Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

6 Cálculo I

Funciones reales de variable real
Límites y continuidad

«Si he visto más lejos es porque estoy sentado sobre los hombros de gigantes». *Isaac Newton*

08 · 12 · 2021

Funciones de una variable real. Límite en un punto

Para una función $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, se llama dominio de f al conjunto A (que es donde está definida la función). Se llama imagen de f al conjunto de valores que va tomando la función, $\operatorname{Im}(f) = f(A) = \{f(x) : x \in A\}$. Se dice que f es una función real, ya que su imagen está en $\mathbb{R}$, y de variable real, pues está definida en un subconjunto A de $\mathbb{R}$. Se suele escribir

$$f : x \in A \subset \mathbb{R} \longrightarrow f(x) \in \mathbb{R}.$$

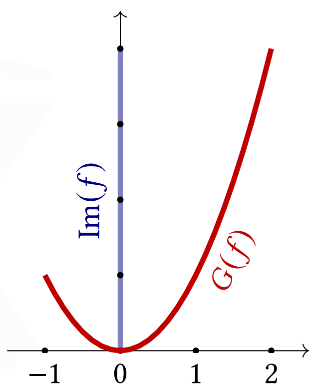
Estas funciones se representan dibujando su gráfica $G(f) = \{\big(x, f(x)\big) \in \mathbb{R}^2 : x \in A\}$, que es un conjunto del plano $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo. La función $f : x \in [-1,\ 2) \longrightarrow f(x) = x^2 \in \mathbb{R}$ tiene como dominio el intervalo $[-1,\ 2)$. Su imagen es el conjunto de valores que va tomando la función:

$$\operatorname{Im}(f) = \{x^2 : x \in [-1, 2)\} = [0, 4).$$

Su gráfica es el conjunto de puntos del plano

$$G(f) = \{\big(x, x^2\big) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 2)\}.$$



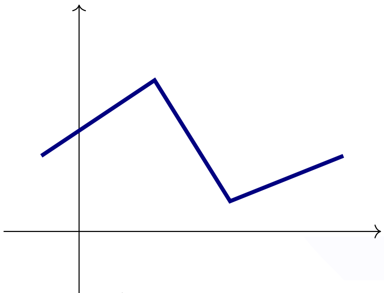
Entre todas las funciones reales se estudiarán casos especiales como

a) funciones continuas, cuyas gráficas son conjuntos de "una sola pieza",

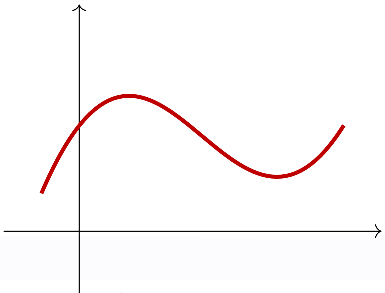
b) funciones diferenciables o derivables, cuyas gráficas son "de una sola pieza" y además con tangente en cada punto, y

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

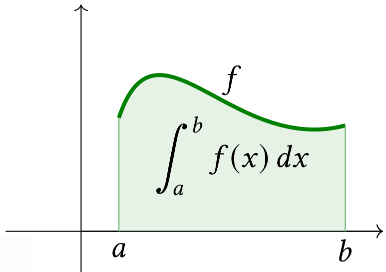
c) funciones integrables, que permiten calcular el área subyacente a la gráfica.



a) función continua



b) función derivable



c) función integrable

Operaciones con funciones. Dadas $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones reales de una variable real, se pueden definir operaciones con ellas, como

1) Adición y multiplicación:

$$f+g : x \in A \cap B \subset \mathbb{R} \longrightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) \in \mathbb{R}$$

$$f \cdot g : x \in A \cap B \subset \mathbb{R} \longrightarrow (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \in \mathbb{R}$$

definidas siempre que $A \cap B \neq \varnothing$

2) Multiplicación por escalares: $\lambda \cdot f : x \in A \subset \mathbb{R} \longrightarrow (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) \in \mathbb{R}$

Se designa mediante $\mathscr{F} = \mathscr{F}(A, \mathbb{R})$ al conjunto de todas las funciones de A en $\mathbb{R}$. En este conjunto $\mathscr{F}$ la adición es asociativa, conmutativa, tiene elemento neutro (la función constante 0) y cada elemento tiene opuesto. La multiplicación es asociativa, conmutativa, tiene elemento unidad (la función constante 1), aunque no existe inverso en general, salvo para funciones que no se anulen nunca. La multiplicación por escalares verifica

$$\begin{aligned}
(\lambda+\mu) \cdot f &= \lambda \cdot f + \mu \cdot f \\
\lambda \cdot (f+g) &= \lambda \cdot f + \lambda \cdot g \\
(\lambda \cdot \mu) \cdot f &= \lambda \cdot (\mu \cdot f) \\
1 \cdot f &= f.
\end{aligned}$$

Se tiene entonces (aquí $\cdot$ es la multiplicación y $\cdot_e$ la multiplicación por escalares)

- $(\mathscr{F}, +)$ es un grupo conmutativo,
- $(\mathscr{F}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo y unitario,
- $(\mathscr{F}, +, \cdot_e)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Por ejemplo, si $A = \mathbb{N}$ entonces $(\mathscr{F}, +, \cdot_e)$ es el espacio vectorial de todas las sucesiones en $\mathbb{R}$,
- $(\mathscr{F}, +, \cdot, \cdot_e)$ es un álgebra conmutativa y unitaria sobre $\mathbb{R}$.

Límite de una función en un punto. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea a un punto de acumulación de A. Se dice que $b \in \mathbb{R}$ es límite de f en a si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ : \ x \in A,\ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - b| < \varepsilon$$

y se escribe

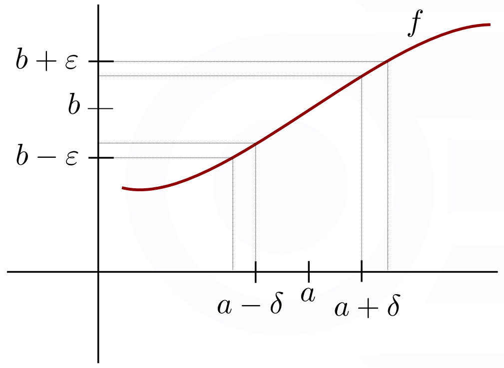
$$b = \lim_{x \to a} f(x).$$

También se puede escribir como

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \; : \; \left\{ \begin{array}{c} x \in A \cap (a-\delta, a+\delta) \\ x \neq a \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

o escrito de otra forma

$$\forall V = (b-\varepsilon, b+\varepsilon) \quad \exists U = (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} \; : \; f\big(U \cap A\big) \subset V$$

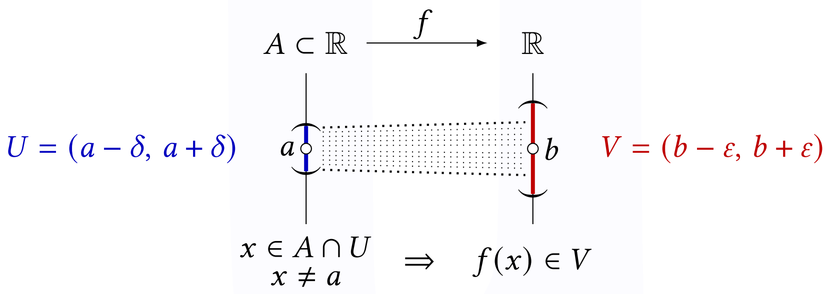


En la definición se escribe $0 < |x-a| < \delta$, que es lo mismo que decir $|x-a| < \delta$ y $x \neq a$.

Abreviadamente $[\, x \to a \Rightarrow f(x) \to b \,]$ significa que $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

La función f no tiene porqué estar definida en el punto a. Se trata de un punto de acumulación y puede estar o no en A. Pero si $a \in A$ el valor de f en a es irrelevante en la definición de límite.

En lugar de ejes coordenados, se puede utilizar otra representación del límite como aparece a continuación: $b = \lim_{x\to a} f(x)$ si dado cualquier intervalo V que rodea a b existe otro intervalo U que rodea a a tal que las imágenes de los elementos de este último (sólo los que están en A y son distintos de a) van todas al intervalo V. Lógicamente, a medida que se elige V más pequeño, será necesario elegir U más pequeño.



En la definición de límite se exige que a sea un punto de acumulación de A. Caso de no serlo, la definición carece de sentido.

Proposición. *Si f tiene límite en a, entonces dicho límite es único.*

Demostración. Si existen dos valores b y c que cumplen la definición, entonces dado $\varepsilon > 0$

$$\exists \delta_1 > 0 \; : \; x \in A,\; 0 < |x-a| < \delta_1 \;\Rightarrow\; |f(x) - b| < \varepsilon$$

$$\exists \delta_2 > 0 \; : \; x \in A,\; 0 < |x-a| < \delta_2 \;\Rightarrow\; |f(x) - c| < \varepsilon$$

Así, para $0 < |x-a| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ se tiene

$$|b-c| \;\leq\; |b - f(x)| \;+\; |f(x) - c| \;<\; 2\varepsilon$$

y así se llega a que $b = c$.

Demostración alternativa: si hay dos límites $b \neq c$ entonces dados $V_b = (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ y $V_c = (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ disjuntos $V_b \cap V_c = \varnothing$ (se elige ε suficientemente pequeño para que así sea) debería existir $U = (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ verificando $f\big(U \cap A\big) \subset V_b$ y $f\big(U \cap A\big) \subset V_c$, lo cual es imposible. $\square$

Ejemplo: si $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función constante, por ejemplo $f(x) = 42$ para todo $x \in A$, entonces para cada $a \in A'$ se tiene $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 42$. La comprobación es muy simple: $|f(x)-42| = 0$ para cualquier x, y por tanto $|f(x)-42| < \varepsilon$ para cualquier ε que se haya elegido previamente. Para las funciones constantes, en la definición de límite se puede elegir como δ cualquier número positivo.

Ejemplo: la función $f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x) = 3x$ verifica $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 12$. Para probarlo se hace

$$|f(x) - 12| \;=\; |3x - 12| \;=\; 3\,|x-4|.$$

Como consecuencia, es posible hacer pequeño a $|f(x) - 12|$ haciendo pequeño a $|x-4|$. En concreto, para cada $\varepsilon > 0$ se elige $\delta = \varepsilon/3$ y así $0 < |x-4| < \delta \Rightarrow |f(x)-12| < \varepsilon$. Esto significa que $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 12$.

Ejemplo: para la función $f : x \in [-1, 5) \longrightarrow f(x) = x^2 \in \mathbb{R}$ se puede calcular el límite en $a = 2$, y comprobar que dicho límite vale $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$. Para ello hay que probar que $|f(x) - 4|$ se hace arbitrariamente pequeño a medida que $|x-2|$ se hace pequeño (con $x \neq 2$). No hay más que escribir (se utiliza el hecho de que si $x \in [-1, 5)$ entonces $|x+2| \leq |x|+2 \leq 7$)

$$|f(x) - 4| \;=\; |x^2 - 4| \;=\; |x+2|\cdot|x-2| \;\leq\; 7\,|x-2|.$$

Así, dado $\varepsilon > 0$ se elige $\delta = \varepsilon/7$ y se tiene

$$0 < |x-2| < \delta \;\Rightarrow\; |x^2-4| < \varepsilon.$$

En consecuencia, $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$.

También se puede hablar de límite en $a = 5$, pues de nuevo se trata de un punto de acumulación del dominio. Para verificar que dicho límite es $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = \lim\limits_{x\to 5} x^2 = 25$ se trata de ver si $|f(x)-25|$ se hace arbitrariamente pequeño a medida que $|x-5|$ se hace pequeño (con $x \neq 5$). Se tiene

$$|f(x) - 25| \;=\; |x^2 - 25| \;=\; |x+5|\cdot|x-5| \;\leq\; 10\,|x-5|.$$

Por tanto, dado $\varepsilon > 0$ se elige $\delta = \varepsilon/10$ y se tiene

$$0 < |x-5| < \delta \;\Rightarrow\; |x^2-25| < \varepsilon.$$

En consecuencia, $\lim\limits_{x\to 5} x^2 = 25$.

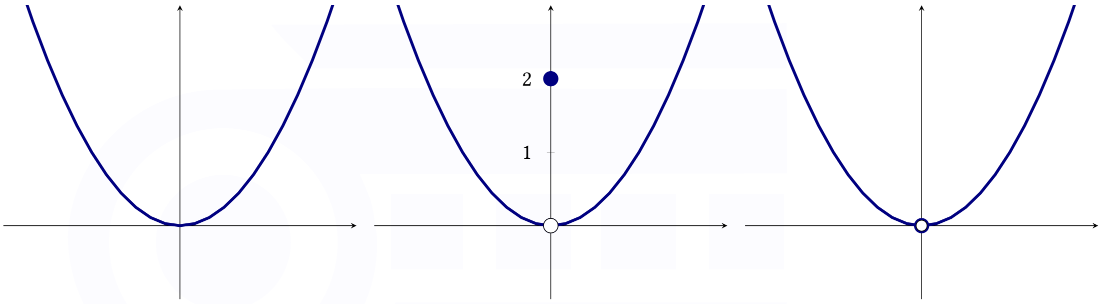
Ejemplo: hay funciones, como la función de Dirichlet

$$f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

que no tienen límite en ningún punto. Por ejemplo, en $a = \pi$, no es posible encontrar un valor b que cumpla $|f(x) - b| < \varepsilon$ para valores x próximos a π. Según sea x racional o no se tiene $f(x) = 1$ o $f(x) = 0$ y así $|f(x)-b| < \varepsilon$ para todos ellos es imposible. No existe límite en π. La misma idea prueba que no hay límite en ningún otro punto.

Ejemplo: las funciones

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x \neq 0 & \rightsquigarrow & x^2 \\ 0 & \rightsquigarrow & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \xrightarrow{h} & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & x^2 \end{array}$$



verifican

$$0 = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} h(x).$$

Estos ejemplos muestran la intrascendencia en la definición de límite de lo que haga la función en el punto a. La existencia (o inexistencia) del límite es independiente del valor, si es que existe, de f en a. La definición de $\lim_{x\to a} f(x)$ se refiere a qué hacen los valores $f(x)$ en los puntos próximos y distintos al punto a.

Ejemplo: para calcular $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ hay que encontrar qué valor b hay que colocar en la expresión $\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x} - b\right|$ para que pueda hacerse arbitrariamente pequeña. Dando valores x próximos a 0, parece que el candidato adecuado es $b = 1$. Se trataría entonces de probar que $\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1\right|$ es pequeño si $x \to 0$. No es una cuestión difícil, aunque requiere algunas manipulaciones trigonométricas que no son triviales (se puede ver en las hojas de Ejemplos y Ejercicios).

Queda claro que es necesario tener algunas herramientas que puedan simplificar el cálculo de límites. Las más sencillas y útiles se agrupan con el título de álgebra de límites.

Proposición (álgebra de límites). *Sean $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ verificando*

$$b = \lim_{x \to a} f(x), \qquad c = \lim_{x \to a} g(x)$$

donde a es un punto de acumulación de $A \cap B$. Entonces $f+g$, λf y fg tienen límite en a y dichos límites son $b+c$, λb y bc respectivamente, es decir

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} (f+g)(x) &= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = b + c \\ \lim_{x\to a} (fg)(x) &= \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = bc \\ \lim_{x\to a} (\lambda f)(x) &= \lambda \lim_{x\to a} f(x) = \lambda b \end{aligned}$$

Además, si $b \neq 0$ entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \frac{1}{b}$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Demostración. Para ver que
$$\lim_{x\to a}(f+g)(x)=b+c$$
basta considerar la desigualdad
$$|f(x)+g(x)-(b+c)|\leq|f(x)-b|+|g(x)-c|.$$
La igualdad
$$\lim_{x\to a}(\lambda f)(x)=\lambda b$$
es consecuencia de
$$|\lambda f(x)-\lambda b|=|\lambda||f(x)-b|.$$
Para probar que
$$\lim_{x\to a}(fg)(x)=bc$$
se elige $0<\varepsilon<1$. Entonces existe un valor $\delta>0$ tal que si $x\in A\cap B$ y $0<|x-a|<\delta$ se tiene $|f(x)-b|<\varepsilon$, $|g(x)-c|<\varepsilon$. En particular, $|f(x)|<|b|+1$. Así
$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-bc| &= |f(x)g(x)-f(x)c+f(x)c-bc|\\ &\leq |f(x)|\cdot|g(x)-c|+|c|\cdot|f(x)-b|\\ &\leq (|b|+1)\varepsilon+|c|\varepsilon=(|b|+|c|+1)\varepsilon\end{aligned}$$

Sea ahora $b\neq 0$. Dado $0<\varepsilon<|b|/2$ existe $\delta>0$ tal que $|f(x)-b|<\varepsilon$ para todo $x\in A\cap B$ que verifique $0<|x-a|<\delta$. En particular, $|b|-|f(x)|<|b|/2$ y así $|f(x)|>|b|/2$. En total, si $x\in A$ y $0<|x-a|<\delta$ se tiene
$$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{b}\right|=\frac{|f(x)-b|}{|f(x)|\cdot|b|}<\frac{2\varepsilon}{|b|^2}.$$
□

Se suele expresar este resultado diciendo que (si los límites de las funciones involucradas existen)

a) el límite de la suma es la suma de los límites,

b) el límite del producto es el producto de los límites,

c) el límite del cociente (cuando tiene sentido, es decir, cuando el denominador no es cero) es el cociente de los límites, y

d) el límite de una función por un número es el número por el límite de la función.

Abreviadamente,
$$\begin{aligned}\lim(f+g) &= \lim f+\lim g\\ \lim(f\cdot g) &= (\lim f)\cdot(\lim g)\\ \lim\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{\lim f}{\lim g} \qquad \text{(cuando tenga sentido)}\\ \lim(\lambda\cdot f) &= \lambda\cdot\lim f.\end{aligned}$$

Límites en el infinito, límites infinitos, laterales,...

Existen diversas generalizaciones del concepto de límite, como

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

- Límites en el infinito,
- Límites infinitos,
- Límites laterales,
- Límites superiores e inferiores,

en los cuales se consideran casos como $a = +\infty$ o la posibilidad de que $\lim_{x \to a} f(x)$ sea $\pm\infty$, o algunos más.

Límites en el infinito. Sea A un conjunto no acotado superiormente, es decir, para todo $M > 0$ se tiene $A \cap [M, +\infty) \neq \varnothing$. Se considera en este caso $+\infty$ como un punto de acumulación de A. Para una función $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que

$$b = \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$$

si

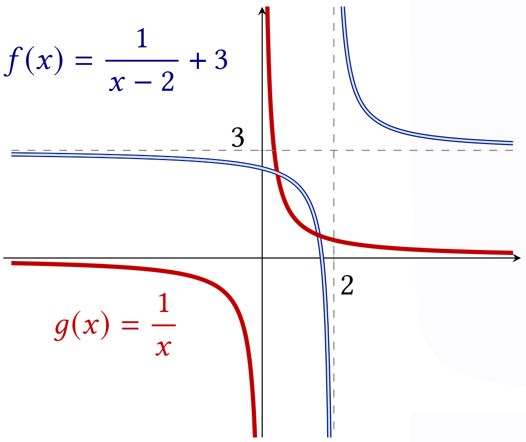
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \ : \ x \in A,\ x > M \ \Rightarrow \ |f(x) - b| < \varepsilon.$$

De forma análoga, si A es un conjunto no acotado inferiormente, se dice que

$$b = \lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$$

si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \ : \ x \in A,\ x < M \ \Rightarrow \ |f(x) - b| < \varepsilon.$$



Estos límites se conocen como límites en el infinito. Para ellos, las propiedades del álgebra de límites se mantienen.
Por ejemplo,

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x-2} + 3 \right) = 3$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Límites infinitos. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y a un punto de acumulación de A. Se dice que

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

si

$$\forall M \quad \exists \delta > 0 \ : \ x \in A,\ 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ f(x) > M,$$

es decir, cerca de a hay puntos x cuyas imágenes son tan grandes como queramos.

Se dice que

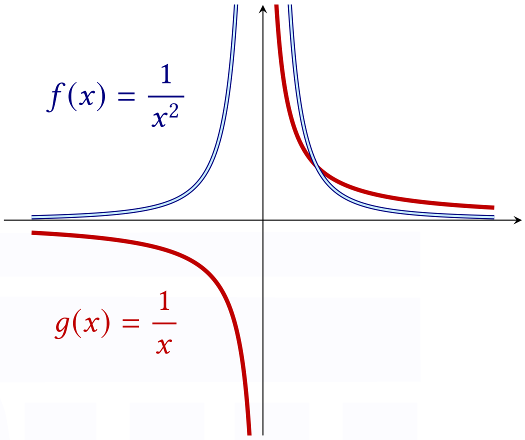
$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

si

$$\forall M \quad \exists \delta > 0 \ : \ x \in A,\ 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ f(x) < M.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \text{ no existe}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$



Los límites infinitos no mantienen las reglas del álgebra de límites. Ya no se cumple por ejemplo que el límite de la suma sea la suma de los límites. Ahora por ejemplo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{-1}{x^2}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{7}{x^4} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^4} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{7}{x^4} + \frac{-1}{x^4}\right) = +\infty$$

Sin embargo, es fácil comprobar resultados del tipo

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim_{x\to a} f(x) & = & b \in \mathbb{R} \\ \lim_{x\to a} g(x) & = & +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} (f+g)(x) = +\infty$$

Límites infinitos en el infinito. Si $+\infty$ es punto de acumulación de A, se dice

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$$

si

$$\forall M \quad \exists N \ : \ x \in A, \ x > N \ \Rightarrow \ f(x) < M.$$

Ejercicio: definir los otros casos (y comprobar por ejemplo que $\lim_{x\to -\infty} x^2 = +\infty$)

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

Límites laterales. Se dice que a es un punto de acumulación por la izquierda de A cuando cualquier intervalo de la forma $(a-\delta, a)$ contiene elementos de A, es decir, $(a-\delta, a)\cap A \neq \varnothing$ sea como sea $\delta > 0$. Similarmente, a es punto de acumulación por la derecha de A si $(a, a+\delta)\cap A \neq \varnothing$ para todo $\delta > 0$.

Si a es un punto de acumulación por la izquierda de A, se dice que b es límite por la izquierda de $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en el punto a si

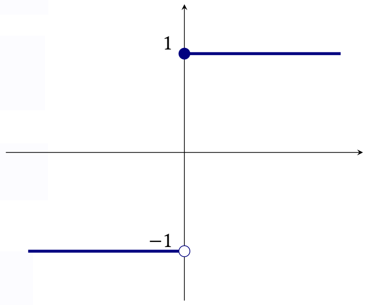
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ : \ x \in A, \ a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

y se suele escribir como
$$b = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \nearrow a} f(x).$$

De la misma forma, si a es un punto de acumulación por la derecha de A, se dice que b es límite por la derecha de $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en el punto a si
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ : \ x \in A, \ a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$
y se expresa como
$$b = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x).$$

Ejemplo: la función
$$f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

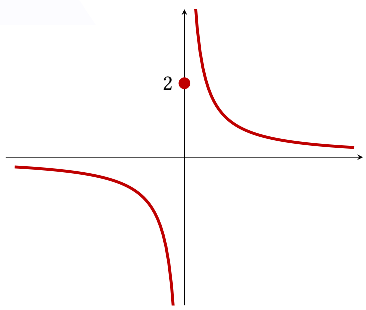


verifica
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1.$$

• Si a es un punto de acumulación por la izquierda y por la derecha, es decir, si es un punto de acumulación de A, entonces f tiene límite en a si y sólo si tiene límite por la izquierda y por la derecha en a y ambos coinciden:
$$\text{existe } \lim_{x \to a} f(x) \ \Leftrightarrow \begin{cases} \text{existen } \lim_{x \to a^-} f(x) \text{ y } \lim_{x \to a^+} f(x) \\ \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) \end{cases}$$

• También se pueden definir límites infinitos laterales: se dice que
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$$
si
$$\forall M \quad \exists \delta > 0 \ : \ x \in A, \ a - \delta < x < a \ \Rightarrow \ f(x) > M.$$
De forma simétrica se utiliza la expresión
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$
para decir
$$\forall M \quad \exists \delta > 0 \ : \ x \in A, \ a - \delta < x < a \ \Rightarrow \ f(x) < M.$$
Análogamente se definen para el límite por la derecha.

Ejemplo. Para la función
$$f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 2 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$



se tiene
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Límite superior e inferior. Se dice que b es límite superior de f en a, y se escribe

$$b = \limsup_{x\to a} f(x)$$

si se cumplen las dos condiciones

a) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ : \ x \in A,\ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ f(x) < b + \varepsilon,$

b) $\forall \mu > 0 \quad \exists x \in A \ \text{ con } \ 0 < |x-a| < \mu \ \text{ y } \ f(x) > b - \varepsilon.$

De forma análoga se define el límite inferior.

Ejemplo. Si f es la función de Dirichlet

$$f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

entonces

$$\liminf_{x\to a} f(x) = 0, \qquad \limsup_{x\to a} f(x) = 1.$$

para todo $a \in \mathbb{R}$, aunque esta función no tiene límite en ningún punto.

Funciones continuas

Se dice que $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en $a \in A$ si o bien a es un punto aislado o bien a es un punto de acumulación de A, existe $\lim_{x\to a} f(x)$ y coincide con $f(a)$. Todo esto se puede resumir en una sola línea:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ : \ x \in A,\ |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

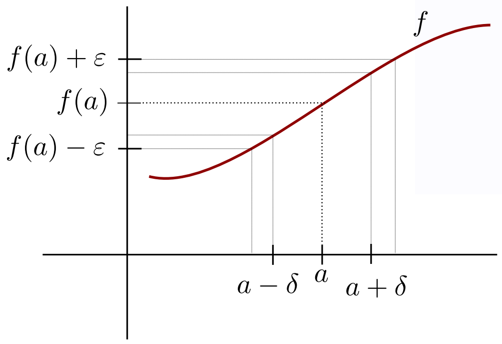
Esta condición se puede expresar de otras formas equivalentes

a) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ : \ x \in A,\ x \in \big(a-\delta, a+\delta\big) \ \Rightarrow \ f(x) \in \big(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon\big)$

b) $\forall V = \big(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon\big) \quad \exists U = \big(a-\delta, a+\delta\big) \ : \ f\big(U \cap A\big) \subset V$

c) $\forall V = \big(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon\big) \quad \exists U = \big(a-\delta, a+\delta\big) \ : \ U \subset f^{-1}(V)$

(donde $f^{-1}(V) = \{x \in A : f(x) \in V\}$ representa la imagen inversa del conjunto V).

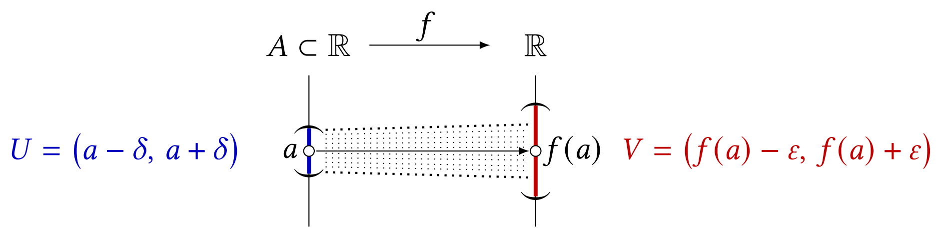


En la definición se escribe $|x-a| < \delta$, con lo cual se admite el valor $x = a$.

La función f debe estar definida en a y su valor $f(a)$ debe coincidir con el valor del límite $\lim_{x\to a} f(x)$.

La continuidad de f en a suele expresarse en una sola línea: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Otra forma de representar la continuidad en a:



$$x \in A \cap U \quad \Rightarrow \quad f(x) \in V$$

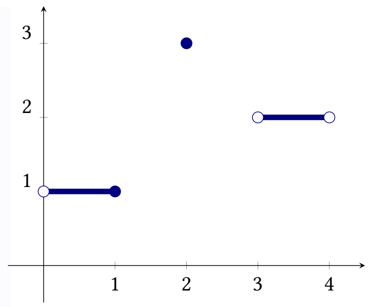
La función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ es continua en $x = 3$, pero no lo es en $x = 0$.

Definición. Se dice que f es continua en un conjunto si es continua en todos los puntos del conjunto.

Intuitivamente, las gráficas de las funciones continuas son aquellas que tienen un sólo trazo. Sin embargo, hay funciones continuas (definidas en dos conjuntos disjuntos) cuya gráfica tiene varios trazos.

Ejemplo. Si $A = (0,\ 1] \cup \{2\} \cup (3,\ 4)$, la función

$$f : x \in A \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in (0,\ 1] \\ 3 & \text{si} \quad x = 2 \\ 2 & \text{si} \quad x \in (3,\ 4) \end{cases}$$



es continua (ya que es continua en cada punto de su dominio), a pesar del aspecto “roto” de su gráfica.

También conviene revisar funciones como la función de Cantor o escalera del diablo para delimitar más qué significa eso de “funciones cuya gráfica tiene un sólo trazo”.

Tipos de discontinuidades

Cuando las condiciones de la definición anterior no se cumplen se dice que f es discontinua en a. Las causas que pueden dar lugar a que una función f no sea continua en a se siguen de

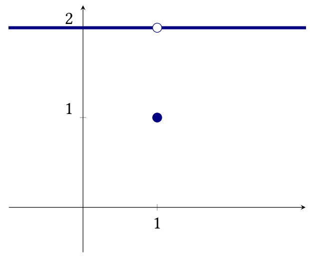
$$f \text{ es continua en } a \;\Leftrightarrow\; \exists \lim_{x \to a} f(x) \text{ y coincide con } f(a).$$

Por tanto, f es discontinua en a si algo de esto falla. La existencia del límite a su vez depende de la existencia de los límites laterales y de si coinciden o no entre ellos. Todo esto se refleja en el siguiente esquema:

$$\text{Discontinuidad en } a \begin{cases} \text{Evitable } (\exists \lim\limits_{x \to a} \in \mathbb{R}) \\[2ex] \begin{array}{l} \text{No evitable} \\ \text{o esencial} \\ (\nexists \lim\limits_{x \to a} \text{ o es } \pm\infty) \end{array} \begin{cases} \begin{array}{l} \text{De primera especie} \\ (\exists \lim\limits_{x \to a^+} \text{ y } \exists \lim\limits_{x \to a^-}) \\ (\text{pueden ser } \pm\infty) \end{array} \begin{cases} \text{De salto finito} \\ \text{De salto infinito} \\ \text{Asintótica} \end{cases} \\[2ex] \begin{array}{l} \text{De segunda especie} \\ (\nexists \lim\limits_{x \to a^+} \text{ o } \nexists \lim\limits_{x \to a^-} \\ \text{o ambos no existen)} \end{array} \end{cases} \end{cases}$$

Discontinuidad evitable. Se dice f tiene una discontinuidad evitable en a cuando existe $\lim_{x\to a} f(x)$ pero no coincide con $f(a)$. Se llama así porque cambiando adecuadamente el valor de f en a se tendría una función continua.

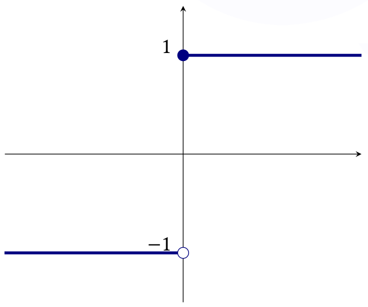
Ejemplo. Para la función



$$f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

se tiene $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2 \neq f(1) = 1$.

Ejemplo. La función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, para cada $x \neq 0$, y $f(0) = 72$, tiene una discontinuidad evitable en $a = 0$. Se puede hacer continua al definir $f(0) = 1$. La función $g(x) = \left(\cos^2 x - 1\right)/x^2$ (definida para $x \neq 0$) y $g(0) = 4$, tiene una discontinuidad evitable en $a = 0$. La única forma de hacerla continua es asignando el valor $g(0) = -1$.



Discontinuidad de salto finito. Se dice f tiene una discontinuidad de salto finito en a cuando existen $\lim_{x\to a^-} f(x) \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) \in \mathbb{R}$ pero no coinciden.

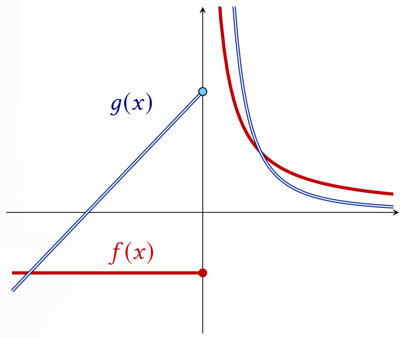
Ejemplo. Para la función

$$f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

se tiene $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1 \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$.

Discontinuidad de salto infinito. Se dice f tiene una discontinuidad de salto infinito en a cuando existen $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$, y no coinciden al ser finito el valor de uno de ellos y $\pm\infty$ el otro.

Ejemplo. Para las funciones

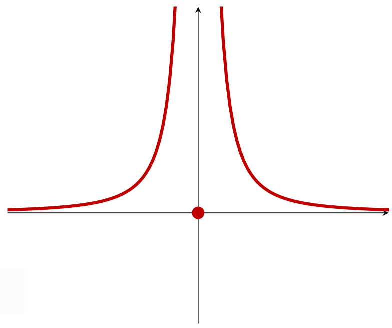


$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x > 0 \\ x + 2 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

se tiene

$$-1 = \lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \quad 2 = \lim_{x\to 0^-} g(x) \neq \lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty.$$

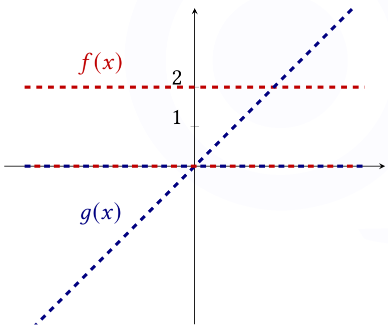
Discontinuidad asintótica. Se dice f tiene una discontinuidad asintótica en a cuando existen $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y el valor de ambos es $\pm\infty$.



Ejemplo. Para la función

$$f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

se tiene $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty \neq f(0) = 0$.



Discontinuidad de segunda especie. Se dice f tiene una discontinuidad de segunda especie en a cuando alguno de los límites $\lim_{x\to a^+} f(x)$ o $\lim_{x\to a^-} f(x)$ no existe (o bien no existe ninguno de los dos).

Ejemplo. Para las funciones

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

se tiene que f tiene discontinuidades de segunda especie en todo $\mathbb{R}$ mientras que g tiene discontinuidades de segunda especie en todos los puntos salvo en el 0, en el cual es continua.

Operaciones con funciones continuas

Las propiedades elementales de las funciones continuas son una consecuencia directa de las propiedades del álgebra de límites.

Proposición. *Si f y g son funciones continuas en a, entonces también los son las funciones $f+g$, λf, $f \cdot g$. Si además $g(a) \neq 0$ entonces también f/g es continua.*

La demostración es una consecuencia sencilla de las propiedades de los límites. Por ejemplo, para el producto puede escribirse

$$f(x)g(x) = f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) = f(x)(g(x) - g(a)) + f(x)g(a)$$

y calcular el límite cuando $x \longrightarrow a$.

Definición. Sean $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, verificando $f(A) \subset B$, es decir, el conjunto imagen de f contenido en el dominio de g. Se define la función compuesta $g \circ f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

$$\begin{array}{ccccc} A & \rightarrow & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & f(x) & \rightsquigarrow & g(f(x)) \end{array}$$

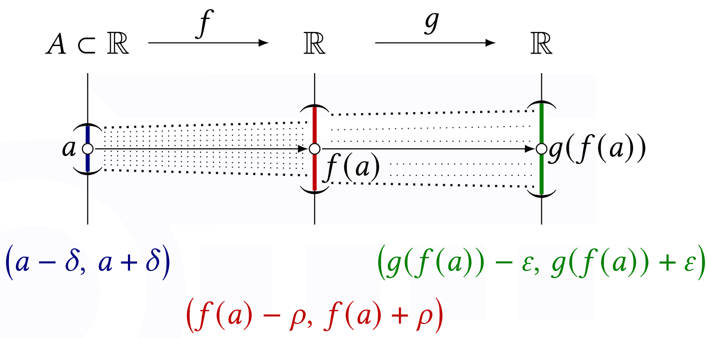
La composición de funciones es asociativa pero no es, en general, conmutativa. Por ejemplo,

$$\left.\begin{array}{rcl} f(x) & = & x^2 \\ g(x) & = & 1+x \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{llll} (g\circ f)(x) & = g(f(x)) & = g(x^2) & = \quad 1+x^2 \\ (f\circ g)(x) & = f(g(x)) & = f(1+x)) & = \quad (1+x)^2 \end{array}\right.$$

Proposición. *Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$ entonces $g \circ f$ es continua en a, es decir, la composición de funciones continuas es continua.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por la continuidad de g en $f(a)$ existe $\rho > 0$ tal que

$$|y - f(a)| < \rho \;\Rightarrow\; |g(y) - g(f(a))| < \varepsilon.$$



Para ese valor ρ existe $\delta > 0$ tal que (ahora se aplica la continuidad de f en a)

$$|x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \rho.$$

En resumen, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ que verifica

$$|x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| < \varepsilon,$$

y la composición $g \circ f$ es continua en a. □

A veces se expresa esta propiedad como

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to a} f(x)\right) = g(f(a)),$$

donde la primera igualdad se sigue por la continuidad de g en $f(a)$ y la segunda por la continuidad de f en a.

Funciones continuas elementales

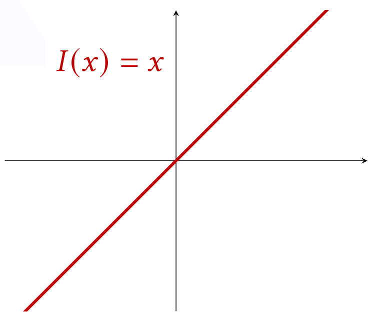
Estas dos proposiciones permiten construir funciones continuas a partir de funciones elementales, cuya continuidad puede probarse con facilidad en algunos casos.

- Toda función constante es continua en todos los puntos.

  Si $\lambda \in \mathbb{R}$, la función $g(x) = \lambda$ es continua en cualquier punto a: dado $\varepsilon > 0$ se elige δ cualquier número positivo. Así $|x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon$ trivialmente, ya que $|g(x) - g(a)| = 0$.

- La función identidad $I : x \in \mathbb{R} \longrightarrow x \in \mathbb{R}$ es continua.

  Basta considerar $\delta = \varepsilon$ en la definición de continuidad, pues así $|x - a| < \delta \Rightarrow |I(x) - I(a)| = |x - a| < \varepsilon$.



- Cualquier múltiplo λI de la función identidad es continua: $\lambda I(x) = \lambda x$.
- La función $I^2 = I \cdot I$ es continua, por ser el producto de funciones continuas: $I^2(x) = I(x) \cdot I(x) = x^2$ es continua.
- En general, la función $I^n : x \in \mathbb{R} \longrightarrow x^n \in \mathbb{R}$ es continua.

- Las funciones polinómicas

$$x \in \mathbb{R} \longrightarrow a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

son continuas, por ser sumas y productos de funciones continuas.

- Las funciones racionales

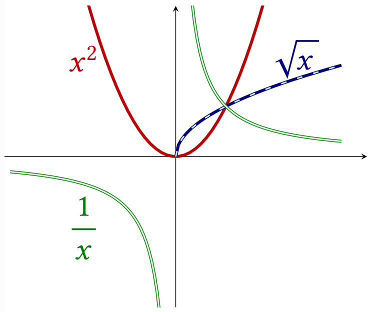
$$x \in A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

son continuas en todos los puntos en los que están definidas. Estas funciones racionales son continuas en $\mathbb{R}$ salvo a lo sumo en una cantidad finita de puntos (las raíces reales del denominador). Por ejemplo, $f : x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty) \longrightarrow f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$ es continua. ¿Cómo es la gráfica de esta función?

También se puede probar con no demasiada dificultad que las siguientes funciones elementales básicas son continuas en cada punto en el que están definidas. Al menos, para las funciones potenciales la prueba no es demasiado complicada.

- Las funciones potenciales

$$x \in A \subset \mathbb{R} \longrightarrow x^p$$

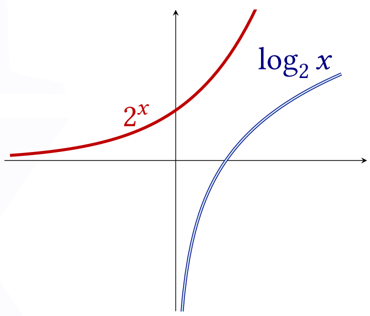


donde $p \in \mathbb{R}$. El conjunto de definición es como mínimo $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, y dependiendo del valor de p se puede ir ampliando.
Si $p > 0$ entonces $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.
Si $p \in \mathbb{N}$ entonces $A = \mathbb{R}$.
Si $-p \in \mathbb{N}$ entonces $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

La continuidad puede expresarse como $|x - a| \to 0 \Rightarrow |x^p - a^p| \to 0$.

- Las funciones exponenciales

$$x \in \mathbb{R} \longrightarrow a^x$$

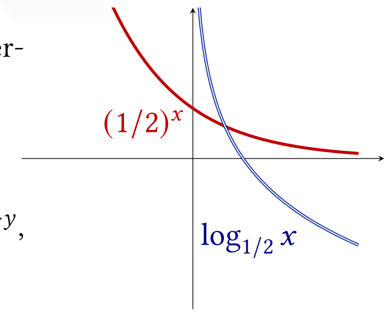


donde $a > 0$ (se entiende que $a \neq 1$) y sus inversas, las funciones logarítmicas

$$x \in \mathbb{R}_+ \longrightarrow \log_a(x)$$

son todas continuas en todos los puntos en los que están definidas.

Que estas funciones exponenciales y logarítmicas sean inversas significa que



$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

por lo que las propiedades de las potencias, como $a^x a^y = a^{x+y}$, tienen su reflejo en los logaritmos:

Departamento de Matemáticas Universidad de Extremadura

$$\left.\begin{array}{l} X = a^x \\ Y = a^y \end{array}\right\} \Rightarrow a^x a^y = XY = a^{x+y} \Rightarrow \log_a(XY) = x + y = \log_a X + \log_a Y.$$

Similarmente, $\log_a x^p = p \log_a x$ ya que:

$$X = a^x \Rightarrow X^p = (a^x)^p = a^{px} \Rightarrow \log_a X^p = px = p\log_a X.$$

Todos los logaritmos son proporcionales. Dicho con otras palabras, el conjunto de funciones logarítmicas es un espacio vectorial de dimensión 1. Para probar esta afirmación se parte de $a^y = x$ o $e^y = x$ y se aplican logaritmos neperianos y logaritmos en otra base:

$$a^y = x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & \log_a x \\ y \cdot \ln a & = & \ln x \end{array} \right\} \Rightarrow \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

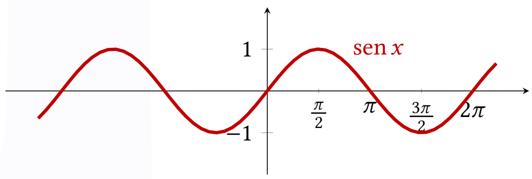
$$e^y = x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & \ln x \\ y \cdot \log_a e & = & \log_a x \end{array} \right\} \Rightarrow \ln x = \frac{\log_a x}{\log_a e}.$$

[En general, si $f\left(a^b\right) = b \cdot f(a)$ entonces $f(x) = k \cdot \ln x$ para todos los valores $x > 0$, ya que si se elige $e^y = x$ entonces $f(x) = f(e^y) = y \cdot f(e) = f(e) \cdot \ln x$]

Como los logaritmos son todos proporcionales, se suele utilizar el más sencillo, que es la función logaritmo natural o neperiano y se denotará $\log x$ o $\ln x$. En otro caso se utilizará la base del logaritmo para indicarlo expresamente, por ejemplo $\log_2 x$ o el logaritmo decimal $\log_{10} x$.

No ocurre lo mismo con las funciones exponenciales, que ya no son proporcionales unas a otras. Es evidente que $f(x) = e^x$ y $g(x) = 2^x$ no son proporcionales. De echo $2^x = e^{\ln 2^x} = e^{x \ln 2} = (e^x)^{\ln 2}$. Además, las funciones $\ln x$ y $2 \ln x$ (una es el doble de la otra) tienen como inversas a e^x y $e^{x/2}$ (una es el cuadrado de la otra).

- La función seno, $x \in \mathbb{R} \longrightarrow \operatorname{sen} x$, es continua, es decir, $|x - a| \to 0 \Rightarrow |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a| \to 0$. También lo es su inversa, la función arco seno $x \in [-1, 1] \longrightarrow \operatorname{arcsen} x$, considerada como la inversa de $x \in [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow \operatorname{sen} x$ (definida en un dominio en el cual $\operatorname{sen} x$ es biyectiva).



Todas las operaciones que se hagan con estas funciones elementales básicas, tales como sumas, composiciones, productos,...son funciones continuas en donde estén definidas. Estas funciones resultantes se llaman funciones elementales. Por ejemplo, funciones elementales (no básicas) son:

- La función coseno, $x \in \mathbb{R} \longrightarrow \cos x$, que es el resultado de las siguientes transformaciones

$$x \to \operatorname{sen} x \to \operatorname{sen}^2 x \to 1 - \operatorname{sen}^2 x \to \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$$

que son todas continuas (aparece la función seno, una potencia, una resta y una potencia).

- La función tangente donde está definida es continua

$$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\} \longrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

- La función coseno también se puede escribir como $\cos(x) = \operatorname{sen}(x - \pi/2)$ y de esta forma es el resultado de la composición de las funciones elementales básicas $f(x) = x - \pi/2$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$, ya que $\cos x = (g \circ f)(x)$.

Sobre la composición de funciones. Se consideran $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, donde la imagen de f esté contenida en el dominio de g, es decir, $f(A) \subset B$. Entonces se puede hablar de la composición $g \circ f$ como la función $x \in A \longrightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & f(A) \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\
x \arrow[r, squiggly] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & f(x) \arrow[r, squiggly] & g(f(x))
\end{tikzcd}$$

Por ejemplo, si

$$f(x) = 1 - x^2, \quad g(x) = \sqrt{x}$$

entonces $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1 - x^2) = \sqrt{1 - x^2}$. Esta función está definida en aquellos valores del dominio de f cuya imagen por f esté en el dominio de g. En este caso, los valores que cumplen $1 - x^2 \geq 0$, que son aquellos en los que g está definida.

Se puede calcular la composición en otro orden: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 1 - x$, definida sólo para valores positivos.

La función $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(1 - x^2) = 1 - (1 - x^2)^2$, composición de f consigo misma, está definida en todo $\mathbb{R}$.

La composición de funciones no es conmutativa: en general se tiene $f \circ g \neq g \circ f$, aunque en algunos casos concretos puede darse la igualdad.

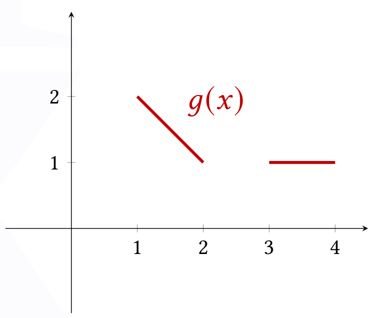
Es muy útil reconocer en una expresión qué funciones elementales intervienen, y en qué orden lo hacen. Por ejemplo, la función $x \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x) = \sqrt{4 + \operatorname{sen} x^2}$ puede conseguirse mediante las funciones

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = \operatorname{sen} x, \quad f_3(x) = 4 + x, \quad f_4(x) = \sqrt{x}$$

ya que $f(x) = (f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x)$. La continuidad de f (y otras operaciones que ya se verán, como por ejemplo la derivada) se puede estudiar viendo cómo es cada una de las funciones que intervienen. Como estas cuatro funciones son continuas, también lo es f.

Continuidad y dominio de la función. Hay funciones continuas en todo su dominio. También existen funciones que no están definidas en ningún punto, como $f(x) = \sqrt{-1 - x - x^2}$. Hay funciones definidas en conjuntos disjuntos y que son continuas, por ejemplo

$$g : x \in (1,2) \cup (3,4) \longrightarrow \begin{cases} 3 - x & \text{si} \quad x \in (1,2) \\ 1 & \text{si} \quad x \in (3,4) \end{cases}$$



Una función continua cuya gráfica tiene dos trazos. ¿No es esto una contradicción con la idea que se tiene de función continua?

Continuidad y cálculo de límites. Una primera propiedad que tienen las funciones continuas es que para ellas no existe el cálculo de límites. Por ejemplo, para calcular

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

basta considerar que en el punto $a = \pi/2$ la función $\operatorname{sen} x$ es continua, la función x es continua y no se anula, luego el cociente es continua y así el valor del límite es $\frac{\operatorname{sen}\pi/2}{\pi/2} = 2/\pi$. Sin embargo, estas consideraciones no valen para el cálculo de

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x},$$

y este límite se debe calcular con algún otro procedimiento. Otro ejemplo, es fácil obtener que

$$\lim_{x\to 4} \frac{(x-4)\ \sqrt{1+x+\ln x}}{x^2+1} = 0$$

sin tener que realizar ningún cálculo, salvo sustituir el valor de la función, que es continua, en $a = 4$. En el siguiente apartado se verán otras propiedades que tienen las funciones continuas.

Teoremas fundamentales para las funciones continuas

La función $f(x) = x^2$ transforma el intervalo abierto $(-1, 1)$ en el intervalo $[0, 1)$, es decir, $f(-1, 1) = [0, 1)$, y este último no es abierto. Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $f(-10, 10) = [-1, 1]$. La función $g(x) = 1/x$ lleva el intervalo cerrado $[1, +\infty)$ en $(0, 1]$, es decir, verifica $g[1, +\infty) = (0, 1]$. Y también transforma un intervalo acotado en otro que no lo es: $g(0, 1) = (1, +\infty)$.

Estos ejemplos muestran que la imagen continua de un conjunto abierto o cerrado o acotado no tiene porqué ser un conjunto del mismo tipo. En esta sección se van a estudiar qué propiedades se mantienen al aplicarles una función continua. Y también se estudiarán las propiedades que se mantienen al aplicarles la imagen inversa de una función continua. En concreto, si $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, y $B \subset A$, ¿qué propiedades pasan de B a $f(B)$? Y si $C \subset \mathbb{R}$, ¿qué propiedades pasan de C a $f^{-1}(C)$?

Teorema. *Sea $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y $C \subset \mathbb{R}$ un conjunto abierto (o cerrado). Entonces $f^{-1}(C) = \{x \in A : f(x) \in C\}$ es abierto (o cerrado) de A, es decir, intersección con A de conjunto abierto (o cerrado).*

Demostración. Sea C abierto. Se trata de ver que $f^{-1}(C)$ es abierto. Para ello se va a probar todo punto suyo es un punto interior: si $a \in f^{-1}(C)$ entonces debe existir $U = (a-\delta, a+\delta)$ tal que $a \in U \subset f^{-1}(C)$.

Si $a \in f^{-1}(C)$ entonces $f(a) \in C$. Como C es abierto existe $V = (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$ tal que $f(a) \in V \subset C$. Aplicando la definición de continuidad de f en a existe $U = (a-\delta, a+\delta)$ tal que $f(U) \subset V$. Por tanto, $a \in U \subset f^{-1}(V) \subset f^{-1}(C)$.

Para probar el teorema con conjuntos cerrados se hace la misma demostración pasando al conjunto complementario. □

Ejercicio. Probar el recíproco de este teorema: *si para cada $C \subset \mathbb{R}$ abierto se tiene que $f^{-1}(C)$ es abierto de A, entonces f es continua en A.*

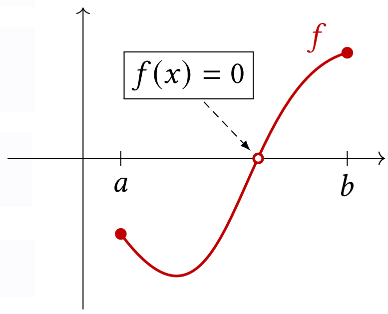
Teorema. *Si $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y A es compacto, entonces $f(A)$ es compacto.*

Demostración. Dado un recubrimiento abierto $f(A) \subset \bigcup_{i\in I} G_i$ se tiene que $A \subset \bigcup_{i\in I} f^{-1}(G_i)$ es un recubrimiento abierto de A. Como A es compacto, este último recubrimiento admite un recubrimiento finito, es decir, $A \subset f^{-1}(G_{i_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(G_{i_n})$ y así $f(A) \subset G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{i_n}$ es un recubrimiento finito del recubrimiento original y $f(A)$ es compacto. □

Corolario. *Toda función continua en un compacto alcanza el máximo y el mínimo. Si A es compacto y $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, existen $a, b \in A$ tales que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ para todo $x \in A$.*

(La demostración es evidente: como $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ es cerrado y acotado, por ser acotado tiene ínfimo y supremo, y por ser cerrado ambos pertenecen al conjunto, y son mínimo y máximo).

El teorema de Bolzano y resolución de ecuaciones. Otra propiedad importante de las funciones continuas se conoce como teorema de Bolzano. Este resultado muestra cómo se puede resolver cualquier ecuación definida por una función continua. Dada una ecuación $f(x) = 0$ en la que f es una función continua, se pueden calcular sus posibles soluciones sin más que encontrar puntos a y b en los que f cambie de signo, es decir, $f(a) \cdot f(b) < 0$. Entre cada dos cambios de signo hay una solución que puede calcularse con tanta precisión como se quiera.



Lema (propiedad esencial en las funciones continuas). *Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y $f(a) > 0$ entonces también f es positiva para los elementos de un cierto intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, es decir:*

$$f(a) > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \delta > 0 : f(x) > 0 \text{ para todo } x \in (a - \delta, a + \delta) \cap A.$$

El mismo resultado para el caso en que $f(a) < 0$

$$f(a) < 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \delta > 0 : f(x) < 0 \text{ para todo } x \in (a - \delta, a + \delta) \cap A.$$

Demostración. Si $f(a) > 0$, se elige $\varepsilon > 0$ para que se cumpla $0 \notin \Big(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon\Big)$, por ejemplo $\varepsilon = f(a)/2$. Como f es continua en a, existe un intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ que verifica $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \in \Big(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon\Big)$, y por tanto $f(x) > 0$. □

Se puede escribir este lema con otros términos equivalentes: si f es continua, entonces $f^{-1}(0, +\infty)$ y $f^{-1}(-\infty, 0)$ son abiertos en A. En efecto,

$$a \in f^{-1}(0, +\infty) \;\Leftrightarrow\; f(a) \in (0, +\infty) \;\Leftrightarrow\; f(a) > 0,$$

y en ese caso hay un intervalo que cumple $(a - \delta, a + \delta) \cap A \subset f^{-1}(0, +\infty)$, ya que

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \cap A \;\Rightarrow\; x \in f^{-1}(0, +\infty).$$

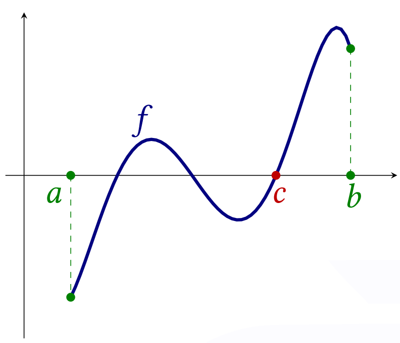
Teorema (de Bolzano o del valor medio para funciones continuas) *Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Demostración. Sea $f(a) < 0 < f(b)$ (el otro caso $f(a) > 0 > f(b)$ es simétrico). Se considera el conjunto

$$C = \{x \in [a, b] \;:\; f(x) < 0\}.$$

Como $a \in C \subset [a, b]$ se tiene que C es no vacío y acotado. Por tanto existe $c = \sup(C)$. La demostración consiste en probar que $f(c) = 0$, viendo que es imposible $f(c) > 0$ y $f(c) < 0$.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura



Por el lema anterior, f es positiva en algún intervalo $(b-\varepsilon,\ b]$. Por tanto $C \subset [a,\ b-\varepsilon]$, en particular $c < b$.

Además, $f(x) \geq 0$ si $x \in (c,\ b]$, puesto que si $x > c$ entonces no puede ser $f(x) < 0$.

Como consecuencia, no puede darse $f(c) < 0$. Si fuera $f(c) < 0$, entonces también f sería negativa en un intervalo $(c-\delta,\ c+\delta)$ y ya se ha visto que a la derecha de c tiene que ser f mayor o igual que 0.

Por último, no es posible $f(c) > 0$, pues en ese caso, f sería positiva en todo un intervalo $(c-\delta, c+\delta)$ y por tanto sería $f(x) \geq 0$ para $x \in (c-\delta,\ b]$. Por tanto, c no sería el supremo de C (no sería la menor de las cotas superiores).

De todo lo anterior se sigue que $f(c) = 0$. □

Corolario. *Si I es un intervalo y $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en I, entonces $f(I)$ es también un intervalo. En particular f alcanza cualquier valor intermedio entre dos valores que alcance: si $a, b \in I$ y $f(a) \leq \alpha \leq f(b)$ entonces existe $c \in [a, b]$ verificando $f(c) = \alpha$.*

[Que I sea un intervalo significa que $a, b \in I$ y $a \leq c \leq b$ entonces $c \in I$, es decir, si verifica $a, b \in I \Rightarrow [a,\ b] \subset I$. Conjuntos que son intervalos son todos aquellos conjuntos comprendidos entre dos valores (números reales o $\pm\infty$):

$$[a],\ [a,b],\ [a,b),\ (a,b],\ (a,b),\ [a,+\infty),\ (a,+\infty),\ (-\infty,a],\ (-\infty,a),\ (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}.]$$

Demostración. Sean $f(a), f(b) \in f(I)$ y $f(a) \leq \alpha \leq f(b)$. Se trata de ver que $\alpha \in f(I)$. La función $g(x) = f(x) - \alpha$ es continua en $[a,b]$ (suponiendo que $a < b$, en caso contrario habría que escribir $[b,a]$) y cambia de signo, ya que $g(a) \leq 0 \leq g(b)$. Por tanto existe $c \in [a,b]$ que verifica $g(c) = 0$, es decir, $f(c) = \alpha$ y así $\alpha \in f(I)$. □

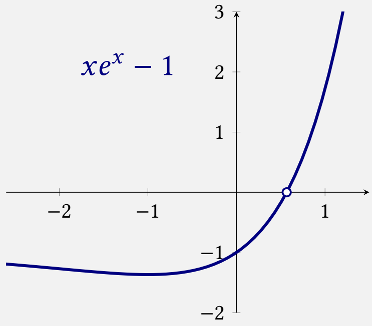
Este resultado no es cierto en $\mathbb{Q}$ (para funciones de variable racional). Por ejemplo, la función $f : x \in \mathbb{Q} \longrightarrow x^2 - 2 \in \mathbb{Q}$ vale negativo en $a = 0$ y positivo en $b = 2$. Pero no alcanza el valor cero, ya que $f(c) = 0$ no tiene solución en los números racionales.

Es importante resaltar que hay funciones continuas, como

$$f : x \in (1,2) \cup (3,4) \longrightarrow \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x \in (1,2) \\ 1 & \text{si} \quad x \in (3,4) \end{cases}$$

que alcanzan valores positivos y negativos, aunque no alcanzan el valor 0. El teorema de Bolzano trata sobre funciones continuas definidas en intervalos. Más adelante se verá este teorema de Bolzano en conjuntos conexos, como son los intervalos en $\mathbb{R}$. Pero este resultado puede no cumplirse si se permite utilizar funciones continuas en conjuntos más generales, como en la función que aparece al comienzo de este párrafo.

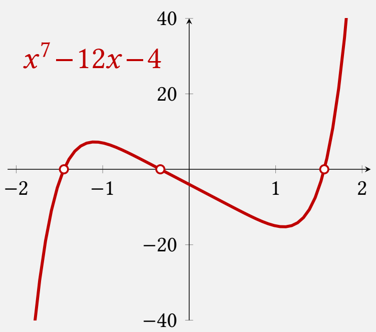
Ejemplo: Resolver la ecuación $xe^x = 1$.



Esta ecuación se escribe como $xe^x - 1 = 0$ y sólo puede tener soluciones positivas, ya que $e^x > 0$ para todo x. La función $f(x) = xe^x - 1$ es continua y $f(0) < 0 < f(1)$. Por tanto hay una solución $c \in (0, 1)$. Ahora se pueden calcular los valores de f en $0.1, 0.2, \ldots, 0.9$ y encontrar donde hay cambio de signo para f. Como $f(0.5) < 0 < f(0.6)$ se tiene que $0.5 < c < 0.6)$ y por tanto $c = 0.5\ldots$ Se vuelven a calcular los valores de f en 0.51, en $0.52, \ldots, 0.59$, etcétera.

Se van obteniendo así los dígitos de la solución de $xe^x = 1$, que es $c = 0.567143\ldots$ Se verá más adelante que la función f es creciente para $x \geq 0$ y por tanto ya no hay más soluciones.

Un método que se utiliza con frecuencia para calcular soluciones de ecuaciones es el llamado método de bisección. Una vez que se tienen a y b tales que $f(a) \cdot f(b) < 0$ (es decir, hay un cambio de signo), se mira cómo es el valor de f en el punto medio $c = (a+b)/2$. Dependiendo de cómo es este valor, se elige ahora el intervalo $[a, c]$ o $[c, b]$ en el que haya un cambio de signo. En este intervalo se vuelve a tomar el punto medio y se elige de nuevo el subintervalo en el que haya cambio de signo. Repitiendo este proceso, se van eligiendo intervalo cuyas longitudes son cada vez más pequeños. Sus extremos tendrán cada vez más cifras decimales iguales. Todo esto permite encontrar la solución (o soluciones) de $f(x) = 0$ con la precisión que se quiera.



Ejemplo: Resolver la ecuación $x^7 - 12x - 4 = 0$.

La función $f(x) = x^7 - 12x - 4$ es continua y tiene cambios de signo en los intervalos $[-2, -1]$, $[-1, 0]$ y $[1, 2]$. En cada uno de ellos hay una solución de la ecuación $f(x) = 0$, y cada una de estas soluciones se puede calcular con precisión arbitraria. Se obtienen

$$\begin{aligned} c_1 &= -1.44855\ldots \\ c_2 &= -0.333371\ldots \\ c_3 &= +1.56264\ldots \end{aligned}$$

Otros ejemplos de aplicación del teorema de Bolzano: la ecuación $\cos^7 x = x$ tiene como solución $x = 0.461459\ldots$; la ecuación $\sqrt{x^2+1} = 1 + \cos x$ tiene como soluciones $x = \pm 1.079665\ldots$ Sin embargo, la ecuación $\log x = \sqrt{x}$ no parece tener soluciones al no encontrarse cambios de signo.

Continuidad uniforme

La continuidad es una propiedad local. Una función puede ser o no continua en cada punto. Si f es continua en a entonces dado $V = (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ existe $U = (a - \delta, a + \delta)$ que verifica $f(U) \subset V$. Pero la relación que hay entre los valores ε y δ, es decir, la relación que hay entre los tamaños de V y U, depende de cómo es la función f es ese punto a.

Definición. Se dice que $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua en A si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ : \ x, y \in A, \ |x - y| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

La elección de δ ya no depende del punto que se trate. Sólo depende del valor de ε.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Recuérdese que f es continua en un punto $x \in A$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_x > 0 \;:\; y \in A,\ |x-y| < \delta_x \;\Rightarrow\; |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

Se ha escrito intencionadamente δ_x en lugar de δ para insistir en que la elección de tal número δ_x depende del punto $x \in A$.

Ejemplo: la función $f(x) = \lambda x$ es continua en $\mathbb{R}$ y también es uniformemente continua:

$$|f(x)-f(y)| = |\lambda x - \lambda y| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-y| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$$

y por tanto la elección es $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}$ (se entiende que $\lambda \neq 0$, ya que el caso $\lambda = 0$ es trivial).

Ejemplo: la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$, ya que

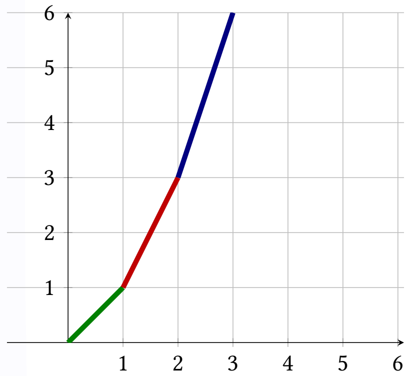
$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \;\leq\; |x-y|$$

y por tanto basta tomar $\delta = \varepsilon$ en la definición de continuidad uniforme.

Es evidente que si f es uniformemente continua entonces f es continua. Sin embargo, hay funciones continuas que no son uniformemente continuas.

Un ejemplo interesante. La función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 2x-1 & \text{si} \quad x \in [1,2] \\ 3x-3 & \text{si} \quad x \in [2,3] \end{cases}$$



es continua. En cada punto a del intervalo $[0,1)$ se cumple

$$|f(x)-f(a)| \;=\; |x-a|$$

y por tanto en la definición de continuidad en a se tiene elegir $\delta \leq \varepsilon$.

En cada punto a del intervalo $[1,2)$ se cumple

$$|f(x)-f(a)| \;=\; |2x-1-(2a-1)| \;=\; 2|x-a|$$

y por tanto en la definición de continuidad se puede elegir $\delta \leq \varepsilon/2$.

En el siguiente intervalo $[2,3)$ sería $\delta \leq \varepsilon/3$.

Este ejemplo muestra que en la definición de continuidad en a, la elección del valor δ para que sea cierta la implicación

$$|x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

depende del punto a. Además puede ocurrir que no se pueda encontrar un δ válido en todos los puntos, como por ejemplo, una función como la de más arriba si se añaden tramos cada vez más

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

inclinados, como por ejemplo,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 2x-1 & \text{si} \quad x \in [1,2] \\ 3x-3 & \text{si} \quad x \in [2,3] \\ 4x-6 & \text{si} \quad x \in [3,4] \\ \ldots & \end{cases}$$

Ejemplo: la función $f(x) = x^2$ es continua en $\mathbb{R}$. Ahora bien,

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x+y| \cdot |x-y|.$$

Por tanto, para hacer $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ hay que elegir $|x+y| \cdot |x-y| < \varepsilon$. Esto obliga a que δ deba ser cada ver más pequeño para valores $x \longrightarrow +\infty$. La función no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. Pero sí lo es en el intervalo $[4,7]$, ya que si $x, y \in [4,7]$ entonces

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x+y| \cdot |x-y| \leq 11 \cdot |x-y|$$

y basta tomar $\delta = \varepsilon/11$ en la definición de continuidad uniforme.

Ejemplo: la función $f(x) = 1/x$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ya que

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|x-y|}{|x| \cdot |y|}$$

y la elección de δ depende de cómo son los valores $x, y \in \mathbb{R}$; en especial, si $x \longrightarrow 0$ entonces δ debe elegirse cada vez más pequeño.

Ejemplo práctico: cómo comprobar que una función es uniformemente continua. Es posible realizar unos cálculos sencillos para verificar si una función es uniformemente continua o no. Dado ε, se eligen a y $a \pm \delta$ (puntos separados a distancia δ), y se plantea la pregunta ¿es posible que para δ pequeño se pueda conseguir $\left| f(a) - f(a \pm \delta) \right| < \varepsilon$ para cualquier valor a? Si la respuesta es afirmativa, entonces f es uniformemente continua. En la práctica resulta relativamente sencillo hacer estas comprobaciones.

- Para la función $f(x) = 4x$, dado $\varepsilon > 0$, ¿es posible hacer $\left| f(a) - f(a \pm \delta) \right| < \varepsilon$? Como $\left| f(a) - f(a \pm \delta) \right| = 4\delta$, la pregunta se transforma en ¿es posible elegir δ para que $4\delta < \varepsilon$. La respuesta es afirmativa: basta tomar $\delta < \varepsilon/4$. Esta función es uniformemente continua en todo $\mathbb{R}$.
- Para $f(x) = x^2$ de nuevo se plantea $\left| f(a) - f(a \pm \delta) \right| < \varepsilon$. ¿Es posible encontrar un δ que cumpla eso? En este caso, $\left| f(a) - f(a \pm \delta) \right| = |(\pm 2a + \delta)\delta|$. Mantener esta cantidad menor que ε para cualquier valor de a es imposible: si a es un valor grande entonces no se puede mantener $|(\pm 2a + \delta)\delta| < \varepsilon$. La función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. Sin embargo, sí lo es en $[0,\ 4]$. En este intervalo se cumple $|(\pm 2a + \delta)\delta| \leq (8+\delta)\delta$ y ahora sí es posible hacer $|(\pm 2a + \delta)\delta| \leq (8+\delta)\delta < \varepsilon$. Basta elegir $\delta < 1$ y $\delta < \varepsilon/9$ (se elige como δ el menor de esos dos valores), pues así $(8+\delta)\delta < (8+1) \cdot \varepsilon/9 = \varepsilon$.
- La función $f(x) = 1/x$ no es uniformemente en $(0, +\infty)$. Basta ver que

$$\left| f(a) - f(a \pm \delta) \right| = \left| \frac{1}{a} - \frac{1}{a \pm \delta} \right| = \frac{|a \pm \delta - a|}{|a \pm \delta| \cdot |a|} = \frac{\delta}{|a \pm \delta| \cdot a}$$

que no se puede mantener menor que ε para cualquier a (para valores de a próximos a 0 la expresión anterior se hace arbitrariamente grande). Ahora bien, la función $f(x) = 1/x$ sí es uniformemente continua en $[2, +\infty)$. En este intervalo se tiene $a \geq 2$ y $a \pm \delta \in (1, 3)$ para δ*pequeo*, y así

$$\left|f(a) - f(a \pm \delta)\right| = \frac{\delta}{|a \pm \delta| \cdot a} \leq \frac{\delta}{1 \cdot 2} = \frac{\delta}{2} < \varepsilon$$

si se elige $\delta < 2\varepsilon$.

Proposición. *La suma y producto por escalares de funciones uniformemente continuas es uniformemente continua.*

En general, el producto y cociente de funciones uniformemente continuas no es uniformemente continua. Por ejemplo, la función $f(x) = x$ es uniformemente continua en $(0, +\infty)$ pero $1/f$ y f^2 no lo son.

Teorema. *Toda función continua en un compacto es uniformemente continua.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en cada punto $x \in A$, se tiene

$$\exists \delta_x > 0 \;:\; y \in A,\ |y - x| < \delta_x \;\Rightarrow\; \left|f(y) - f(x)\right| < \varepsilon/2.$$

Con estos valores δ_x se puede formar un recubrimeinto abierto de A,

$$A \subset \bigcup_{x \in A} \left(x - \frac{\delta_x}{2},\, x + \frac{\delta_x}{2}\right).$$

Como A es compacto, se puede extraer un subrecubrimiento finito:

$$A \subset \left(x_1 - \frac{\delta_{x_1}}{2},\, x_1 + \frac{\delta_{x_1}}{2}\right) \cup \ldots \cup \left(x_n - \frac{\delta_{x_n}}{2},\, x_n + \frac{\delta_{x_n}}{2}\right).$$

Se define $\delta = \min\{\delta_{x_1}/2, \ldots, \delta_{x_n}/2\}$ que verifica $\delta > 0$. Se trata de comprobar que si $x, y \in A$ y $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Con esto se prueba que f es uniformemente continua y se termina la demostración.

Sean entonces $x, y \in A$ verificando $|x - y| < \delta$. Por una parte, existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$x \in \left(x_j - \frac{\delta_{x_j}}{2},\, x_j + \frac{\delta_{x_j}}{2}\right)$$

y por otra

$$|y - x_j| \leq |y - x| + |x - x_j| < \delta + \frac{\delta_{x_j}}{2} \leq \frac{\delta_{x_j}}{2} + \frac{\delta_{x_j}}{2} = \delta_{x_j}.$$

Esto dice que x e y están en el mismo intervalo $\left(x_j - \delta_{x_j},\, x_j + \delta_{x_j}\right)$. Por tanto,

$$\left|f(x) - f(y)\right| \leq \left|f(x) - f(x_j)\right| + \left|f(x_j) - f(y)\right| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

(se aplica en cada sumando la continuidad de f en x_j) y f es uniformemente continua. □

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura