Fundamentos Científicos del Currículum I

Números reales

Definición axiomática de los números reales

Los números reales forman conjunto $\mathbb{R}$ en el que están definidas dos operaciones, llamadas suma y producto:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{+} \mathbb{R}\ (x, y) \mapsto x + y, \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y$$

y una relación de orden que lo dotan de estructura de cuerpo conmutativo ordenado.

Definición axiomática de los números reales

Los números reales forman conjunto $\mathbb{R}$ en el que están definidas dos operaciones, llamadas suma y producto:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{+} \mathbb{R}\ (x, y) \mapsto x + y, \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y$$

y una relación de orden que lo dotan de estructura de cuerpo conmutativo ordenado.

La suma y el producto satisfacen los siguientes axiomas.

Definición axiomática de los números reales

Los números reales forman conjunto $\mathbb{R}$ en el que están definidas dos operaciones, llamadas suma y producto:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{+} \mathbb{R}\ (x, y) \mapsto x + y, \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y$$

y una relación de orden que lo dotan de estructura de cuerpo conmutativo ordenado.

La suma y el producto satisfacen los siguientes axiomas.

Axioma I. Conmutatividad: para todo par de elementos $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$x + y = y + x, \quad x \cdot y = y \cdot x$$

Axioma II. Asociatividad: para toda terna de elementos $x, y, z \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$x + (y + z) = (x + y) + z, \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

Axioma III. Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma: para toda terna de elementos $x, y, z \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$x(y + z) = xy + xz$$

Axioma IV. Existencia de elementos neutros: existen en $\mathbb{R}$ dos elementos distintos, que se denotan 0 y 1 tales que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$x + 0 = 0 + x = x, \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = 1$$

Axioma V. Existencia de elemento opuesto para la suma y de inverso para el producto:

a) Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un elemento $y \in \mathbb{R}$ tal que

$$x + y = y + x = 0$$

Puede probarse que para cada x este elemento es único. Se denota $-x$.

b) Para cada $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, existe un elemento $y \in \mathbb{R}$ tal que

$$xy = yx = 1$$

Puede probarse que para cada $x \neq 0$ este elemento es único. Se denota x^{-1}.

Axioma V. Existencia de elemento opuesto para la suma y de inverso para el producto:

a) Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un elemento $y \in \mathbb{R}$ tal que

$$x + y = y + x = 0$$

Puede probarse que para cada x este elemento es único. Se denota $-x$.

b) Para cada $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, existe un elemento $y \in \mathbb{R}$ tal que

$$xy = yx = 1$$

Puede probarse que para cada $x \neq 0$ este elemento es único. Se denota x^{-1}.

Por satisfacer estos cinco axiomas, $\mathbb{R}$ es un cuerpo conmutativo.

Axiomas de orden.

$\mathbb{R}$ contiene un subconjunto, que se denota P ó $\mathbb{R}^+$, y sus elementos se llaman positivos, cumpliendo:

Axiomas de orden.

$\mathbb{R}$ contiene un subconjunto, que se denota P ó $\mathbb{R}^+$, y sus elementos se llaman positivos, cumpliendo:

Axioma VI. Propiedad de tricotomía: cada elemento $x \in \mathbb{R}$ satisface una y solo una de las siguientes posibilidades:

$$x \in P; \qquad x = 0, \qquad -x \in P$$

Axiomas de orden.

$\mathbb{R}$ contiene un subconjunto, que se denota P ó $\mathbb{R}^+$, y sus elementos se llaman positivos, cumpliendo:

Axioma VI. Propiedad de tricotomía: cada elemento $x \in \mathbb{R}$ satisface una y solo una de las siguientes posibilidades:

$$x \in P; \qquad x = 0, \qquad -x \in P$$

Axioma VII. Estabilidad de las operaciones: si $x, y \in P$ entonces

$$x + y \in P, \qquad xy \in P.$$

A partir de conjunto P se define en $\mathbb{R}$ una relación de orden:

$$x \leq y \text{ si } x = y \text{ o si } y - x \in P.$$

Este orden es compatible con la suma:

$$x < y \implies x + z < y + z, \forall z$$

y con el producto:

$$x < y,\ z > 0, \implies xz < yz.$$

$\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado.

Axioma VIII. De completitud de Dedekind. Si A y B son subconjuntos que forman una partición de $\mathbb{R}$ tal que $a < b$ para cada $a \in A$ y $b \in B$, entonces existe un número real $c \in \mathbb{R}$ (que es único) que cumple:

- si $x \in \mathbb{R}$ y $x < c$ entonces $x \in A$
- si $x \in \mathbb{R}$ y $x > c$ entonces $x \in B$.

Es decir,

- o bien $A = \{x \in R : x \leq c\}$ y $B = \{x \in R : x > c\}$;
- o bien $A = \{x \in R : x < c\}$ y $B = \{x \in R : x \geq c\}$.

Sucesiones convergentes en $\mathbb{Q}$

Definición
Se dice que una sucesión (x_n) de números racionales converge a un número racional l y se escribe $\lim_{n\to\infty}(x_n) = l$, o también, $(x_n) \to l$, si

$$\forall\epsilon > 0,\ \epsilon \in \mathbb{Q},\ \exists\nu \in \mathbb{N}\ :\ n > \nu \implies |x_n - l| < \epsilon$$

Ejemplos

1. La sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ converge a 0.
2. La sucesión $((-1)^n)$ no es convergente.

Ejercicio
Compruébese que si una sucesión tiene límite, éste es único.

Proposición

1. Toda sucesión convergente es acotada.
2. La suma (respectivamente el producto) de sucesiones convergentes es una sucesión convergente y su límite es la suma (resp. el producto) de sus límites.
3. Sea (x_n) una sucesión convergente. Si $\lim_{n\to\infty}(x_n) = l \neq 0$ y $x_n \neq 0.\ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ es convergente y
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_n}\right) = \left(\frac{1}{l}\right)$$

Sucesiones de Cauchy

Definición
Se dice que una sucesión de números racionales (x_n) es de Cauchy si

$$\forall\epsilon > 0, \epsilon \in \mathbb{Q}, \exists\nu \in \mathbb{N}\ :\ p, q \geq \nu \implies |x_p - x_q| < \epsilon$$

Proposición

1. Toda sucesión convergente es de Cauchy.
2. Toda sucesión de Cauchy es acotada.
3. Toda sucesión creciente y acotada superiormente es de Cauchy.
4. Toda sucesión decreciente y acotada inferiormente es de Cauchy.

La sucesión
$$x_1 = 2,\quad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$$
es de Cauchy y no es convergente en $\mathbb{Q}$:
$$x_1 = 2,\quad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$$

Proposición

1. La suma y el producto de dos sucesiones de Cauchy es una sucesión de Cauchy.
2. Las sucesiones de Cauchy de números racionales forman un subanillo del anillo de todas las sucesiones de números racionales.

Definición

Diremos que una sucesión de Cauchy de números racionales (x_n) es nula si es convergente y su límite es cero.

Denotemos por $\mathcal{C}$ al conjunto de sucesiones de Cauchy de números racionales y por $\mathcal{N}$ al subconjunto de todas las sucesiones nulas.

Ejercicio

Comprueba que la suma de dos sucesiones nulas es una sucesión nula, y que el producto de una sucesión nula por una sucesión de Cauchy es una sucesión de Cauchy nula.

Esto significa que $\mathcal{N}$ es un ideal del anillo $\mathcal{C}$.

Definición

Diremos que una sucesión de Cauchy de números racionales (x_n) es positiva existen un número racional positivo $r > 0$, y un número natural n_0 tales que

$$\{x_n \,:\, n \geq n_0\} \subset [r, \infty)$$

Definición

Diremos que una sucesión de Cauchy de números racionales (x_n) es negativa existen un número racional positivo $r > 0$, y un número natural n_0 tales que

$$\{x_n \,:\, n \geq n_0\} \subset (-\infty, -r]$$

Denotaremos por $\mathcal{C}^+$ al conjunto de las sucesiones de Cauchy positivas y por $\mathcal{C}^-$ al conjunto de las sucesiones de Cauchy negativas

Proposición

Cada sucesión de Cauchy de números racionales pertenece a uno y solo uno de los subconjuntos $\mathcal{C}^+$, $\mathcal{C}^-$ o $\mathcal{N}$. Es decir:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \sqcup \mathcal{C}^- \sqcup \mathcal{N}$$

Ejercicio

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy no nula. Sabemos que entonces (x_n) es positiva o negativa, es decir que existen un número racional $r > 0$ y un número natural n_0 tales que o bien $\{x_n | n > n_0\} \subset [r, +\infty)$ o bien $\{x_n | n > n_0\} \subset (-\infty, -r]$.
Demuestra que la sucesión definida por:

$$y_n = 1, \text{ si } n \leq n_0, \quad y_n = \frac{1}{x_n} \text{ si } n > n_0$$

es de Cauchy y que $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = 1$.

Equivalencia de sucesiones de Cauchy

Definición

Diremos que dos sucesiones de Cauchy de números racionales (x_n) e (y_n) son equivalentes si la sucesión $(x_n - y_n)$ converge a cero. Lo denotaremos:

$$(x_n) \sim (y_n) \iff \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$$

Ejemplos

1. Si $\lim_{n\to\infty}(x_n) = 0$, entonces $\forall (y_n) \in \mathcal{C}$ se cumple que $(x_n + y_n) \sim (y_n)$.
2. Si $\lim_{n\to\infty}(x_n) = 1$, entonces $\forall (y_n) \in \mathcal{C}$ se cumple que $(x_n \cdot y_n) \sim (y_n)$.

Como ejercicio, compruébense las siguientes afirmaciones.

1. La relación $(x_n) \sim (y_n) \iff \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ es de equivalencia. La clase de equivalencia de (x_n) es
$$[(x_n)] = (x_n) + \mathcal{N}.$$
2. Dado un número racional, x, la clase de equivalencia de la sucesión constante (x) es
$$[(x)] = \{(x_n) \in \mathcal{C} \ : \ \lim_{n\to\infty}(x_n) = x\}$$
3. Si $(x_n) \sim (x'_n)$ e $(y_n) \sim (y'_n)$ entonces:
$$(x_n + y_n) \sim (x'_n + y'_n) \ \text{ e } \ (x_n \cdot y_n) \sim (x'_n \cdot y'_n)$$
4. Las operaciones
$$[(x_n)] + [(y_n)] := [(x_n + y_n)] \ \text{ y } \ [(x_n)] \cdot [(y_n)] := [(x_n \cdot y_n)]$$
definen una estructura de anillo conmutativo con unidad en el conjunto cociente $\mathcal{C}/\sim$. El elemento cero es $[(0)]$ y el elemento unidad es $[(1)]$.

5. La aplicación
$$i : \mathbb{Q} \to \mathcal{C}/\sim \quad x \mapsto [(x)]$$
es un morfismo de anillos (es decir, $i(x - y) = i(x) - i(y)$, $i(x \cdot y) = i(x) \cdot i(y)$, $i(1) = [(1)]$) inyectivo.
6. Si (x_n) es una sucesión positiva (respectivamente, negativa) y $(x_n) \sim (x'_n)$ entonces (x'_n) es también una sucesión positiva (respectivamente, negativa).

Proposición

El anillo $\mathcal{C}/\sim$ es un cuerpo.

Demostración

Sea $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \neq [(0)_{n\in\mathbb{N}}]$. Sabemos que existen un número racional $r > 0$ y un número natural n_0 tales que o bien $\{x_n | n > n_0\} \subset [r, +\infty)$ o bien $\{x_n | n > n_0\} \subset (-\infty, \ -r]$. Por el Ejercicio 3 sabemos que la sucesión definida por:

$$y_n = 1, \text{ si } n \leq n_0, \quad y_n = \frac{1}{x_n} \text{ si } n > n_0$$

es de Cauchy y que $(x_n \cdot y_n) \to 1$. Luego $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(1)_{n\in\mathbb{N}}]$

Definiciones

En el cuerpo $R = \mathcal{C}/\sim$ llamaremos positivos, a los elementos del conjunto P:

$$P = \{[(x_n)] \ : \ (x_n) \in \mathcal{C}^+\} =$$

$$\{[(x_n)] \ : \ \exists r > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} \ : n > \nu \implies x_n \geq r\}$$

Diremos que un elemento $[(x_n)]$ de R es negativo si $(x_n) \in \mathcal{C}^-$.

Observemos que $(x_n) \in \mathcal{C}^+$ sí y sólo sí $(-x_n) \in \mathcal{C}^-$. Luego, el conjunto de los elementos negativos de R es:

$$-P = \{[(x_n)] \ : (x_n) \in \mathcal{C}^-\} = \{[(x_n)] \ : \ -[(x_n)] \in P\}$$

Hemos probado en la Proposicion 4 que toda sucesión de Cauchy que no converge a cero es positiva o negativa, luego todo elemento no nulo de R es positivo o negativo:

$$R = \{0\} \sqcup P \sqcup -P \quad \text{(Axioma VI)}$$

Es sencillo probar que la suma y el producto de dos elementos de P son elementos de P; es decir, que R satisface el Axioma VII.

Definición

Dados $x = [(x_n)]$ e $y = [(y_n)]$ elementos de R, diremos que $x \leq y$ si $x = y$ o $y - x \in P$.

Definición

Dados $x = [(x_n)]$ e $y = [(y_n)]$ elementos de R, diremos que $x \leq y$ si $x = y$ o $y - x \in P$.

Es sencillo comprobar que se trata de una relación de orden total compatible con la suma y el producto, es decir, $(R, +, \cdot, \leq)$ es un cuerpo ordenado.

Definición

Dados $x = [(x_n)]$ e $y = [(y_n)]$ elementos de R, diremos que $x \leq y$ si $x = y$ o $y - x \in P$.

Es sencillo comprobar que se trata de una relación de orden total compatible con la suma y el producto, es decir, $(R, +, \cdot, \leq)$ es un cuerpo ordenado.

La aplicación $i : \mathbb{Q} \to R$, $i(x) = [(x)]$ conserva el orden, es decir, $x \leq y$ si y solo si, $i(x) \leq i(y)$. Así, el orden definido en R extiende al orden de los números racionales.

Proposición

El cuerpo ordenado $(R = \mathcal{C}/\sim, +, \cdot, \leq)$ satisface el Axioma VIII o Axioma de Dedekind, es decir:
Si A y B son dos subconjuntos no vacíos de R tales que:

- $R = A \sqcup B$
- $\forall a \in A, \forall b \in B$ se cumple que $a < b$

entonces existe un único $c \in R$ tal que:

- o bien $A = \{x \in R : x \leq c\}$ y $B = \{x \in R : x > c\}$;
- o bien $A = \{x \in R : x < c\}$ y $B = \{x \in R : x \geq c\}$.

Demostración

UNICIDAD: Si dos elementos distintos c_1 y c_2 satsifacen las condiciones del enunciado, entonces como $c_1 < \frac{c_1+c_2}{2} < c_2$, tendríamos que $\frac{c_1+c_2}{2} \in A \cap B$, pero $A \cap B = \emptyset$.
EXISTENCIA:
En primer lugar, veamos que en A hay números racionales.
Dado $x = [(x_n)] \in R$ existe algún racional positivo q tal que $-q \leq x \leq q$: por ser (x_n) de Cauchy, es acotada, luego existe un racional positivo q tal que $-q \leq x_n \leq q$, $\forall n \in \mathbb{N}$, luego $-q \leq x \leq q$. Entonces, como A no es vacío, podemos tomar $a \in A$, y si q es un número racional positivo tal que $-q < a < q$, entonces $-q \in A$ (pues $-q$ no puede pertenecer a B por ser menor que un elemento de A).
Análogamente se comprueba que en B hay números racionales.

Tomemos pues números racionales $a_1 \in A$ y $b_1 \in B$.
Si $\frac{a_1+b_1}{2}$ pertenece a A, tomamos $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ y $b_2 = b_1$.
Si $\frac{a_1+b_1}{2}$ no pertenece a A, entonces pertenece a B y tomamos $a_2 = a_1$ y $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$.
Con a_2 y b_2 procedemos de la misma forma y así construimos dos sucesiones de números racionales, una creciente, (a_n), en A y otra decreciente, (b_n).
La sucesión (a_n) es creciente y está acotada superiormente, y la sucesión (b_n) es decreciente y está acotada inferiormente, luego ambas son de Cauchy.
Además, $|a_n - b_n| \leq \frac{1}{2^n}|a_1 - b_1|$, luego $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.
Esto significa que ambas sucesiones y definen el mismo elemento $c = [(a_n)] = [(b_n)]$ de R, que pertenecerá a A o a B.

Si $c \in A$, entonces todo elemento menor que c estará también en A, por lo que si probamos que todo elemento mayor que c está en B quedará probado que $A = \{x \in R : x \leq c\}$ y $B = \{x \in R : x > c\}$. Si $c \in B$, entonces de manera análoga se prueba que $A = \{x \in R : x < c\}$ y $B = \{x \in R : x \geq c\}$.
Supongamos que $c \in A$ y sea $x = [(x_n)] \in R$ un elemento tal que $x > c$. Si probamos que x es mayor que algún elemento b de B podemos concluir que $x \in B$.
Como $x = [(x_n)] > c = [(b_n)]$, es decir, $[(x_n - b_n)] > 0$, existen un número racional $r > 0$ y un natural ν tales que $x_n - b_n \geq r$, $\forall n \geq \nu$.

Por ser (x_n) una sucesión de Cauchy, dado $\epsilon = \frac{r}{2}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, si $p, q > m$ entonces $|x_p - x_q| < \frac{r}{2}$.
Luego, si $n_0 = maximo\{\nu, m\}$, tenemos:

$$b_{n_0} \leq x_{n_0} - r < x_n + \frac{r}{2} - r = x_n - \frac{r}{2},\ \forall n > n_0$$

Es decir, $x_n - b_{n_0} > \frac{r}{2}$, $\forall n > n_0$. Esto significa que $(x_n) - b_{n_0} > 0$, es decir, $b_{n_0} < x = [(x_n)]$. Luego, $x \in B$.

Definición
Llamaremos cuerpo de los números reales al cuerpo ordenado $(\mathcal{C}/\sim, +, \cdot, \leq)$ y lo denotaremos $\mathbb{R}$.

Algunas propiedades de los números reales

- El orden de $\mathbb{R}$ es arquimediano, es decir, dado un número real x, existe un número natural n tal que $|x| < n$.
- $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, es decir, para toda pareja de números reales tales que $x < y$ existe un número racional q tal que $x < q < y$. Es decir, en todo intervalo (x, y) hay algún número racional.
- Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente tiene supremo.
- Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente tiene ínfimo.
- Si a es un número real mayor que cero, entonces, para todo $n \geq 2$ existe un único número real positivo b tal que $b^n = a$.

- Todo número real es límite de una sucesión de Cauchy de números racionales.
- En $\mathbb{R}$, toda sucesión de Cauchy es convergente.
- En $\mathbb{R}$, toda sucesión creciente y acotada superiormente es convergente.
- En $\mathbb{R}$, toda sucesión decreciente y acotada inferiormente es convergente.