EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **17**, Núm. 1, 111 – 121 (2002)

Espaces Parfaits dans une Dualité Séparante sur un Corps Valué Non-Archimédien

R. Ameziane Hassani, M. Babahmed

Faculté des Sciences Dhar El Mehraz, Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
B.P. 1796 *Fès, Maroc*

Dépt. de Mathématiques, Faculté des Sciences de Tétouan, Université Abdelmalek Essaâdi
B.P. 2121 *Tétouan, Maroc*

e-mail: ramezianehassani@hotmail.com, babahmedmohammed@hotmail.com

(Research paper presented by Susanne Dierolf)

AMS *Subject Class.* (2000): 46A45 *Received November* 22, 2000

Introduction

La dualité dans les espaces de suites scalaires a été introduite et étudiée par Köthe et Toeplitz [7]. Ensuite, Maddax [3] a généralisé cette théorie aux espaces de suites sur un espace de Banach. Dans [1] on a généralisé et étudié les duals de Köthe-Toeplitz dans les espaces de suites sur un espace de Fréchet non-archimédien (n.a.).

Dans ce travail, on s'interesse aux duals de Köthe-Toeplitz définis à partir d'une dualité séparante d'espaces de Banach n.a. ; on généralise la notion d'espaces parfaits et on établit des résultats généralisant des théorème concernant ces espaces [4].

Soit $(K, |\cdot|)$ un corps valué n.a. On considère les ensembles suivants : $N_K = \{|\alpha| \,:\, \alpha \in K\}$ (ensemble des valeurs de $|\cdot|$) ; $G_K = N_K \setminus \{0\}$ (groupe des valeurs de $|\cdot|$) ; G_K est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{R}_+^*$. Dans toute la suite $\rho > 1$ désigne : 1° le générateur de G_K, si G_K est cyclique ; 2° le nombre positif tel qu'il existe $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans K vérifiant $|\lambda_n| = \rho^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si G_K est dense dans $\mathbb{R}_+^*$.

1. Duals de Köthe-Toeplitz dans une dualité séparante

Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces de Banach n.a. mis en dualité séparante $\langle X, Y\rangle$. On note $\omega(X)$ l'ensemble de toutes les suites d'éléments de

X. On appelle espace de suites sur X tout sous-espace vectoriel de $\omega(X)$. On définit les espaces de suites sur X suivants :

$$\begin{aligned}
\varphi(X) &= \{(x_k) \in \omega(X) \,:\, \exists\, k_0 \in \mathbb{N} \,/\, x_k = 0 \ \ \forall\, k \geq k_0\},\\
c_0(X) &= \{(x_k) \in \omega(X) \,:\, (x_k) \text{ converge vers } 0 \text{ dans } X\},\\
c(X) &= \{(x_k) \in \omega(X) \,:\, (x_k) \text{ converge dans } X\},\\
m(X) &= \{(x_k) \in \omega(X) \,:\, (x_k) \text{ est bornée dans } X\}.
\end{aligned}$$

Soit $x = (x_k) \in \omega(X)$; pour tout $n \geq 1$ la suite $x^{[n]} = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots)$ est appelée la $n^{i\grave{e}me}$ section de x. Pour tout $y \in Y$, on pose :

$$\|y\|^* = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |\langle x, y\rangle|.$$

Si $\|y\|^* < +\infty$ pour tout $y \in Y$, $\|\cdot\|^*$ définit une norme n.a. sur Y, et si de plus $N_{\|\cdot\|_X} = \{\|x\|_X \,:\, x \in X\} \subset N_K$, on a : $\|y\|^* = \sup_{\|x\|_X \neq 0} \frac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\|_X}$.

Dorénavant on suppose que $N_{\|\cdot\|_X} \subset N_K$.

Définition 1.1. Soit E un sous-ensemble de $\omega(X)$.

(a) On appelle α-dual de E l'ensemble :

$$E^\alpha = \left\{(y_k) \in \omega(Y) \,:\, \sum_k |\langle x_k, y_k\rangle| < +\infty \ \ \forall\, (x_k) \in E\right\}.$$

(b) On appelle β-dual de E l'ensemble :

$$E^\beta = \left\{(y_k) \in \omega(Y) \,:\, \sum_k \langle x_k, y_k\rangle \text{ converge dans } K \ \ \forall\, (x_k) \in E\right\}.$$

(c) On appelle γ-dual de E l'ensemble :

$$E^\gamma = \left\{(y_k) \in \omega(Y) \,:\, \sup_n \left|\sum_{k=1}^n \langle x_k, y_k\rangle\right| < +\infty \ \ \forall\, (x_k) \in E\right\}.$$

Pour tout sous-ensemble E de $\omega(X)$ on a : $E^\alpha \subseteq E^\beta \subseteq E^\gamma$; $\varphi(X)^\alpha = \varphi(X)^\beta = \varphi(X)^\gamma = \omega(Y)$; $\omega(X)^\alpha = \omega(X)^\beta = \omega(X)^\gamma = \varphi(Y)$. Si s désigne α, β ou γ, on a : $E \subset E^{ss}$; $E^s = E^{sss}$; $E \subset F \Rightarrow F^s \subset E^s$; E^s est un sous-esapce vectoriel de $\omega(Y)$.

Des techniques analogues à celles utilisées dans [1] nous permettent d'établir les résultats suivants :

Proposition 1.1. *Soit* $(y_k) \in \omega(Y)$. *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) $(y_k) \in c_0(X)^\alpha$;
(ii) $(y_k) \in c(X)^\alpha$;
(iii) $(y_k) \in m(X)^\alpha$;
(iv) $\sum_k \|y_k\|^* < +\infty$.

Proposition 1.2. *Soit* $(y_k) \in \omega(Y)$; $(y_k) \in c_0(X)^\beta$ *si, et seulement si,* $\sup_k \|y_k\|^* < +\infty$.

Proposition 1.3. *Soit* $(y_k) \in \omega(Y)$; $(y_k) \in c(X)^\beta$ *si, et seulement si,* $\sup_k \|y_k\|^* < +\infty$ *et* $y_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *dans* $(Y, \sigma(Y, X))$.

Proposition 1.4. *Soit* $(y_k) \in \omega(Y)$; $(y_k) \in m(X)^\beta$ *si, et seulement si,* $\lim_k \|y_k\|^* = 0$.

Proposition 1.5. *Soit* $(y_k) \in \omega(Y)$. *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) $(y_k) \in c_0(X)^\gamma$;
(ii) $(y_k) \in c(X)^\gamma$;
(iii) $(y_k) \in m(X)^\gamma$;
(iv) $\sup_k \|y_k\|^* < +\infty$.

Remarque 1.1. Dans le cas particulier $X = Y = K$, on a : $c_0(K)^\alpha = c(K)^\alpha = m(K)^\alpha = l_1(K)$; $c_0(K)^\beta = m(K)$; $c(K)^\beta = m(K)^\beta = c_0(K)$; $c_0(K)^\gamma = c(K)^\gamma = m(K)^\gamma = m(K)$.

2. Espaces s-parfaits et espaces s-complets

Dorénavant s désignera α, β ou γ. Si E est un sous-ensemble de $\omega(X)$ on a $E \subset E^{ss}$, et on dit que E est s-parfait si $E = E^{ss}$. $\varphi(K)$, $m(K)$ et $\omega(K)$ sont s-parfaits ; $c_0(K)$ est β-parfait, mais il n'est ni α-parfait ni γ-parfait ; $c(K)$ n'est pas s-parfait.

Pour tout $x = (x_k) \in E$, on pose :

$$u_y(x) = \sum_k |\langle x_k, y_k \rangle| \qquad \forall\, y = (y_k) \in E^\alpha,$$

$$v_y(x) = \Big|\sum_k \langle x_k, y_k\rangle\Big| \qquad \forall\, y = (y_k) \in E^\beta,$$

$$w_y(x) = \sup_n \Big|\sum_{k=1}^n \langle x_k, y_k\rangle\Big| \qquad \forall\, y = (y_k) \in E^\gamma.$$

Si E est un espace de suites sur X, v_y et w_y sont des semi-normes n.a. sur E, et u_y est une semi-norme sur E.

Définition 2.1. Soit (x^n) une suite d'éléments de E. On dit que (x^n) est α-Cauchy si, pour tout $y \in E^\alpha$, (x^n) est de Cauchy dans (E, u_y), et on dit que (x^n) est α-convergente vers $x \in E$ si $\lim_n u_y(x^n - x) = 0$ pour tout $y \in E^\alpha$.

On définit de la même façon une suite β-Cauchy, β-convergente, γ-Cauchy et γ-convergente.

Pour tout $y \in E^\alpha$ on a $v_y \le w_y \le u_y$; on en déduit que toute suite γ-Cauchy (resp. γ-convergente vers x) est β-Cauchy (resp. β-convergente vers x). Si (x^n) est s-convergente vers x, on note : $x = s\text{-}\lim_n x^n$.

Exemples. ([1], Examples 2.1) Soit $e = (1, 1, 1, \dots)$.

1. Si $E = c(K)$, on a $E^\beta = c_0(K)$, $E^\gamma = m(K)$ et $E^\alpha = l_1(K)$; $e = \alpha\text{-}\lim_n e^{[n]} = \beta\text{-}\lim_n e^{[n]}$, mais $(e^{[n]})_n$ n'est pas γ-Cauchy.
2. Si $E = c_0(K)$, on a $E^\beta = E^\gamma = m(K)$ et $E^\alpha = l_1(K)$; $e = \alpha\text{-}\lim_n e^{[n]}$ et $(e^{[n]})$ n'est pas β-Cauchy et donc n'est pas γ-Cauchy.
3. Si $E = \omega(K)$, on a $E^\gamma = \varphi(K)$, et $e = \gamma\text{-}\lim_n e^{[n]}$.

Définition 2.2. Si toute suite s-Cauchy dans E est s-convergente vers un élément de E, on dit que E est s-complet.

L'espace $l_1(K)$ est α-complet, $c_0(K)$ est β-complet et $m(K)$ est γ-complet. Avant de montrer que tout espace s-parfait est s-complet, on va établir quelques lemmes.

Lemme 2.1. *Soient $\lambda_0 \in K \setminus \{0\}$, $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$. Il existe $t_0 \in Y$ tel que :*

$$\begin{cases} |\langle x, t_0\rangle| \le |\langle x, y_0\rangle| & \forall\, x \in X\,, \\ |\langle x_0, t_0\rangle| < |\lambda_0|\,. \end{cases}$$

Preuve. Soit $|\lambda| \geq 1$ tel que $|\langle x_0, y_0\rangle| < |\lambda\lambda_0|$ et posons $t_0 = y_0/\lambda$. Pour tout $x \in X$, $|\langle x, t_0\rangle| = |\langle x, y_0\rangle|/|\lambda| \leq |\langle x, y_0\rangle|$ et $|\langle x_0, t_0\rangle| = |\langle x_0, y_0\rangle|/|\lambda| < |\lambda_0|$. ∎

LEMME 2.2. *Pour tous $x_1, \ldots, x_n \in X$ et $y_1, \ldots, y_n \in Y$, il existe $t_1, \ldots, t_n \in Y$ tels que :*

(i) $|\langle x, t_i\rangle| \leq |\langle x, y_i\rangle| \quad \forall\, x \in X$ *et* $\forall\, i = 1, \ldots, n$ *;*

(ii) $\left|\sum_{i=1}^{n}\langle x_i, t_i\rangle\right| = \max_{1\leq i\leq n} |\langle x_i, y_i\rangle|$.

Preuve. Par récurrence sur $n \geq 1$. Pour $n = 1$ il suffit de prendre $t_1 = y_1$. Supposons que l'hypothèse de récurrence soit vraie jusqu'à l'ordre $n-1$. Soient $x_1, \ldots, x_n \in X$ et $y_1, \ldots, y_n \in Y$; on distingue deux cas.

1$^{\text{èr}}$ cas : $|\langle x_n, y_n\rangle| \leq \max_{1\leq i\leq n-1} |\langle x_i, y_i\rangle|$. Soient $t_1, \ldots, t_{n-1} \in Y$ tels que :

$$|\langle x, t_i\rangle| \leq |\langle x, y_i\rangle| \qquad \forall\, x \in X \text{ et } \forall\, i = 1, \ldots, n-1\,,$$
$$\left|\sum_{i=1}^{n-1}\langle x_i, t_i\rangle\right| = \max_{1\leq i\leq n-1} |\langle x_i, y_i\rangle|\,.$$

Soit $t_n \in Y$ tel que $|\langle x, t_n\rangle| \leq |\langle x, y_n\rangle|$ pour tout $x \in X$ et $|\langle x_n, t_n\rangle| < \left|\sum_{i=1}^{n-1}\langle x_i, t_i\rangle\right|$ (lemme 2.1). On a :

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\langle x_i, t_i\rangle\right| = \left|\sum_{i=1}^{n-1}\langle x_i, t_i\rangle\right| = \max_{1\leq i\leq n-1} |\langle x_i, y_i\rangle| = \max_{1\leq i\leq n} |\langle x_i, y_i\rangle|\,.$$

2$^{\text{ème}}$ cas : $|\langle x_n, y_n\rangle| > \max_{1\leq i\leq n-1} |\langle x_i, y_i\rangle|$. Posons $t_i = y_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$; on a :

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\langle x_i, t_i\rangle\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\langle x_i, y_i\rangle\right| = |\langle x_n, y_n\rangle| = \max_{1\leq i\leq n} |\langle x_i, y_i\rangle|\,.$$

∎

LEMME 2.3. *Soit E un espace de suites sur X. Si (x^n) est une suite s-Cauchy dans E, alors pour tout $j \geq 1$ la suite $(x^n_j)_n$ est convergente dans $(X, \sigma(X, Y))$.*

Lemme 2.4. *Soient E un espace de suites sur X et (x^n) une suite dans E. Si (x^n) est β-Cauchy, on a :*

$$\forall\,(y_i) \in E^\beta \;\; et \;\; \forall\,\varepsilon > 0\,, \;\; \exists\, p_0 \in \mathbb{N} \;\; tel\; que \;\; \forall\, p, q \geq p_0 \;\; \sup_i |\langle x_i^p - x_i^q, y_i\rangle| \leq \varepsilon\,.$$

Preuve. Supposons par l'absurde que ce résultat ne soit pas vrai ; alors il existe $(y_i) \in E^\beta$, $\varepsilon > 0$ et deux suites d'indices (p_i) et (q_i) tels que :

$$\sup_i \left|\left\langle x_i^{p_j} - x_i^{q_j}, y_i\right\rangle\right| > \varepsilon \qquad \forall\, j \geq 1\,;$$

$\sum_i \langle x_i^{p_1} - x_i^{q_1}, y_i\rangle$ converge dans K, il existe $N_1 \geq 1$ tel que $\sup_{i>N_1} |\langle x_i^{p_1} - x_i^{q_1}, y_i\rangle| \leq \varepsilon$. Alors on a $\max_{1\leq i\leq N_1} |\langle x_i^{p_1} - x_i^{q_1}, y_i\rangle| > \varepsilon$.

Soient $z_1, \ldots, z_{N_1} \in Y$ tels que : $|\langle x, z_i\rangle| \leq |\langle x, y_i\rangle|$ pour tout $x \in X$ et pour tout $i = 1, \ldots, N_1$, $\left|\sum_{i=1}^{N_1} \langle x_i^{p_1} - x_i^{q_1}, z_i\rangle\right| = \max_{1\leq i\leq N_1} |\langle x_i^{p_1} - x_i^{q_1}, y_i\rangle|$ (lemme 2.2). On a donc :

$$\left|\sum_{i=1}^{N_1} \langle x_i^{p_1} - x_i^{q_1}, z_i\rangle\right| > \varepsilon\,.$$

Soit $j_2 > j_1 = 1$ tel que $\max_{1\leq i\leq N_1} |\langle x_i^{p_{j_2}} - x_i^{q_{j_2}}, y_i\rangle| \leq \varepsilon$. Soit $N_2 > N_1$ tel que $\sup_{i>N_2} |\langle x_i^{p_{j_2}} - x_i^{q_{j_2}}, y_i\rangle| \leq \varepsilon$. On a alors :

$$\max_{1\leq i\leq N_2} \left|\left\langle x_i^{p_{j_2}} - x_i^{q_{j_2}}, y_i\right\rangle\right| > \varepsilon\,,$$
$$\max_{N_1\leq i\leq N_2} \left|\left\langle x_i^{p_{j_2}} - x_i^{q_{j_2}}, y_i\right\rangle\right| > \varepsilon\,.$$

Soit $z_{N_1+1}, z_{N_1+2}, \ldots, z_{N_2} \in Y$ tels que : $|\langle x, z_i\rangle| \leq |\langle x, y_i\rangle|$ pour tout $i = N_1+1, \ldots, N_2$ et pour tout $x \in X$, $\left|\sum_{i=N_1+1}^{N_2} \langle x_i^{p_{j_2}} - x_i^{q_{j_2}}, z_i\rangle\right| = \max_{N_1<i\leq N_2} |\langle x_i^{p_{j_2}} - x_i^{q_{j_2}}, y_i\rangle|$. Alors on a :

$$\left|\sum_{i=N_1+1}^{N_2} \left\langle x_i^{p_{j_2}} - x_i^{q_{j_2}}, z_i\right\rangle\right| > \varepsilon\,.$$

Par induction, on construit une suite d'indices (j_k), une suite d'indices

(N_k) et $z_{N_{k-1}+1}, z_{N_{k-1}+2}, \dots, z_{N_k} \in Y$ tels que :

$$|\langle x, z_i\rangle| \le |\langle x, y_i\rangle| \qquad \forall\, x \in X \text{ et } \forall\, i = N_{k-1}+1, \dots, N_k\,,$$

$$\left|\sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k} \left\langle x_i^{p_{j_k}} - x_i^{q_{j_k}}, z_i\right\rangle\right| = \max_{N_{k-1}<i\le N_k} \left|\left\langle x_i^{p_{j_k}} - x_i^{q_{j_k}}, y_i\right\rangle\right| > \varepsilon\,,$$

$$\sup_{i>N_k} \left|\left\langle x_i^{p_{j_k}} - x_i^{q_{j_k}}, z_i\right\rangle\right| \le \varepsilon\,, \qquad \max_{1\le i\le N_{k-1}} \left|\left\langle x_i^{p_{j_k}} - x_i^{q_{j_k}}, z_i\right\rangle\right| \le \varepsilon\,.$$

Pour $k \ge 1$ on a :

$$\left|\sum_i \left\langle x_i^{p_{j_k}} - x_i^{q_{j_k}}, z_i\right\rangle\right| = \max\left\{\left|\sum_{i=1}^{N_{k-1}} \left\langle x_i^{p_{j_k}} - x_i^{q_{j_k}}, z_i\right\rangle\right|,\right.$$
$$\left.\left|\sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k} \left\langle x_i^{p_{j_k}} - x_i^{q_{j_k}}, z_i\right\rangle\right|, \left|\sum_{i>N_k} \left\langle x_i^{p_{j_k}} - x_i^{q_{j_k}}, z_i\right\rangle\right|\right\} > \varepsilon.$$

Et comme on a $|\langle x, z_i\rangle| \le |\langle x, y_i\rangle|$ pour tout $i \ge 1$ et pour tout $x \in X$, $(z_i) \in E^\beta$; cela contredit le fait que (x^n) est β-Cauchy. ∎

Théorème 2.1. *Tout espace s-parfait est s-complet.*

Preuve. Soit E un espace de suites sur X β-parfait, et soit (x^p) une suite β-Cauchy dans E ; d'aprés le lemme 2.4, on a : $\forall\,(y_i) \in E^\beta$ et $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\, p_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_i |\langle x_i^p - x_i^q, y_i\rangle| \le \varepsilon \qquad \forall\, p, q \ge p_0. \tag{*}$$

Pour tout $i \ge 1$ soit $x_i \in X$ tel que $x_i = \lim_p x_i^p$ dans $(X, \sigma(X,Y))$; $x = (x_i) \in E^{\beta\beta}$, donc $(x_i) \in E$ (E est β-parfait). En faisant tendre q vers $+\infty$ dans (*) on aura :

$$\forall\,(y_i) \in E^\beta \text{ et } \forall\,\varepsilon > 0,\ \ \exists\, p_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\, p \ge p_0 \ \ \sup_i |\langle x_i^p - x_i, y_i\rangle| \le \varepsilon\,.$$

Donc $x = \beta\text{-}\lim_p x^p$.

Pour les deux autres la preuve se fait d'une façon directe. ∎

3. Espaces fortement s-complets

Définition 3.1. Soit E un espace de suites sur X. Un sous-ensemble B de E est dit α-borné (resp. β-borné ; resp. γ-borné) si pour tout $y \in E^\alpha$ (resp. E^β ; resp. E^γ), il existe $\rho \geq 0$ tel que $\sup_{(x_i)\in B} \sum_i |\langle x_i, y_i\rangle| \leq \rho$ (resp. $\sup_{(x_i)\in B} \sup_{i\geq 1} |\langle x_i, y_i\rangle| \leq \rho$; resp. $\sup_{(x_i)\in B} \sup_{n\geq 1} |\sum_{i=1}^n \langle x_i, y_i\rangle| \leq \rho$).

Remarques 3.1. (i) Tout sous-ensemble fini de E est s-borné. (ii) Si $E^\alpha = E^\beta$, tout sous-ensemble α-borné de E est β-borné. (iii) Si $E^\beta = E^\gamma$, tout sous-ensemble β-borné de E est γ-borné.

Si B est un sous-ensemble α-borné de E, on pose :

$$\alpha_B(y) = \sup_{(x_i)\in B} \sum_i |\langle x_i, y_i\rangle| \qquad \forall\, y = (y_i) \in E^\alpha\,;$$

si B est un sous-ensemble β-borné de E, on pose :

$$\beta_B(y) = \sup_{(x_i)\in B} \left| \sum_i \langle x_i, y_i\rangle \right| \qquad \forall\, y = (y_i) \in E^\beta\,;$$

si B est un sous-ensemble γ-borné de E, on pose :

$$\gamma_B(y) = \sup_{(x_i)\in B} \sup_{n\geq 1} \left| \sum_{i=1}^n \langle x_i, y_i\rangle \right| \qquad \forall\, y = (y_i) \in E^\gamma\,;$$

α_B, β_B et γ_B sont des semi-normes sur E^α, E^β et E^γ respectivement ; si B est un sous-ensemble α-borné de E, on a :

$$\beta_B(y) \leq \gamma_B(y) \leq \alpha_B(y) \qquad \forall\, y \in E^\alpha\,.$$

Définition 3.2. Soit (y^n) une suite dans E^s. On dit que (y^n) est fortement-s-Cauchy si, pour tout sous-ensemble B s-borné, (y^n) est de Cauchy dans (E^s, s_B), et on dit que (y^n) est fortement-s-convergente vers $y \in E^s$ si, pour tout sous-ensemble s-borné B de E, on a $\lim_n s_B(y^n - y) = 0$, et on note $y = fs\text{-}\lim_n y^n$.

Proposition 3.1. *Soit (y^n) une suite dans E^s ; si (y^n) est fortement-s-Cauchy, alors $(y^n_j)_n$ est $\sigma(Y, X)$-convergente dans Y pour tout $j \geq 1$.*

Preuve. Soient $j \geq 1$, et $a \in X$; $\{\delta_j(a)\}$ est s-borné, donc $\big(\langle a, y^n_j\rangle\big)_n$ est une suite de cauchy dans K, et alors elle converge. ∎

DÉFINITION 3.3. Si toute suite fortement-s-Cauchy dans E^s est fortement-s-convergente vers un élément de E^s, on dit que E est fortement-s-complet.

LEMME 3.1. *Soit (y^p) une suite fortement-β-Cauchy dans E^β. Pour tout B β-borné et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\sup_i |\langle x_i, y_i^p - y_i^q \rangle| \leq \varepsilon \qquad \forall\, p, q \geq p_0 \text{ et } \forall\, (x_i) \in B\,.$$

Preuve. Sinon, il existe B β-borné et $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $k \geq 1$, il existe $p_k, q_k > k$ et $(x_i^k) \in B$ tels que $\sup_i |\langle x_i^k, y_i^{p_k} - y_i^{q_k} \rangle| > \varepsilon$ pour tout $k \geq 1$.

Soient $p_1, q_1 > 1$ et $(x_i^1)_i \in B$ tels que : $\sup_i |\langle x_i^1, y_i^{p_1} - y_i^{q_1} \rangle| > \varepsilon$; $\sum_i \langle x_i^1, y_i^{p_1} - y_i^{q_1} \rangle$ converge dans K, soit $N_1 > 1$ tel que : $\sup_{i > N_1} |\langle x_i^1, y_i^{p_1} - y_i^{q_1} \rangle| \leq \varepsilon$. On a donc :

$$\max_{1 \leq i \leq N_1} \left| \left\langle x_i^1, y_i^{p_1} - y_i^{q_1} \right\rangle \right| > \varepsilon\,.$$

Soient $z_1^1, z_2^1, \ldots, z_{N_1}^1 \in X$ tels que : $|\langle z_i^1, y \rangle| \leq |\langle x_i^1, y \rangle|$ pour tout $y \in Y$ et pour tout $i = 1, \ldots, N_1$, $|\sum_{i=1}^{N_1} \langle z_i^1, y_i^{p_1} - y_i^{q_1} \rangle| = \max_{1 \leq i \leq N_1} |\langle x_i^1, y_i^{p_1} - y_i^{q_1} \rangle|$ (lemme 2.2). Posons $z^1 = (z_1^1, z_2^1, \ldots, z_{N_1}^1, x_{N_1+1}^1, x_{N_1+2}^1, \ldots)$; alors

$$\left| \sum_i \left\langle z_i^1, y_i^{p_1} - y_i^{q_1} \right\rangle \right| = \max \left\{ \left| \sum_{i=1}^{N_1} \left\langle z_i^1, y_i^{p_1} - y_i^{q_1} \right\rangle \right|, \left| \sum_{i > N_1} \left\langle x_i^1, y_i^{p_1} - y_i^{q_1} \right\rangle \right| \right\} > \varepsilon\,.$$

Soient $p_2 > p_1$ et $q_2 > q_1$, et soit $(x_i^2)_i \in B$ tels que : $\sup_i |\langle x_i^2, y_i^{p_2} - y_i^{q_2} \rangle| > \varepsilon$. Soit $N_2 > N_1$ tel que : $\sup_{i > N_2} |\langle x_i^2, y_i^{p_2} - y_i^{q_2} \rangle| \leq \varepsilon$. Alors on a :

$$\max_{1 \leq i \leq N_2} \left| \left\langle x_i^2, y_i^{p_2} - y_i^{q_2} \right\rangle \right| > \varepsilon\,.$$

Soient $z_1^2, z_2^2, \ldots, z_{N_2}^2 \in X$ tels que : $|\langle z_i^2, y \rangle| \leq |\langle x_i^2, y \rangle|$ pour tout $y \in Y$ et pour tout $i = 1, \ldots, N_2$, $|\sum_{i=1}^{N_2} \langle z_i^2, y_i^{p_2} - y_i^{q_2} \rangle| = \max_{1 \leq i \leq N_2} |\langle x_i^2, y_i^{p_2} - y_i^{q_2} \rangle|$. Posons : $z^2 = (z_1^2, z_2^2, \ldots, z_{N_2}^2, x_{N_2+1}^2, x_{N_2+2}^2, \ldots)$; alors

$$\left| \sum_i \left\langle z_i^2, y_i^{p_2} - y_i^{q_2} \right\rangle \right| = \max \left\{ \left| \sum_{i=1}^{N_2} \left\langle z_i^2, y_i^{p_2} - y_i^{q_2} \right\rangle \right|, \left| \sum_{i > N_2} \left\langle x_i^2, y_i^{p_2} - y_i^{q_2} \right\rangle \right| \right\} > \varepsilon\,.$$

Et ainsi, par induction, il existe $p_k > p_{k-1}$, $q_k > q_{k-1}$, $(x_i^k)_i \in B$, $N_k > N_{k-1}$ et $z^k = (z_1^k, z_2^k, \dots, z_{N_k}^k, x_{N_k+1}^k, x_{N_k+2}^k, \dots) \in \omega(X)$ tels que :

$$\left| \sum_i \left\langle z_i^k, y_i^{p_k} - y_i^{q_k} \right\rangle \right| > \varepsilon\,.$$

Posons : $B' = \{z^1, z^2, \dots\}$; B' est β-borné et on a :

$$\beta_{B'}(y^{p_k} - y^{q_k}) = \sup_{r \geq 1} \left| \sum_i \langle z_i^r, y_i^{p_k} - y_i^{q_k} \rangle \right| > \varepsilon \qquad \forall\, k \geq 1\,,$$

ce qui contredit le fait que (y^p) est β-Cauchy. ∎

Théorème 3.1. *Tout espace β-parfait est fortement-β-complet.*

Preuve. Soient E un espace β-parfait et $(y^p)_p$ une suite β-Cauchy dans E^β ; d'aprés le lemme 3.1, on a : pour tout sous-ensemble β-borné B de E et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_i |\langle x_i, y_i^p - y_i^q \rangle| \leq \varepsilon \qquad \forall\,(x_i) \in B \ \text{ et } \ \forall\, p, q \geq p_0\,. \tag{*}$$

Pour tout $i \geq 1$ soit $y_i \in Y$ tel que $y_i = \lim_p y_i^p$ dans $(Y, \sigma(Y, X))$; $(y_i) \in E^{\beta\beta} = E$, et en faisant q vers $+\infty$ dans (*), on aura $(y_i) = f\beta\text{-}\lim_p y^p$. ∎

D'une façon analogue, on démontre le théorème suivant :

Théorème 3.2. *Tout espace α-parfait (resp. γ-parfait) est fortement α-complet (resp. fortement-γ-complet).*

Références

[1] Ameziane Hassani, R., Babahmed, M., Duals de Köthe-Toeplitz généralisés, espaces s-complets et espaces fortement-s-complets en analyse non-archimédienne, *Rend. Sem. Mat. Messina Ser. II* **4** (1996/97).

[2] Lorentz, G.G., Macphail, M.S. , Unbounded operators and a theorem of A. Robinson, *Trans. Roy. Soc. of Canada* **XLVI** (1952), 33 – 37.

[3] Maddox, I.J., "Infinite Matrices of Operators", L.N.M. 786, Springer Verlag, Berlin, 1980.

[4] Monna, A.F., Espaces linéaires à une infinité dénombrable de coordonnées, *Proc. Kond. Akad. V. Wetensch.* **53** (1950), 1548 – 1559.

[5] Monna, A.F., "Analyse Non-Archimédienne", Springer Verlag, Band 56, Berlin, 1970.

[6] ROBINSON, A., On functional transformations and summability, *Proc. London Math. Soc.* **52** (1950), 132 – 160.

[7] TOEPLITZ, O., KÖTHE, G., Lineare räume mit unendlichvielen Koordinaten and ringe unendilicher matrizen, *J. Reine Angew. Math.* **171** (1934), 193 – 226.

[8] VAN TIEL, J., Espaces locallement K-convexes I, *Indag. Math.* **27** (1965), 249 – 258.

[9] VAN TIEL, J., Espaces locallement K-convexes II, *Indag. Math.* **27** (1965), 259 – 272.

[10] VAN TIEL, J., Espaces locallement K-convexes III, *Indag. Math.* **27** (1965), 273 – 289.