EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **16**, Núm. 3, 351 – 359 (2001)

Linéarisation des Difféomorphismes Analytiques dans une Algèbre de Banach

A. Attioui, A. Azhari

Département de Mathématiques et d'Informatique, Faculté des Sciences Ben M'Sik, Université Hassan II Mohammadia, B.P. 7955 Ben M'Sik, Casablanca, Maroc

Département de Mathématiques, Ecole Normale Supérieure, Casablanca, B.P. 9172 Mers Sultan, Casablanca, Maroc

(Research paper presented by E. Galé)

AMS *Subject Class.* (2000): 46J99, 30D05 *Received October* 15, 2000

1. Introduction

Soit λ un nombre complexe non nul, et f un difféomorphisme holomorphe au voisinage d'un point fixe, qu'on ramène à l'origine, telle que $f'(0) = \lambda$. On dit que f est linéarisable en 0, s'il existe un difféomorphisme h holomorphe au voisinage de 0, laissant fixe le point 0, et de multiplicateur $h'(0) = 1$, vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$f \circ h = h \circ R_\lambda \tag{1}$$

où R_λ est la rotation $R_\lambda(z) = \lambda z$, $(z \in \mathbb{C})$. h est appelée la linéarisante de f.

L'étude de l'équation (1) est attribuée à H. Poincaré, lorsque $|\lambda| \neq 1$, [5]. Il a montré que, si $|\lambda| < 1$, alors f est linéarisable en 0. Si $|\lambda| > 1$, on se ramène au premier cas, en considérant la réciproque de f, au voisinage de 0. On remarque que f et sa réciproque, au voisinage de 0, ont la même linéarisante.

Si λ est une racine de l'unité, et si f n'est pas la rotation R_λ, f n'est pas linéarisable en 0, [1].

Si $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. La nature arithmétique de α, joue un rôle essentielle dans l'étude de l'équation (1). En 1965 A. Brujno [3], considère la suite (p_n/q_n) des réduites du développement en fraction continue du nombre α. En posant : $B(\alpha) = \sum_{n\geq 0} \log q_{n+1}/q_n$, appelé le nombre de Brujno, eventuellement infini, de α. Il montre que si $B(\alpha)$ est fini, alors f est linéarisable en 0. Et ce n'est qu'en 1987 C. J. Yoccoz [6] montra la réciproque pour les polynômes quadratiques.

L'objet de ce travail est d'obtenir des résultats analogues pour les difféomorphismes analytiques à éléments dans une algèbre de Banach $(A, \| \|)$, complexe commutative et unitaire, d'unité e. Etant donné, un élément inversible a de A, et $f(x) = ax + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$ une série convergente au voisinage de 0, où (a_n) est une suite de A. On cherche une solution h, de l'équation fonctionnelle $f \circ h = h \circ R_a$, de même type que f, laissant invariant l'origine et dont la partie linéaire est l'identité. Algébriquement, il est facile de déterminer une unique série formelle h, à coéfficients dans A, solution de cette équation. Par ailleurs, la convergence de cette série h est assurée moyennant une hypothèse sur le spectre de a.

Dans toute la suite, on désigne par $\mathrm{Inv}(A)$ le groupe des éléments inversibles de A, et par $X(A)$ le spectre de A, c'est l'espace des caractères χ de A, i.e. $\chi : A \to \mathbb{C}$ morphisme d'algèbre tel que $\chi(e) = 1$. Pour tout $x \in A$, le spectre de x est la partie $\mathrm{Sp}(x) = \{\lambda \in \mathbb{C}/(\lambda e - x) \in A \setminus \mathrm{Inv}(A)\}$. Le rayon spectrale de x est le nombre $\rho(x) = \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(x)} |\lambda|$. La transformée de Gelfand de x est l'application $\hat{x}$ de $X(A)$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $\hat{x}(\chi) = \chi(x)$, $\chi \in X(A)$. L'application $\hat{x}$ ne prend pas la valeur 0 si $x \in \mathrm{Inv}(A)$.

2. Germes de difféomorphismes analytiques

Une fonction analytique en 0, c'est une série formelle de $A[[X]]$, qui converge au voisinage de 0, plus précisemment on a :

Définition 1. On dit qu'une fonction f est analytique en 0, s'il existe une suite (a_n) d'éléments de A, et un voisinage V de 0, dans A, tels que : Pour tout $x \in V$, la série de terme général $(a_n x^n)$ converge, et $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. On dit que f est un difféomorphisme analytique en 0, si f est analytique en 0, $f(0) = 0$, et f admet une fonction réciproque qui soit analytique en 0.

On définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des difféomorphismes analytiques en 0, qui est un groupe pour la loi de composition, par : $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ dans un voisinage de 0. On désigne par $(A, 0)$ l'ensemble des classes d'équivalences de cette relation. Un élément f de $(A, 0)$ est appelé germe de difféomorphisme analytique en 0. Dans la suite tout élément de la classe f, on le notera aussi par f.

Proposition 1. *Soit $a \in \mathrm{Inv}(A)$, et soit f analytique en 0, telle que $f(0) = 0$, et $f'(0) = R_a$, où R_a est, l'automorphisme de A, définie par : $R_a(h) = ah$, $(h \in A)$. Alors f est un difféomorphisme analytique de $(A, 0)$.*

Démonstration. Ecrivons f sous la forme $f(x) = ax + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$, pour $\|x\| < \eta$, $(\eta > 0)$. Soit g une série formelle de $A[[x]]$, $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$, avec $b_1 = a^{-1}$. De la relation $f(g(x)) = x$, on montre que, pour tout $n \geq 2$, $ab_n = P_n(a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_{n-1})$, où P_n est un polynôme en $2n-2$ variables à coéfficients entiers positifs. On en déduit, par récurrence, l'existence et l'unicité de la suite $(b_n)_{n\geq 2}$.

Il reste à montrer la convergence de la série g, dans un voisinage de 0. Pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\|b_n\| \leq \|a^{-1}\| P_n(\|a_2\|, \ldots, \|a_n\|, \|b_1\|, \ldots, \|b_{n-1}\|) \tag{1}$$

Soit $\eta > r > 0$, alors la suite $(r^n a_n)$ est bornée dans A. Posons $M = \sup_{n\geq 1} \|a_n\| r^n$. La relation (1) devient

$$\|b_n\| \leq \|a^{-1}\| P_n \left(\frac{M}{r^2}, \ldots, \frac{M}{r^n}, \|b_1\|, \ldots, \|b_{n-1}\| \right) \tag{2}$$

Considérons la suite récurrente, de nombres réels positifs, définie par $\alpha_1 = \|a^{-1}\|$, et pour tout $n \geq 2$, $\alpha_n = \|a^{-1}\| P_n(M/r^2, \ldots, M/r^n, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$. La série entière complexe $\alpha(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n$, admet la série entiére $\beta(z) = \|a^{-1}\|^{-1} z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{M}{r^n} z^n$, comme série réciproque. La série α a donc un rayon de convergence non nul. De la relation (2) on montre, par récurence, que pour tout $n \geq 1$, $\|b_n\| \leq \alpha_n$. D'où la convergence de g au voisinage de 0. On termine la preuve grâce au théorème de la fonction inverse. ∎

L'exemple suivant montre que le calcul fonctionnel holomorphe, [2], permet de prolonger un germe de difféomorphisme analytique de $(\mathbb{C}, 0)$ à un germe de difféomorphisme analytique de $(A, 0)$.

Exemple 1. Soit f un germe de difféomorphisme analytique de $(\mathbb{C}, 0)$. Il existe un ouvert V de $\mathbb{C}$, contenat 0, dans lequel f s'écrit sous la forme d'une série entière. Soit $\Omega = \{x \in A/\mathrm{Sp}(x) \subset V\}$, alors Ω est un ouvert de A, contenant 0. Le calcul fonctionnel holomorphe, permet de définir une application analytique $\overline{f}$ de Ω dans A par [2] :

$$\overline{f}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V_x} f(z)(ze - x)^{-1} dz$$

où V_x est un domaine de Cauchy, tel que $\mathrm{Sp}(x) \subset \overset{\circ}{V}_x \subset V_x \subset V$. En particulier , $\overline{f}$ est analytique en 0. De la même façon, on peut définir l'application analytique en 0, $\overline{f^{-1}}$. D'aprés la formule de la composition du calcul fonctionnel holomorphe, on a : pour tout $x \in \Omega$, $\overline{f^{-1}} \circ \overline{f}(x) = \overline{f^{-1} \circ f}(x) = x$, alors $\overline{f^{-1}} = \overline{f}^{-1}$. Donc $\overline{f} \in (A, 0)$.

Exemple 2. Soit $a \in \mathrm{Inv}(A)$, les applications f et g définies au voisinage de 0 par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n x^n \ , \quad g(y) = a^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} y^n$$

sont analytiques en 0. On vérifie facilement que f et g sont réciproques l'une de l'autre, dans un voisinage convenable de 0. Donc f est un difféomorphisme analytique en 0.

Exemple 3. Soit $a \in \mathrm{Inv}(A)$, l'application $f(x) = a(x - x^2)$, est analytique en 0. Dans un voisinage de 0, f admet une fonction réciproque g qui est aussi analytique en 0 (Proposittion 1). Pour déterminer explicitement la fonction g, nous considérons la série entière complexe, $\sqrt{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$, pour $|z| < 1$. Alors l'application g est définie, dans un voisinage de 0, par : $2g(y) = -\sum_{n=1}^{\infty} (-4a^{-1})^n \alpha_n y^n$.

Remarque 1. L'exemple 1 montre qu'on peut prolonger un germe de $(\mathbb{C}, 0)$ à un germe de $(A, 0)$. Inversement, on peut à partir d'un germe de $(A, 0)$ construire des germes de $(\mathbb{C}, 0)$ de la manière suivante. Soit $f \in (A, 0)$, il existe $\eta > 0$, et une suite $(a_n)_{n \geq 2}$ de A, tels que :

$$f(x) = ax + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n, \text{ pour tout } \|x\| < \eta.$$

Alors $a \in \mathrm{Inv}(A)$. Pour tout $\chi \in X(A)$, on désigne par f^χ, l'application définie sur le disque D_η à valeurs complexes :

$$f^\chi(z) = \chi(a) z + \sum_{n=2}^{\infty} \chi(a_n) z^n$$

Alors f^χ est un germe de difféomorphisme analytique de $(\mathbb{C}, 0)$, tel que $f^\chi(0) = 0$ et $(f^\chi)'(0) = \chi(a)$.

3. Linéarisation des germes de difféomorphismes analytiques en 0

Soit $a \in \mathrm{Inv}(A)$, on désigne par $G_a(A)$, l'ensemble des germes de difféomorphismes analytiques f de $(A, 0)$, tels que $f(0) = 0$ et $f'(0) = R_a$, où R_a est l'automorphisme de A défini par : $R_a(x) = ax$, $(x \in A)$. Si $f \in G_a(A)$, f peut s'écrire comme somme d'une série de puissances au voisinage de 0. On dit que f est non linéaire, si l'un des coéfficients de cette série, autre que a, est inversible. On introduit la définition suivante qui correspond à celle mentionnée dans [4], en dimension 1.

Définition 2. Soit $f \in G_a(A)$, on dit que f est linéarisable en 0, s'il existe h analytique au voisinage de 0, telle que $h(0) = 0$ et $h'(0) = R_e$, vérifiant l'équation foncionnelle $f \circ h = h \circ R_a$, h est appelée la linéarisante de f. Une telle h est alors dans $G_e(A)$, d'aprés la proposition 1.

Dans le théorème suivant, nous donnons une condition nécessaire pour qu'un germe de difféomorphisme analytique de $(A, 0)$ soit linéarisable. Pour la définition de f^χ, voir la remarque 1.

Théorème 1. *Soit $a \in \mathrm{Inv}(A)$, si $f \in G_a(A)$ est linéarisable en 0 dans A, alors pour tout χ de $X(A)$, f^χ est linéarisable en 0 dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Soit h la linéarisante de f, $h(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$, pour tout $\|x\| < \eta$, où $\eta > 0$, et $(h_n)_{n\geq 2}$ une suite de A. Pour tout χ de $X(A)$, considérons l'application analytique complexe définie pour tout $|z| < \eta$ par : $h^\chi(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \chi(h_n) z^n$. Alors f^χ est linéarisable en 0, et sa linéarisante est h^χ, en effet, pour tout $|z| < \eta$, on a : $f^\chi \circ h^\chi(z) = \chi(f \circ h(z.e)) = \chi(h(z.a)) = h^\chi(\chi(a)z)$. ∎

Le théorème suivant montre que la linéarisation dans A des germes de difféomorphismes analytiques de $(A, 0)$, qui proviennent de $(\mathbb{C}, 0)$, est la même que celle dans le plan complexe.

Théorème 2. *Soit f un germe de difféomorphisme analytique de $(\mathbb{C}, 0)$, tel que $f(0) = 0$ et $f'(0) = \lambda$ non nul. Alors $\overline{f} \in G_{\lambda.e}(A)$, et pour que $\overline{f}$ soit linéarisable en 0 il faut et il suffit que f le soit. ($\overline{f}$ est définie dans l'exemple 1).*

Démonstration. On a vu que $\overline{f} \in (A, 0)$, $\overline{f}(0) = 0$ et $\overline{f}'(0) = R_{\lambda.e}$. Il existe $r > 0$, et une suite de complexe $(\lambda_n)_{n\geq 2}$ tels que $f(z) = \lambda z + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n z^n$, pour tout $z \in D_r = \{z \in \mathbb{C}/|z| < r\}$. Soit $\Omega_r = \{x \in A/\mathrm{Sp}(x) \subset D_r\}$, alors Ω_r est ouvert de A contenant 0, et pour tout $x \in \Omega_r$ on a : $\overline{f}(x) = \lambda x + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n x^n$. Si f est linéarisable, et h sa linéarisante. Alors $\overline{h}$ est analytique en 0 . La formule de composition du calcul fonctionnel holomorphe donne : $\overline{f} \circ \overline{h} = \overline{f \circ h} = \overline{h \circ R_\lambda} = \overline{h} \circ R_{\lambda.e}$.

Inversement, si $\overline{f}$ est linéarisable, et H sa linéarisante. Puisque H est analytique en 0, il existe un ouvert V de A, contenat 0, et une suite $(h_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de A tels que : $H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n x^n$, pour tout $x \in V$. De la relation $\overline{f}(H(x)) = H(ax)$, on montre facilement, par recurrence, que $h_n \in \mathbb{C}.e$, pour tout $n \geq 1$. Soit h l'application complexe définie dans l'ouvert, $\{z \in \mathbb{C}/z.e \in V\}$ par : $h(z) = H(z.e)$, alors h est analytique en 0, et c'est la linéarisante de f. ∎

Théorème 3. *Soit $a \in \mathrm{Inv}(A)$ tel que $a^n - a \in \mathrm{Inv}(A)$, pour tout $n \geq 2$. Si la suite $((a^n - a)^{-1})_{n\geq 2}$ est bornée, alors tout f de $G_a(A)$ est linéarisable en 0.*

Démonstration. Soit $f \in G_a(A)$. On peut écrire f, sous la forme $f(x) = ax + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$, pour $\|x\| < \eta$, où η est un réel > 0, et (a_n) est une suite d'éléments de A. Quitte à remplacer f par $R_{\lambda.e} \circ f \circ R_{\lambda.e}^{-1}$, pour un $\lambda < \eta$ convenable, on peut supposer que pour tout $n \geq 2$, $\|a_n\| \leq 1$.

On considère la série formelle de la linéarisante h de f, sans se préoccuper de la convergence, à l'aide de la relation $f(h(x)) = h(ax)$, on détermine les coéfficients de h. Nous montrons alors que la série construite est analytique en 0, et nous obtenons donc le résultat.

Ecrivons h, formellement, sous la forme, $h(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n$. La relation $f(h(x)) = h(ax)$ donne :

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n (a^n - a) x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (x + b_1 x^2 + \cdots)^n$$

Comme $a^n - a$ est inversible, pour tout $n \geq 2$. Alors, par une récurrence simple, on détermine, de manière unique, les coéfficients b_n, en utilisant la relation :

$$b_1 = e \quad , \quad b_n(a^n - a) = P_n(a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_{n-1})$$

où P_n est un polynôme en $2n-2$ variables à coéfficients entiers positifs. Posons $M = \sup_{n\geq 2} \|(a^n - a)^{-1}\|$, M est fini par hypothèse. Alors, pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\|b_n\| \leq M P_n(1, \ldots, 1, \|b_1\|, \ldots, \|b_{n-1}\|)$$

Considérons la suite réccurente de réels positifs $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\alpha_1 = 1 \ , \quad \alpha_n = MP_n(1,\ldots,1,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}) \quad , \ n \geq 2$$

La série entière complexe, $\alpha(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n$ vérifie l'équation : $\alpha(z) - M\sum_{n=2}^{\infty}(\alpha(z))^n = z$. Donc α est la fonction réciproque, au voisinage de 0, de la série complexe, de rayon de convergence 1, définie par $\beta(z) = z - M\sum_{n=2}^{\infty} z^n$. Ainsi, le rayon de convergence de α est non nul. Une récurrence simple montre que, pour tout $n \geq 1$, $\|b_n\| \leq \alpha_n$. Donc la série formelle h converge au voisinage de 0, par suite h est analytique en 0 et c'est la linéarisante de f, ce qui termine la preuve. ∎

L'étude de la linéarisation d'un germe de difféomorphisme analytique de $G_a(A)$ est de nature topologique, elle est indépendante de la métrique choisie. On s'attend donc à ce que le spectre de a joue un rôle prépondérant pour cette étude. Le résultat suivant montre dès que le spectre ne contient pas de nombre complexe de module un, la réponse au problème de la linéarisation est positive. Ce cas peut être considérer comme l'analogue à celui étudié par Poincaré, dans le plan complexe [5]. Nous utilisons les notations : $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}/|z| < 1\}$, et $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\}$.

Théorème 4. *Soit* $a \in \mathrm{Inv}(A)$ *tel que* $\mathrm{Sp}(a) \cap \mathbb{U} = \emptyset$, *alors tout* f *de* $G_a(A)$ *est linéarisable en* 0.

Démonstration. Soit $f \in G_a(A)$, nous distinguons trois cas :

1) Si $\mathrm{Sp}(a) \subset \mathbb{D}$, alors pour tout $n \geq 2$, $a - a^n$ est inversible. D'autre part, puisque $\rho(a) < 1$, alors $a^n \to 0$, par suite $(a - a^n)^{-1} \to a^{-1}$. Le résultat découle donc du théorème 2.

2) Si $\mathrm{Sp}(a) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, alors $\mathrm{Sp}(a^{-1}) \subset \mathbb{D}$. Si g désigne la fonction réciproque de f, dans un voisinage de 0, alors $g \in G_{a^{-1}}(A)$. D'aprés le cas précédent, g est linéarisable en 0. Soit h la linéarisante de g. Puisque $h \circ R_{a^{-1}} = g \circ h$, on a : $f \circ h = f \circ h \circ R_{a^{-1}} \circ R_a = f \circ g \circ h \circ R_a = h \circ R_a$. Donc f est linéarisable en 0, et sa linéarisante est h.

3) Si $\mathrm{Sp}(a)$ recontre $\mathbb{D}$ et $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$. Soient $X_1 = \{\chi \in X(A)/|\chi(a)| < 1\}$ et X_2 son complémentaire dans $X(A)$. Alors X_1 et X_2 forment une partition de $X(A)$ en parties non vides et à la fois ouverts et fermés. Il existe un idempotent e_1, non trivial ([2], Théorème 5, p. 109) tel que, si on pose $e_2 = e - e_1$, la transformée de Gelfand $\hat{e}_i$, de e_i, soit l'application caractéristique de X_i. Soit $A_i = e_i A$, alors A_i est une algèbre de Banach complexe commutative unitaire, d'unité e_i et $A = A_1 \oplus A_2$. Posons $a_i = e_i a$, alors $a_i \in \mathrm{Inv}(A_i)$,

et $\mathrm{Sp}_{A_i}(a_i) = \{\chi(a_i)/\chi \in X_i\}$. Donc $\mathrm{Sp}_{A_1}(a_1) \subset \mathbb{D}$ et $\mathrm{Sp}_{A_2}(a_2) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$. Posons $f_i(x) = f(e_i x) = e_i f(x)$, alors $f_i \in G_{a_i}(A_i)$, d'aprés les cas 1) et 2) précédents, f_i est linéarisable en 0, dans A_i. Soit h_i la linéarisante de f_i, alors $h(x) = h_1(e_1 x) + h_2(e_2 x)$ est analytique en 0, dans A. Dans un voisinage de 0, dans A, on a :

$$\begin{aligned} h(f(x)) &= h_1(e_1 f(x)) + h_2(e_2 f(x)) = h_1 \circ f_1(x) + h_2 \circ f_2(x) \\ &= h_1(a_1 x) + h_2(a_2 x) = h(ax) \end{aligned}$$

Donc f est linéarisable en 0, et h est sa linéarisante. ∎

Suite au théorème précédent, il reste à étudier le cas où le spectre recontre le cercle unité du plan complexe. Dans un premier cas, on a le résultat négatif suivant. On pose $\mathbb{U}_P = \{e^{2\pi i\alpha}/\alpha \in P\}$, pour une partie P de $\mathbb{R}$.

Théorème 5. *Soit* $a \in \mathrm{Inv}(A)$, *tel que* $\mathrm{Sp}(a) \cap \mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$ *est non vide. Si* $f \in G_a(A)$ *et* f *non linéaire, alors* f *n'est pas linéarisable en* 0.

Démonstration. Soit χ un caractére de $X(A)$ tel que $\chi(a)$ est une racine de l'unité. Puisque f est non linéaire, on a f^χ n'est pas une rotation, et donc n'est pas linéarisable en 0, [1]. D'aprés le théorème 1, f n'est pas linéarisable en 0. ∎

Le théorème suivant donne aussi un résultat négatif. Ce résultat correspond à celle de Yoccoz [6]. On note par B l'ensemble des réels irrationnels α dont le nombre de Brujno $B(\alpha)$ est fini [3].

Théorème 6. *Soit* $a \in \mathrm{Inv}(A)$, *tel que* $\mathrm{Sp}(a) \cap \mathbb{U}_{(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\setminus B}$ *est non vide. Alors il existe* $f \in G_a(A)$ *qui n'est pas linéarisable en* 0.

Démonstration. Soit χ un caractére de $X(A)$ tel que $\chi(a) = e^{2\pi i\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et $B(\alpha) = \infty$, alors le polynôme complexe $P(z) = e^{2\pi i\alpha}(z-z^2)$, n'est pas linéarisable en 0 [6]. Considérons la fonction polynomiale définie dans A par : $f(x) = a(x - x^2)$, on a $f \in G_a(A)$ (Exemple 3). D'aprés le théorème 1, f n'est pas linéarisable en 0, puisque $f^\chi = P$ ne l'est pas. ∎

Remerciements

Le premier auteur remercie vivement les Professeurs M. Akkar et M. Aamri pour leurs encouragements.

Références

[1] BLANCHARD, P., Complex analytic dynamics on the Riemann sphere, *Bulletin of the Amer. Math. Soc.,* **11** (1) (1984), 85 – 141.

[2] BONSALL, F., DUNCAN, J., "Complete Normed Algebras", Springer Verlag, New York, 1973.

[3] BRUJNO, A.D., Analytical form of differential equations, *Transaction Moscow Math. Soc.,* **25** (1971), 131 – 288.

[4] PÉREZ-MARCO, R., "Solution Complète au Problème de Siegel de Linéarisation d'une Application Holomorphe au Voisinage d'un Point Fixe", (D'après J.C. Yoccoz), Séminaire Bourbaki, n. 753, 1992.

[5] POINCARÉ, H., "Oeuvres", tome I, Gauthier-Villars, Paris, (1928-1956).

[6] YOCCOZ, J.C., "Théorème de Siegel, Polynômes Quadratiques et Nombres de Brujno", Astérisque, 231, 1995.