EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **16**, Núm. 3, 343 – 349 (2001)

Sur les Transformations Additives qui Conservent le Spectre Ponctuel

Mustapha Ech-Cherif El Kettani, El Houcine El Bouchibti

Département de Mathématiques et d'Informatique, Faculté des Sciences Dhar-Mahraz, B.P. 1796 *Atlas Fès, Maroc*

e.mail: melkettani@caramail.com, e.elbouchibti@caramail.com

(Research paper presented by M. González)

AMS *Subject Class.* (2000): 46J99, 30D05, 47B49 *Received June* 19, 2000

Introduction

Soient X et Y deux espaces de Banach de dimensions infinies sur le corps des nombres complexes, $B(X)$ et $B(Y)$ sont respectivement les algèbres d'opérateurs bornés sur X et Y. On appelle spectre ponctuel d'un opérateur T l'ensemble des valeurs propres de T que nous notons par $\sigma_p(T)$. Le spectre ponctuel est une partie du spectre qui peut être vide, pour plus d'informations à propos de $\sigma_p(T)$ voir [3], [6] et [7]. Beaucoup de gens se sont interéssés aux transformations qui conservent certains ensembles dans les algébres d'opérateurs sur un espace de Banach de dimension infinie, on pourra voir par exemple [1], [2], [4], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15]. A. Jafarian et A.R. Sourour ont montré dans [1] que si X et Y sont des espaces de Banach de dimensions infinies et Φ une transformation de $B(X)$ sur $B(Y)$ qui est linéaire surjective et conserve le spectre, alors ou bien $\Phi(T) = ATA^{-1}$, ou bien $\Phi(T) = BT^*B^{-1}$ pour tout $T \in B(X)$, où $A : X \longrightarrow Y$ et $B : X' \longrightarrow Y$ sont des applications linéaires bijectives bornées. M. Omladič et P. Šemrl ont montré dans [11] qu'on obtient le même résultat avec les mêmes hypothèses en supposant que Φ est seulement additive. Puis dans [6] P. Šemrl a montré que si Φ est une transformation de $B(X)$ sur $B(X)$ qui est linéaire surjective qui conserve le spectre ponctuel, alors $\Phi(T) = ATA^{-1}$ pour tout $T \in B(X)$ (i.e., le cas $\Phi(T) = BT^*B^{-1}$ ne peut pas avoir lieu). Dans ce travail on se propose de montrer qu'on peut obtenir le même résultat que celui de P.$\check{S}$emrl [6], avec les mêmes hypothèses mais en supposant seulement que Φ est additive.

Dans toute la suite nous désignons par $\sigma(T)$ le spectre d'un opérateur T, par $R(T)$ l'image de T. Soient x, $y \in X$ et $f \in X'$, $x \otimes f$ désigne l'opérateur défini par : $x \otimes f(y) = f(y)x$. Signalons que tout opérateur de rang 1 s'écrit sous cette forme avec x et f qui sont tous les deux non nuls. De plus $f(x) \in \sigma_p(x \otimes f) \subset \sigma(x \otimes f) = \{0; f(x)\}$. Si x, $y \in X$ et f, $g \in X'$ alors l'opérateur $x \otimes f + y \otimes g$ est de rang 1 ou 0 si et seulement si ou bien x et y sont linéairement dépendants, ou bien f et g sont linéairement dépendants. Nous notons par $F(X)$ et $F_1(X)$ respectivement l'ensemble d'opérateurs de rang fini et l'ensemble d' opérateurs de rang 1 dans $B(X)$.

1. Présentation des résultats

Le résultat fondamental de ce travail est le théorème suivant :

Théorème 1.1. *Soit $\Phi : B(X) \longrightarrow B(Y)$ une transformation additive surjective qui conserve le spectre ponctuel. Alors ou bien*

(i) *il existe une transformation linéaire bijective bornée $A : X \longrightarrow Y$ telle que $\Phi(T) = ATA^{-1}$ pour tout $T \in B(X)$, ou bien*

(ii) *il existe une transformation linéaire bijective bornée $B : X' \longrightarrow Y$ telle que $\Phi(T) = BT^*B^{-1}$ pour tout $T \in B(X)$.*

Pour démontrer ce théorème nous avons besoin des lemmes suivants :

Lemme 1.2. *Soient X un espace de Banach de dimension infinie et $A \in B(X)$ un opérateur non nul. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *rang $(A) = 1$*

(2) *$\sigma(T + A) \cap \sigma(T + 2A) \subset \sigma(T)$, pour tout $T \in B(X)$*

(3) *$\sigma_p(T + A) \cap \sigma_p(T + 2A) \subset \sigma_p(T)$, pour tout $T \in B(X)$.*

Démonstration. M. Omladič et P. Šemrl ont montré dans [11] que (1) et (2) sont équivalentes. Dans [6] Šemrl a montré que (1) implique (3). Donc il suffit de montrer que (3) implique (1). Si rang $(A) > 1$, alors dans le cas où il existe $u \in X$ tel que u, Au et A^2u sont linéairement indépendants, M. Omladič et P. Šemrl ont construit dans [11] un opérateur nilpotent $T \in B(X)$ tel que $1 \in \sigma_p(T + A) \cap \sigma_p(T + 2A)$. Dans le cas où x, Ax et A^2x sont linéairement dépendants pour tout $x \in X$, ils ont aussi construit un opérateur $T \in B(X)$ tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\lambda \in \sigma_p(T + A) \cap \sigma_p(T + 2A)$ mais $\lambda \notin \sigma(T)$ donc nous avons aussi $\lambda \notin \sigma_p(T)$. D'où le résultat. ∎

Lemme 1.3. *Soit $A \in B(X)$. Alors $\sigma_p(T + A) \subset \sigma_p(T)$ pour tout $T \in F_1(X)$ si et seulement si $A = 0$.*

Démonstration. Si $A = 0$, il est trivial que $\sigma_p(T + A) \subset \sigma_p(T)$ pour tout $T \in F_1(X)$. Pour l'implication réciproque, nous supposons que $A \neq 0$. Si $A = I$ nous pouvons choisir $x \in X$ et $f \in X'$ tels que $f(x) = 1$. Alors pour $T = x \otimes f$ nous avons $2 \in \sigma_p(T + A)$, mais $\sigma_p(T) \subset \{0, 1\}$. Au cas où $A \neq I$, il existe $x \in X$ tel que $0 \neq Ax \neq x$. Pour $y = Ax$, il existe $f \in X'$ tel que $f(x) = 1$ et $f(y) \neq 0$. Pour $T = (x - y) \otimes f$ nous avons $\sigma_p(T) \subset \{0, f(x - y)\}$ et $1 \in \sigma_p(T + A)$ mais $f(x - y) \neq 1$. Donc $\sigma_p(T + A) \not\subset \sigma_p(T)$. ∎

LEMME 1.4. *Soit $\Phi : B(X) \longrightarrow B(Y)$ une transformation additive qui conserve le spectre ponctuel. Alors Φ est injective.*

Démonstration. Soit $A \in B(X)$ tel que $\Phi(A) = 0$. Nous avons $\sigma_p(T) = \sigma_p(\Phi(T)) = \sigma_p(\Phi(T) + \Phi(A)) = \sigma_p(T + A)$, pour tout $T \in F_1(X)$. Ce qui montre d'après le Lemme 1.3 que $A = 0$. Donc Φ est injective. ∎

LEMME 1.5. *Soit $\Phi : B(X) \longrightarrow B(Y)$ une transformation additive surjective qui conserve le spectre ponctuel. Alors $\Phi(\lambda) = \lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, (nous désignons par λ l'opérateur $\lambda.I$).*

Démonstration. Du fait que Φ est surjective, il existe $S \in B(X)$ tel que $\Phi(S) = \lambda$. Alors pour tout $T \in F_1(X)$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\sigma_p(T) &= \lambda + \sigma_p(T) - \lambda \\
&= \lambda + \sigma_p(T - \lambda) \\
&= \lambda + \sigma_p(\Phi(T) - \Phi(\lambda)) \\
&= \sigma_p(\Phi(T) + \lambda - \Phi(\lambda)) \\
&= \sigma_p(\Phi(T) + \Phi(S) - \Phi(\lambda)) \\
&= \sigma_p(T + S - \lambda).
\end{aligned}$$

En appliquant le Lemme 1.3 nous déduisons que $S - \lambda = 0$, ce qui montre que $S = \lambda$. ∎

LEMME 1.6. *Soient $\Phi : B(X) \longrightarrow B(Y)$ une transformation additive surjective qui conserve le spectre ponctuel et $A \in B(X)$. Alors $\Phi(A)$ est de rang 1 si et seulement si A est de rang 1.*

Démonstration. Soit $A \in B(X)$ un élément de rang 1. D'aprés le Lemme 1.2, nous avons $\sigma_p(T + A) \cap \sigma_p(T + 2A) \subset \sigma_p(T)$ pour tout $T \in B(X)$. Puisque Φ est additive elle est $\mathbb{Q}$-linéaire, ce qui entraine que $\sigma_p(\Phi(T) + \Phi(A)) \cap$

$\sigma_p(\Phi(T)+2\Phi(A)) \subset \sigma_p(\Phi(T))$. Comme Φ est surjective nous avons, quitte à changer $\Phi(T)$ par T que, $\sigma_p(T+\Phi(A)) \cap \sigma_p(T+2\Phi(A)) \subset \sigma_p(T)$ pour tout $T \in B(Y)$. En appliquant à nouveau le Lemme 1.2, nous déduisons que $\Phi(A)$ est de rang 1.

Pour le sens inverse il suffit de remplacer Φ par Φ^{-1}. ∎

Lemme 1.7. *Soit $\Phi : B(X) \longrightarrow B(Y)$ une transformation additive surjective qui conserve le spectre ponctuel. Alors la restriction de Φ à $F_1(X)$ est 1-homogène (i.e., $\Phi(\lambda T) = \lambda\Phi(T)$ pour tout $T \in F_1(X)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$).*

Démonstration. Tout opérateur de rang 1 dans $B(X)$ s'écrit sous la forme $x \otimes f$ où $0 \neq x \in X$ et $0 \neq f \in X'$. Donc il suffit de montrer que $\Phi(\alpha x \otimes f) = \alpha\Phi(x \otimes f)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.

Fixons $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in X - \{0\}$ et $f \in X' - \{0\}$.

Si $\alpha = 0$ ou $\alpha = -1$ nous appliquons la $\mathbb{Q}$-linéarité de Φ pour déduire que $\Phi(\alpha x \otimes f) = \alpha\Phi(x \otimes f)$. Si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq -1$ nous commençons par le cas où $f(x) \neq 0$, auquel cas nous pouvons prendre $f(x) = 1$. D'aprés le Lemme 1.6 nous avons $\Phi(x \otimes f)$ est de rang 1, donc il existe $u \in Y$ et $\varphi \in Y'$ tels que $\Phi(x\otimes f) = u\otimes\varphi$. Comme Φ conserve le spectre ponctuel nous avons $\varphi(u) = 1$. Soient $v \in Y$ et $\psi \in Y'$ tels que $\varphi(v) = 0$ et $\psi(u) = 0$. La surjectivité de Φ entraine l'existence de $w, z \in X$ et $h, k \in X'$ tels que

$$\Phi(w \otimes h) = v \otimes \varphi \text{ et } \Phi(z \otimes k) = u \otimes \psi.$$

Posons $\Phi(\alpha x\otimes f) = u_\alpha\otimes\varphi_\alpha$. Nous avons $\Phi(\alpha x\otimes f + x\otimes f) = u_\alpha\otimes\varphi_\alpha + u\otimes\varphi$. Comme $\alpha x \otimes f + x \otimes f$ est un opérateur de rang 1, alors nous appliquons le Lemme 1.6 pour déduire que $u_\alpha \otimes \varphi_\alpha + u \otimes \varphi$ est aussi de rang 1 ce qui montre qu'ou bien u_α et u sont linéairement dépendants ou bien φ_α et φ sont linéairement dépendants. Supposons que φ_α et φ sont linéairement dépendants, en absorbant une constante dans le premier terme du produit tensoriel nous pouvons prendre $\varphi_\alpha = \varphi$. Le fait que $\Phi(x\otimes f + z\otimes k) = u\otimes\varphi + u\otimes\psi$ montre d'aprés le Lemme 1.6 que $x \otimes f + z \otimes k$ est de rang 1. Par suite $\alpha x \otimes f + z \otimes k$ est aussi de rang 1. Par conséquent nous avons d'aprés le Lemme 1.6 que $\Phi(\alpha x \otimes f + z \otimes k) = u_\alpha \otimes \varphi + u \otimes \psi$ est un opérateur de rang 1. Comme $\varphi(u) = 1$ et $\psi(u) = 0$ nous avons φ et ψ sont linéairement indépendants, ce qui entraine que u_α et u sont linéairement dépendants et par suite $u_\alpha = \beta u$ avec $\beta \in \mathbb{C}^*$. Donc $\Phi(\alpha x \otimes f) = \beta u \otimes \varphi$ et puisque Φ conserve le spectre ponctuel nous déduisons que $\beta = \alpha$.

Dans le cas où u_α et u sont linéairement dépendants, en absorbant une constante dans le deuxième terme du produit tensoriel nous pouvons prendre

$u_\alpha = u$. Le fait que $\Phi(x \otimes f + w \otimes h) = u \otimes \varphi + v \otimes \varphi$ et le Lemme 1.6 montrent que $x \otimes f + w \otimes h$ est de rang 1, d'où $\alpha x \otimes f + w \otimes h$ est aussi de rang 1. Par suite $\Phi(\alpha x \otimes f + w \otimes h) = u \otimes \varphi_\alpha + v \otimes \varphi$ est un opérateur de rang 1, or u et v sont linéairement indépendants car $\varphi(u) = 1$ et $\varphi(v) = 0$, donc $\varphi_\alpha = \gamma\varphi$ avec $\gamma \in \mathbb{C}^*$. Par conséquent $\Phi(\alpha x \otimes f) = \gamma u \otimes \varphi$. Comme Φ conserve le spectre ponctuel nous déduisons que $\alpha = \gamma$. Finalement $\Phi(\alpha x \otimes f) = \alpha\Phi(x \otimes f)$.

Maintenant si $f(x) = 0$ nous choisissons $g \in X'$ vérifiant $g(x) = 1$. Alors $\Phi(\alpha x \otimes f) = \Phi(\alpha x \otimes (f + g)) - \Phi(\alpha x \otimes g) = \alpha\Phi(x \otimes f)$. D'où le résultat. ∎

Preuve du Théorème 1.1. La preuve de ce théorème se fait suivant le même plan que celle de A. Jafarian et A.R. Sourour dans [1] en deux étapes mais avec des approches differentes surtout dans la deuxième étape. Dans la première étape nous montrons qu'il existe $A : X \longrightarrow Y$ et $C : X' \longrightarrow Y'$ des applications linéaires bijectives bornées telles que

$$\Phi(x \otimes f) = Ax \otimes Cf, \tag{1}$$

pour tout $x \in X$ et $f \in X'$, ou bien il existe $B : X' \longrightarrow Y$ et $D : X \longrightarrow Y'$ des applications linéaires bijectives bornées telles que

$$\Phi(x \otimes f) = Bf \otimes Dx, \tag{2}$$

pour tout $x \in X$ et $f \in X'$. Dans la deuxième étape nous montrons qu'ou bien $\Phi(T) = ATA^{-1}$, ou bien $\Phi(T) = BT^*B^{-1}$ pour tout $T \in B(X)$.

Etape 1 : Les Lemmes 1.4, 1.6 et 1.7 qui sont propres à notre situation montrent que Φ est nécesserement injective, 1-homogène sur $F_1(X)$ et $\Phi(F_1(X)) = F_1(Y)$ et ainsi nous permettent d'être dans les mêmes hypothèses que A. Jafarian et A.R. Sourour pour affirmer l'étape 1. Tout ce qui reste c'est de démontrer que A, B, C et D sont bornées. Commençons par A et C qui sont données par (1). Choisissons un opérateur $T \in B(X)$ de rang fini et $\lambda \in \mathbb{C}^*$ avec $\lambda \notin \sigma_p(T)$. Pour $x \in X$ et $f \in X'$ non nuls nous avons $\lambda \in \sigma_p(T + x \otimes f)$ si et seulement si $f((\lambda - T)^{-1}x) = 1$. Comme Φ conserve le spectre ponctuel et les opérateurs de rang fini, nous utilisons la linéarité de f , A et C pour déduire que $f((\lambda - T)^{-1}x) = Cf((\lambda - \Phi(T))^{-1}Ax)$. Le Théorème du graphe fermé montre que A et C sont bornées. De la même manière nous montrons que B et D sont bornées.

Etape 2 : Pour établir cette étape A. Jafarian et A.R. Sourour ont exploité avec profit les propriétés analytiques de la résolvante qui est liée au spectre chose qu'on ne peut pas utiliser ici puisque on considère seulement le spectre ponctuel, et nous donnons une démonstration plus algébrique.

Cas 1 : Plaçons nous dans la situation (1) et montrons que $\Phi(T) = ATA^{-1}$ pour tout $T \in B(X)$. Fixons $0 \neq x \in X$ et $0 \neq f \in X'$.

Si T est injective, alors $Tx = y \neq 0$. Comme Φ conserve le spectre ponctuel nous avons

$$f(x) = 1 \text{ si et seulement si } Cf(Ax) = 1. \tag{3}$$

Nous avons $0 \in \sigma_p(T - y \otimes f) = \sigma_p(\Phi(T) - Ay \otimes Cf)$, donc il existe $z \in Y$ tel que $\Phi(T)(z) = Ay \otimes Cf(z)$ c'est à dire $\Phi(T)(z) = Cf(z)Ay$. Montrons que z et Ax sont linéairement dépendants. Sinon il existe $g \in Y'$ tel que $g(Ax) = 1$ et $g(z) = 0$. Comme C est bijective il existe $f \in X'$ tel que $Cf = g$. Nous avons $Cf(Ax) = 1$ et par (3) nous obtenons $f(x) = 1$. Par conséquent $\Phi(T)(z) = Cf(z)Ay = g(z)Ay = 0$, d'où $0 \in \sigma_p(\Phi(T)) = \sigma_p(T)$ ce qui est absurde. Donc z et Ax sont linéairement dépendants et par suite nous avons pour un $\lambda \in \mathbb{C}^*$ convenable que $\Phi(T)(\lambda Ax) = Cf(\lambda Ax)Ay = \lambda Ay = \lambda ATx$. Par conséquent $\Phi(T)A = AT$. Donc $\Phi(T) = ATA^{-1}$.

Si T n'est pas injective, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $T + \lambda$ est injective. Comme $\Phi(\lambda) = \lambda$, nous déduisons que $\Phi(T) = ATA^{-1}$. Finalement $\Phi(T) = ATA^{-1}$ pour tout $T \in B(X)$.

Cas 2 : Plaçons nous dans la situation (2) et montrons que $\Phi(T) = BT^*B^{-1}$ pour tout $T \in B(X)$. Fixons $T \in B(X)$.

Si T est injective nous étudions le cas où $R(T)$ est dense dans X et le cas où $R(T)$ n'est pas dense dans X. Si $R(T)$ est dense dans X, nous fixons f non nul dans X', alors il existe $x \in X$ tel que $f(Tx) = 1$. Pour $y = Tx$ nous avons $0 \in \sigma_p(T - y \otimes T^*f) = \sigma_p(\Phi(T) - B(T^*f) \otimes Dy)$ et par suite il existe $z \in Y$ tel que

$$\Phi(T)(z) = Dy(z)B(T^*f). \tag{4}$$

Montrons que z et Bf sont linéairement dépendants. Sinon il existe $g \in Y'$ tel que $g(z) = 0$ et $g(Bf) = 1$. Comme D est bijective, il existe $y \in Y$ tel que $D(y) = g$ et par suite $D(y)(Bf) = 1$. Le fait que Φ conserve le spectre ponctuel montre que $f(y) = 1$. Par conséquent la formule (4) donne $\Phi(T)(z) = D(y)(z)B(T^*f) = g(z)B(T^*f) = 0$, d'où $0 \in \sigma_p(\Phi(T)) = \sigma_p(T)$ ce qui est absurde. Donc nous avons pour un $\lambda \in \mathbb{C}^*$ convenable $\Phi(T)(\lambda Bf) = D(y)(\lambda Bf)(BT^*f)$, ce qui entraine que $\Phi(T)Bf = BT^*f$ pour tout $f \in X'$ et par suite $\Phi(T)B = BT^*$ c'est à dire $\Phi(T) = BT^*B^{-1}$. Dans le cas où $R(T)$ n'est pas dense dans X, choisissons un scalaire α convenable tel que $T + \alpha$ est surjective et nous appliquons ce qui précéde et le fait que $\Phi(\alpha) = \alpha$ pour déduire que $\Phi(T) = BT^*B^{-1}$.

Si T n'est pas injective, il existe un nombre réel non nul λ tel que $T + \lambda$ est injective et comme $\Phi(\lambda) = \lambda$ nous déduisons que $\Phi(T) = BT^*B^{-1}$. Finalement

$\Phi(T) = BT^*B^{-1}$ pour tout $T \in B(X)$. ∎

Remarque. Dans le Théorème 1.1 le cas $\Phi(T) = BT^*B^{-1}$ montre que T est injective si et seulement si T^* est injective ce qui n'est pas vrai si X est un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et T est un opérateur shift unilatéral (voir [7] problème 82). Ceci et le résultat de [11] montrent que dans le cas où X est un espace de Hilbert le résultat obtenu (Théorème 1.1) est différent de celui de A. Jafarian et A. Sourour [1].

Références

[1] Jaafarian, A.A., Sourour, A.R., Spectrum preserving linear maps, *J. Funct. Anal.* **66** (1986), 255 – 261.

[2] Sourour, A.R., Invertibility preserving maps on $L(X)$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996), 13 – 30.

[3] Aupetit, B., "A Primer on Spectral Theory", Springer, New York, 1991.

[4] Aupetit, B., Sur les transformations qui conservent le spectre, in "Banach Algebras", Vol. 97, De Gryter-Berlin, 1998, 55 – 78.

[5] Aupetit, B., du Toit Mouton, H., Trace and determinant in Banach algebras, *Studia Math.* **121** (1996), 115 – 136.

[6] Šemrl, P., Two characterizations of automorphisms on $B(X)$, *Studia Math.* **105** (1993), 143 – 149.

[7] Halmos, P., "A Hilbert Space Problem Book", 2^{nd} ed., Graduate Texts in Math, Vol. 19, Springer-Verlag, New York, 1982.

[8] Hou, J.C., Rank-preserving linear maps on $B(X)$, *Science in China (Ser. A)* (1989), 929 – 940.

[9] Choi, M.D., Hadwin, D., Nordgren, E., Radjavi, H., Rosenthal, P., Positive linear maps preserving invertibility, *J. Funct. Anal.* **59** (1984), 462 – 469.

[10] Choi, M.D., Jafarian, A.A., Radjavi, H., Linear maps preserving commutativity, *Linear Algebra Appl.* **87** (1987), 227 – 241.

[11] Omladič, M., Šemrl, P., Spectrum-preserving additive maps, *Linear Algebra. Appl.* **153** (1991), 67 – 72.

[12] Omladič, M., Šemrl, P., Additive mappings preserving operators of rank one, *Linear Algebra Appl.* **182** (1993), 239 – 256.

[13] Omladič, M., On operators preserving commutativity, *J. Funct. Anal.* **66** (1986), 105 – 122.

[14] Omladič, M., On operators preserving numerical range, *Linear Algebra. Appl.* **134** (1990), 31 – 51.

[15] Marcus, M., Moyls, B.N., Linear transformations on algebras of matrices, *Canad. J. Math.* **11** (1959), 61 – 66.