Fundamentos Científicos del Currículum I

Límites y continuidad

Índice

Puntos de acumulación y puntos aislados.

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ y sea x_0 un punto de $\mathbb{R}$.

Definición

Se dice que x_0 es un punto de acumulación de A si para todo número real $r > 0$ se cumple que:

$$[(x_0 - r,\, x_0 + r) \setminus \{x_0\}] \cap A \neq \emptyset$$

El conjunto formado por todos los puntos de acumulación de A se denota A'.

Ejemplos

- Si $A = (0,\, 1)$, $A' =$
- Si $B = \{0,\, 1,\, 2,\, 3\}$, $B' =$
- Si $C = \{1/n : n \in \mathbb{N}^+\}$, $C' =$
- Si $D = (0,\, 1) \cup \{2\} \cup [3,\, 4)$, $D' =$
- Si $E = \mathbb{Q}$, $E' =$

Definición

Se dice que x_0 es un punto aislado de A si existe número real $r > 0$ tal que:

$$(x_0 - r,\, x_0 + r) \cap A = \{x_0\}$$

El conjunto formado por todos los puntos aislados de A se denota A^s.
Observemos que $A^s = A \cap (A')^c$

Ejemplos

- Si $A = (0,\, 1)$, $A^s =$
- Si $B = \{0,\, 1,\, 2,\, 3\}$, $B^s =$
- Si $C = \{1/n : n \in \mathbb{N}^+\}$, $C^s =$
- Si $D = (0,\, 1) \cup \{2\} \cup [3,\, 4)$, $D^s =$
- Si $E = \mathbb{Q}$, $E^s =$

Límite de una función en un punto

Definición

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y sea x_0 un punto de acumulación de A. Se dice que $l \in \mathbb{R}$ es límite de f en x_0 si

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : x \in A,\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \epsilon$$

Es decir, si

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : x \in A \cap (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta),\ x \neq x_0 \implies f(x) \in (l - \epsilon,\ l + \epsilon)$$

O también si

$$\forall V = (l - \epsilon,\ l + \epsilon),\ \exists U = (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} : f(U \cap A) \subset V$$

Si l es límite de f en x_0 se escribe $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

Ejemplos

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to x^2,\ \lim_{x \to 0} f(x) = 0.$
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ $\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$
- $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \to x^2,\ \lim_{x \to 0} h(x) = 0.$
- $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$
- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ Esta función no tiene límite en ningún punto.

Proposición

El límite de una función en un punto, si existe, es único.

Álgebra de límites

Sean $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A' \cap B'$, $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$. Si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = b$$

entonces:

- $\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = a + b$
- $\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = a \cdot b$
- Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{x \to x_0} (\lambda f)(x) = \lambda \lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda a$
- Si $a \neq 0$, entonces

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \to x_0} f(x)} = \frac{1}{a}$$

Límites laterales

Límite por la derecha
Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Se dice que x_0 es punto de acumulación por la derecha de A si $\forall \delta > 0$ se cumple que $(x_0, x_0 + \delta) \cap A \neq \emptyset$

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y sea x_0 un punto de acumulación de A por la derecha. Se dice que $l \in \mathbb{R}$ es límite de f en x_0 por la derecha si

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : x \in A, \; x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - l| < \epsilon$$

Se denota

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

Límite por la izquierda
Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Se dice que x_0 es punto de acumulación por la izquierda de A si $\forall \delta > 0$ se cumple que $(x_0 - \delta, \; x_0) \cap A \neq \emptyset$

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y sea x_0 un punto de acumulación de A por la izquierda. Se dice que $l \in \mathbb{R}$ es límite de f en x_0 por la izquierda si

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : x \in A, \; x_0 - \delta < x < x_0 \implies |f(x) - l| < \epsilon$$

Se denota

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$$

- Si x_0 es punto de acumulación de A por la izquierda o por la derecha entonces x_0 es punto de acumulación de A.
- Si x_0 es punto de acumulación de A por la izquierda y por la derecha entonces

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Límites en el infinito

Si $A \subset \mathbb{R}$ no está acotado superiormente, es decir, para todo $M > 0$ se tiene que $A \cap (M, +\infty) \neq \emptyset$, entonces se considera que $+\infty$ es un punto de acumulación de A.

Análogamente, si $A \subset \mathbb{R}$ no está acotado inferiormente, es decir, para todo $M < 0$ se tiene que $A \cap (-\infty, M) \neq \emptyset$, entonces se considera que $-\infty$ es un punto de acumulación de A.

Definición

Sea A un conjunto no acotado superiormente y sea $f : A \to \mathbb{R}$. Se dice que l es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$ si

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists M > 0 : x \in A, \ x > M \implies |f(x) - l| < \epsilon$$

Se denota

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

Definición

Sea A un conjunto no acotado inferiormente y sea $f : A \to \mathbb{R}$. Se dice que l es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $-\infty$ si

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists M < 0 : x \in A, \ x < M \implies |f(x) - l| < \epsilon$$

Se denota

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

El Álgebra de límites es también válida para límites en el infinito.

Sean $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, dos subconjuntos no acotados superiormente. Sean $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$. Si

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = b$$

entonces:

- $\lim_{x \to +\infty}(f + g)(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) + \lim_{x \to +\infty} g(x) = a + b$
- $\lim_{x \to +\infty}(f \cdot g)(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \to +\infty} g(x) = a \cdot b$
- Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{x \to +\infty}(\lambda f)(x) = \lambda \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lambda a$
- Si $a \neq 0$, entonces

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \to +\infty} f(x)} = \frac{1}{a}$$

Y análogamente para $-\infty$.

Límites infinitos

Definición
Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y sea x_0 un punto de acumulación de A. Se dice que el límite de f en x_0 es $+\infty$, y se denota, $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ si

$$\forall M\, \exists \delta > 0 : x \in A,\, 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M$$

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$

Definición
Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y sea x_0 un punto de acumulación de A. Se dice que el límite de f en x_0 es $-\infty$, y se denota, $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ si

$$\forall M\, \exists \delta > 0 : x \in A,\, 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) < M$$

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$

Límites infinitos en el infinito

- Si A no está acotado superiormente, diremos que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si:

$$\forall M\, \exists N : x \in A,\ x > N \implies f(x) > M$$

- Si A no está acotado superiormente, diremos que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ si:

- Si A no está acotado inferiormente, diremos que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ si:

- Si A no está acotado inferiormente, diremos que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si:

Función continua en un punto

Definición

Una función $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en $a \in A$ si o bien a es un punto aislado o bien a es un punto de acumulación de A y $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Es decir, si:

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 : x \in A,\ 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Es decir, si

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 : x \in A \cap (a - \delta,\ a + \delta), \implies f(x) \in (f(a) - \epsilon,\ f(a) + \epsilon)$$

O si

$$\forall V = (f(a) - \epsilon,\ f(a) + \epsilon),\ \exists U = (a - \delta,\ a + \delta) : f(U \cap A) \subset V$$

O también si

$$\forall V = (f(a) - \epsilon,\ f(a) + \epsilon),\ \exists U = (a - \delta,\ a + \delta) : U \cap A \subset f^{-1}(V)$$

Función continua en un conjunto

Definición
Se dice que $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en A si es continua en todos los puntos de A.

Ejemplos

Discontinuidades

- **Discontinuidad evitable.**
- **Discontinuidad de salto finito.**
- **Discontinuidad de salto infinito.**
- **Discontinuidad asintótica.**
- **Discontinuidad esencial o de segunda especie.**

Operaciones con funciones continuas

Proposición

Si las funciones f y g son continuas en un punto a, entonces:

- La suma $f + g$ es continua en a.
- El producto $f \cdot g$ es una función continua en a.
- Si $\lambda \in \mathbb{R}$, la función λf es continua en a.
- Si $g(a) \neq 0$, entonces f/g es continua en a.

Proposición

Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que $f(A) \subset B$. Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a. Es decir, la composición de funciones continuas es continua.

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(\lim_{x \to a} f(x)) = g(f(a))$$

Continuidad de las funciones elementales

- Toda función constante es continua en $\mathbb{R}$.
- La función identidad $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I(x) = x$ es continua en $\mathbb{R}$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, la función λI es continua en $\mathbb{R}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, la función $f(x) = x^n$ es continua en $\mathbb{R}$.
- Toda función polinómica
  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ es continua en $\mathbb{R}$.
- Una función racional

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

  es continua en todo su dominio.

- Las funciones potenciales

$$f(x) = x^p, \quad p \in \mathbb{R}$$

  son continuas en su dominio.
- Las funciones exponenciales

$$f(x) = a^x, \quad a > 0$$

  son continuas en $\mathbb{R}$
- Las funciones logarítmicas

$$f(x) = \log_a(x), \quad a > 0$$

  son continuas en $(0, +\infty)$

- Las funciones trigonométricas son continuas en todo su dominio.
- Todas las funciones que se obtienen como sumas, productos y composiciones de funciones polinómicas, racionales, potenciales, exponenciales, logarítmicas o trigonométricas, son continuas en todo su dominio.

Conservación del signo

Lema

Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función continua en un punto a y $f(a) \neq 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que f no cambia de signo en $(a - \delta, a + \delta)$. Es decir, si $f(a) > 0$, entonces:

$$\exists \delta > 0 : f(x) > 0, \forall x \in (a - \delta, a + \delta) \cap A$$

Y, si $f(a) < 0$ entonces

$$\exists \delta > 0 : f(x) < 0, \forall x \in (a - \delta, a + \delta) \cap A$$

Teorema de Bolzano

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua y $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema del valor intermedio

La imagen por una aplicación continua de un intervalo, es un intervalo.

Acotación

Lema

Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función continua en un punto a entonces existe $\delta > 0$ tal que f está acotada en $(a - \delta, a + \delta) \cap A$, es decir $f((a - \delta, a + \delta) \cap A)$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$.

Teorema

Si una función $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ es continua entonces está acotada, es decir $f([a,\ b])$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$.

Demostración

Sea $A = \{x \in [a, b] : f \text{ está acotada en } [a,\ x]\}$. Por el Lema de acotación, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que f está acotada en $[a, a + \delta)$, luego si $x \in [a, a + \delta)$, $x \in A$.
Como A no es vacío y está acotado superiormente, existe $c = \text{supremo}(A)$.
Si $c < b$, entonces existe $\delta > 0$ tal que f está acotada en $(c - \delta, c + \delta)$. Como c es la menor de las cotas superiores de A, tenemos que $c - \delta$ no es cota superior de A, luego existe $x \in (c - \delta, c] \cap A$, es decir, tal que f está acotada en $[a, x]$. Como $[a, c + \delta) = [a, x] \cup (c - \delta, c + \delta)$,
$f([a, c + \delta)) = f([a, x]) \cup f((c - \delta, c + \delta))$ es unión de dos subconjuntos acotados y por lo tanto es acotado (Observemos que con este argumento estamos probando que f está acotada en $[a, c]$)
Luego para cualquier $y \in (c,\ c + \delta)$, tenemos que f está acotada en $[a, y]$, o sea, $y \in A$. Esto significaría que c no es cota superior de A.
Luego, no puede ocurrir que c sea menor que b. Así, $c = b$ y f está acotada en $[a, b]$.

Teorema de Weierstrass

Si una función $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ es continua entonces alcanza en $[a,\ b]$ el máximo y el mínimo absolutos. Es decir, existen $c_1, c_2 \in [a,\ b]$ tales que

$$f(c_1) = \text{máximo}\{f(x) : x \in [a,\ b]\}$$

$$f(c_2) = \text{mínimo}\{f(x) : x \in [a,\ b]\}$$