutamente derivable en a entonces $f + g$ es absolutamente derivable en a.

8. Dada un función real de variable real $f(x)$, se define la *derivada simétrica*, $f'_s(a)$ en un punto a mediante:

$$f'_s(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$$

a) Estudiar si existe la derivada $f'_s(0)$ de las funciones:

$f(x) = |x|, \quad f(x) = \operatorname{sen} x$

b) Demostrar que si existe la derivada ordinaria $f'(a)$ de la función f en el punto a, entonces existe la derivada simétrica $f'_s(a)$, y hallar la relación entre ambas. Enunciar el recíproco y estudiar su validez, dando una demostración o construyendo un contraejemplo.

9. Dada un función real de variable real $f(x)$, se define la *derivada simétrica*, $f'_s(a)$ en un punto a mediante:

$$f'_s(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$$

a) Estudiar si existe la derivada $f'_s(0)$ de las funciones:

$$f(x) = \sqrt{|x|}, \quad f(x) = \mathrm{e}^x, \quad f(x) = \begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x}, & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 \quad \text{si} & x = 0 \end{cases}$$

b) Demostrar que si existen las derivadas a la derecha y a la izquierda $f'_+(a)$ y $f'_-(a)$ de la función f en el punto a, entonces existe la derivada simétrica $f'_s(a)$ y hallar la relación entre ambas. Enunciar el recíproco y estudiar su validez, dando una demostración ó construyendo un contraejemplo.

10. Se considera la función[1]:

$$f(x) = \begin{cases} \exp(x^2-1) + \cos \pi x - 4x & \text{si} \quad x < 1 \\ x\,\log(x^2 - x + 1) - 3x & \text{si} \quad x \geq 1. \end{cases} \tag{2}$$

a Hallar la función derivada $f'(x)$, en todos los puntos donde exista y analizar la continuidad de $f'(x)$.

b Estudiar el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ en $\mathbb{R}$ así como la existencia de máximos y mínimos relativos.

c Determinar el número de soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ y hallar intervalos que contengan una única raíz de esa ecuación.

11. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} + x^2 - 1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ e^{x^2} + x^2 + 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a Hallar la función derivada $f'(x)$ de $f(x)$ ¿Es continua $f'(x)$? Si no lo es, ¿qué tipo de discontinuidad tiene?.

b Analizar el crecimiento, decrecimiento y puntos extremos de $f(x)$.

12. Se considera la función $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = e^{x-1} + x^3 + x + \frac{\operatorname{sen} \pi x}{\pi} - 1$$

a) Analizar el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. Hallar el mayor intervalo sobre el que se puede definir la función f^{-1}.

[1] log significa logaritmo neperiano.

b) Hallar un intervalo donde la ecuación $f(x) = 0$ tenga solución. ¿Cuántas soluciones existen de esta ecuación?

c) Calcular si es posible $(f^{-1})'(2)$

13. Sea g una función dos veces derivable en todo $\mathbb{R}$ y tal que $g(0) = g'(0) = 0$ y $g''(0) = 2$. Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 \quad \text{si} & x = 0 \end{cases}$$

Calcular $f'(0)$.

14. Analizar la existencia de derivadas sucesivas para todo valor de $x \in \mathbb{R}$ de las funciones

$$f(x) = |x|^3; \quad g_n(x) = |x|^n \operatorname{sen}(1/x), \ x \neq 0, \ g_n(0) = 0, \ n \in \mathbb{N}.$$

15. Se define la función $f(x) = \exp(-1/x)$ si $x > 0$ y $f(x) = 0$ si $x \leq 0$. Probar que f es continua para todo valor de x. Calcular las derivadas f', f'', f'' en $x = 0$. Probar que la derivada n-ésima de f para $x > 0$ es de la forma:

$$\frac{\exp(-1/x)}{x^{2n}} P_n(x)$$

donde $P_n(x)$ es un polinomio. Deducir que en $x = 0$ existen las derivadas sucesivas de f y todas valen cero.

16. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} xe^x + 1 & \text{si} \quad x \leq 0. \\ \dfrac{x^3}{3} + ax^2 + bx + c & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Hallar los valores de a, b y c para que la función sea continua y derivable para todo $x \in \mathbb{R}$ y tenga un extremo (máximo o mínimo) en $x = 2$. Estudiar el crecimiento, decrecimiento, máximos mínimos absolutos y relativos de $f(x)$ en el intervalo $[-2, 3]$.

17. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \left(4x - \dfrac{x^2}{2}\right) \ln|x| - \dfrac{x^2}{4} & \text{si} \quad x \neq 0. \\ 0 \quad \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Analizar si $f(x)$ tiene derivada en todo punto. Escribir la función derivada. Estudiar el crecimiento y decrecimiento y hallar los máximos y mínimos relativos de $f(x)$. Determinar el número de soluciones de la ecuación $f(x) = 0$.

18. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{1 + x^2} & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 2 \\ x^3 - bx^2 + 13 & \text{si} \quad 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

a) Halla la relación que hay entre a y b si se sabe que f es continua en $[-2, 4]$.

b) Teniendo en cuenta el apartado anterior, hallar los valores de a y b si se sabe que la función es derivable en $(-2, 4)$.

c) Calcula $f'(x)$ y estudia el crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos absolutos y relativos de f en el intervalo $[-2, 4]$.

19. Considera una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades:

i) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ para cualesquiera x_1, x_2.

ii) $f(0) \neq 0$.

iii) $f(x)$ es derivable en 0 y $f'(0) = 1$.

(a) Demuestra que $f(0) = 1$.

(b) Demuestra que $f(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(c) Utilizando la definición de derivada, prueba que $f(x)$ es derivable y $f'(x) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(d) Sea g otra función que satisface las condiciones i, ii, y iii, y considera la función:

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Demuestra que $k(x)$ es derivable en todo $\mathbb{R}$ y obtén $k'(x)$. ¿Qué relación hay entre f y g?

(e) ¿Conoces alguna función f que satisfaga las condiciones i, ii y iii? ¿Puede haber más de una?

20. Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables en todo $\mathbb{R}$ y tales que:

    1) $f(0) = 1$, $g(0) = 0$

    2) $f'(x) = -g(x)$, $g'(x) = f(x)$

    a) Sea $h(x) = f^2(x) + g^2(x)$. Calcula $h'(x)$ y utiliza el resultado obtenido para probar que $f^2(x) + g^2(x) = 1$.

    b) Sean $F(x)$ y $G(x)$ otras funciones derivables en todo $\mathbb{R}$ que cumplen las condiciones **1)** y **2)**. Considera la función $k(x) = (f(x) - F(x))^2 + (g(x) - G(x))^2$. Calcula $k'(x)$ y utiliza el resultado obtenido para decidir la relación que existe entre $f(x)$ y $F(x)$ y entre $g(x)$ y $G(x)$.

    c) ¿Conoces algún par de funciones f y g que satisfagan **1)** y **2)**? ¿Puede haber otras?

21. Se considera la función $f(x) = 3x^4 - 11x^2 + x + 2$. Utilizando los teoremas de las funciones continuas en un intervalo y los teoremas de las funciones continuas y derivables en intervalos, se pide:

    a) Hallar intervalos donde la función $f(x)$ tiene un extremo y analizar si es un máximo o un mínimo.

    b) Hallar los puntos donde $f(x)$ tiene pendiente máxima y pendiente mínima.

22. Demostrar que la función $f(x) = x^n + px + q$ con $n \geq 2$ entero y p, q reales no puede tener más de dos soluciones reales cuando n par, ni más de tres cuando n impar.

23. Determina el valor del número real k para que exista y sea finito el siguiente límite:

    $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} + kx}{x - sen(x)}$$

    Calcula el límite para ese valor de k.

24. Sea $f : [3, 5] \to R$ una función continua que es derivable en $(3, 5)$ y tal que $f(3) = 6$ y $f(5) = 10$.

    (a) Consideremos la función $g : [3, 5] \to R$ definida por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. Demostrar que existe un $c \in (3, 5)$ tal que $g'(c) = 0$. Deducir que $f'(c)c - f(c) = 0$.

    (b) Demostrar que entre todas las rectas tangentes a la gráfica de f, al menos una de ellas pasa por el origen de coordenadas.

    (c) Sea $[a, b]$ un intervalo que no contiene al 0. Sea $h : [a, b] \to R$ una función continua que es derivable en (a, b) tal que $\dfrac{h(a)}{a} = \dfrac{h(b)}{b}$. Demostrar que existe un $x_0 \in (a, b)$ tal que la tangente a la gráfica de h en el punto $(x_0, h(x_0))$ pasa por $(0, 0)$.

25. Demostrar que cualesquiera que sean los números reales $x < y$ se cumple que $cos(y) - cos(x) \leq y - x$.

26. Demuestra que la ecuación $e^x + x^3 = 0$ tiene una y sólo una solución real. Enuncia los teoremas que utilices para demostrarlo.

27. Se considera la función $f(x)$ definida en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x \ln |x| & \text{si} \quad x \neq 0. \\ 0 \quad \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

a) Demuestra que $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Estudia la derivabilidad de $f(x)$.

c) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y los extremos relativos.

d) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x)$ y los puntos de inflexión.

e) Estudia el signo de $f(x)$, los puntos de corte de la gráfica con el eje OX, y representa, de manera aproximada, la gráfica de $f(x)$, utilizando los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

28. Se considera la función $f(x)$ definida en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si} \quad |x| \leq 1 \\ \frac{1}{|x|} \quad \text{si} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

a) Calcular los valores de a, b y c para que la función sea continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

Para los valores de a, b y c obtenidos:

b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y los extremos relativos.

c) La función derivada $f'(x)$ ¿es a su vez derivable en todo $\mathbb{R}$? Justifica la respuesta.

d) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x)$ y los puntos de inflexión.

e) Calcula $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y representa, de manera aproximada, la gráfica de $f(x)$.