EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **17**, Núm. 1, 97 – 110 (2002)

Approximation du Point Fixe et Applications Faiblement Contractantes

M. Aamri, K. Chaira

Université Hassan II Mohammedia, Faculté des Sciences Ben M'Sik, Département de Mathématiques et d'Informatique, B.P. 7955 Ben M'Sik, Casablanca, Maroc

(Research paper presented by P.L. Papini)

AMS *Subject Class.* (2000): 47H10 *Received June* 8, 2000

1. Introduction

Le but de ce travail, est d'affaiblir les hypothèses du Théorème du point fixe en utilisant les notions suivantes : Applications faiblement contractantes (voir la définition 1), applications vérifiant la propriété (L.I.) (voir la définition 2), applications regular-global-inf(r.g.i.)[1] et applications à graphe fermé. On mentionne et on donne des résultats sur le Théorème du point fixe en utilisant les notions mentionnées précédemment. Cela d'une part, d'autre part, on fait appel à la convergence uniforme d'une suite d'applications, d'un espace métrique vers lui même, ayant des points fixes ou des points presque fixes afin de montrer quelques résultats sur le Théorème du point fixe. A l'aide de ces résultats, on donne quelques applications.

Dans la section 2, on donne quelques exemples et quelques remarques conçernant les applications faiblement contractantes.

Dans la section 3, on mentionne et on donne quelques résultats du Théorème du point fixe des applications faiblement contractantes :

1. Théorème de H.L. Hicks et B.E. Rhoades [7], qui utilise la notion d'orbite $O(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}$ et la semi-continuité inférieure de l'application $x \to d(x, f(x))$ où f une application d'un espace métrique (E, d) dans lui même et x un élément de E.
2. Théorème de W.A. Kirk et L.M. Saliga [10], qui utilise la mesure de noncompacité de Kuratowski [12] et la notion regular-global-inf(r.g.i.)[1].
3. Théorème 2, qui utilise la notion du graphe fermé et qui généralise le Théorème de H.L. Hicks et B.E. Rhoades [7].

4. Théorème 3, qui utilise la notion des applications vérifiant la propriété (L.I.)(voir la définition 2).

Dans les sections 4 et 5, on cherche d'une part, à déterminer l'existence des points fixes d'une application $f\colon (E,d) \to (E,d)$ sachant que f est la limite uniforme d'une suite d'applications $(f_n)_n$ faiblement contractantes. D'autre part, à approcher l'ensemble des point fixes de f à l'aide des points fixes des applications f_n.

A l'aide de ces résultats, on donne dans la section 6 quelques applications.

2. Applications faiblement contractantes et applications vérifiant la propriété (L.I.)

Rappelons la définition d'une application contractante : Soient (E,d) un espace métrique et $f\colon E \to E$ une application. On dit que f est une application contractante s'il existe un réel $k \in [0,1[$ tel que pour tout $(x,y) \in E^2$ on ait $d(f(x), f(y)) \leq kd(x,y)$.

Définition 1. Soient (E,d) un espace métrique et $f\colon E \to E$ une application. On dit que f est une application faiblement contractante s'il existe un réel $k \in [0,1[$ tel que pour tout $x \in E$ on ait $d(f(f(x)), f(x)) \leq kd(f(x), x)$.

Exemples 1. a) Toute application contractante est faiblement contractante.

b) On considère l'application $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4n}x + (2n - \frac{1}{2}) & \text{si } x \in [2n, 2n+2[\cap(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \quad n \in \mathbb{N}^* \\ \frac{1}{2}x + n & \text{si } x \in [2n, 2n+2[\cap\mathbb{Q}, \quad n \in \mathbb{N}^* \\ \frac{1}{2}x & \text{si } x \in [0,2[. \end{cases}$$

L'application f est faiblement contractante mais elle n'est ni contractante, ni à graphe fermé et ni continue sur $\mathbb{R}^+$.

c) On muni l'espace $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne et, on considère l'application $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(x,y) = (x, -y/2)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. L'application g est faiblement contractante et continue sur $\mathbb{R}^2$, mais elle n'est pas contractante sur $\mathbb{R}^2$.

d) On considère l'application $h\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par :

$$h(x) = \begin{cases} -nx + 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} & \text{si } x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}], \quad n \in \mathbb{N}^* \\ x & \text{si } x \in [1, +\infty[\cup \{0\}. \end{cases}$$

L'application h est faiblement contractante et à graphe fermé, mais elle n'est ni contractante et ni continue sur $\mathbb{R}^+$.

Remarque 1. Si f est une application contractante de l'espace métrique E vers lui même alors $k' \leq k$, où

$$k = \sup\Big\{\frac{d(f(x), f(y))}{d(x,y)} : (x,y) \in E^2,\ x \neq y\Big\}$$

et

$$k' = \sup\Big\{\frac{d(f(f(x)), f(x))}{d(f(x), x)} : x \in E,\ x \neq f(x)\Big\}.$$

Dans le cas où (E, d) est complet, l'application f admet un seul point fixe a. Ce point a est la limite d'une suite : $x_0 \in E, f(x_n) = x_{n+1}, n \in \mathbb{N}$. De plus, $d(x_n, a) \leq \frac{k^n}{1-k} \cdot d(x_1, x_0)$ et $d(x_n, a) \leq \frac{k'^n}{1-k'} \cdot d(x_1, x_0)$. Si $k' < k$ alors $\frac{k'^n}{1-k'} < \frac{k^n}{1-k}$, $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, pour l'approximation du point a on utilise la constante k' qui rend cette approximation meilleure que si on utilise la constante k.

Exemple 2. On considère la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{16} & \text{si } x \in]-\infty, -\frac{1}{4}[\\ x^2 & \text{si } x \in [-\frac{1}{4}, 0[\\ 0 & \text{si } x \in [0, +\infty[. \end{cases}$$

On a

$$\sup\Big\{\frac{|f(f(x)) - f(x)|}{|f(x) - x|} : x \in \mathbb{R},\ x \neq f(x)\Big\} = \frac{1}{5}$$

et

$$\sup\Big\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} : (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y\Big\} = \frac{1}{2},$$

donc

$$\sup\Big\{\frac{|f(f(x)) - f(x)|}{|f(x) - x|} : x \in \mathbb{R},\ x \neq f(x)\Big\} < \sup\Big\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} : (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y\Big\} < 1.$$

Remarque 2. a) Le théorème classique de J. Caristi [4] cité de la façon suivante : *Soit* $f\colon E \to E$ *une application d'un espace métrique complet* (E,d) *vers lui même. S'il existe une application* $\psi\colon E \to \mathbb{R}^+$ *semi-continue inférieurement sur* (E,d) *telle que* $d(x,f(x)) \leq \psi(x) - \psi(f(x))$ *pour tout* $x \in E$*, alors* f *admet un point fixe*, nous permet de retrouver la notion d'application faiblement contractante. Il suffit pour cela, de considèrer l'application $\psi\colon E \to \mathbb{R}^+$ définie par $\psi(x) = 1/(k-1)\cdot d(x,f(x))$ pour tout $x \in E$ et $k \in [0,1[$ fixé.

b) H.L. Hicks et B.E. Rhoades [7] ont étudié la notion d'applications faiblement contractantes mais suivant une orbite i.e. il existe un élément $x \in E$ tel que $d(f(f(y)),f(y)) \leq kd(f(y),y)$ pour tout $y \in O(x) = \{x, f(x), \dots\}$.

Définition 2. Soient (E,d) un espace métrique et $f\colon E \to E$ une application. On dit que f vérifie la propriété (L.I.), si pour chaque $x_0 \in E$ il existe un élément $x \in E$ tel que $\liminf_{n\to\infty} d(f^n(x_0),x) = 0$, alors $\liminf_{n\to\infty} d(f^n(x_0), f(x)) = 0$.

Remarque 3. Si f est continue sur E alors la fonction f vérifie la propriété (L.I.).

Exemple 3. Soient $\boldsymbol{\epsilon_2}$ un plan affine euclidien, $(\delta_1), (\delta_2)$ et (δ) trois droites affines de ϵ_2 parallèles et distinctes deux à deux telles que $d((\delta),(\delta_1)) = \frac{9}{4}$. Soient (D) une droite affine de $\boldsymbol{\epsilon_2}$ orthogonale à (δ) en un point A. Soient (P_1) et (P_2) deux demi-plans fermés de frontières (δ_1) et (δ_2) respectivement et ne contenant pas (δ). On définit l'application $f\colon (P_1)\cup(P_2)\cup(\delta) \to (P_1)\cup(P_2)\cup(\delta)$ de la façon suivante : si $M \in (P_1 \cup P_2)$ alors $S_D(\overrightarrow{M})M' = \frac{1}{3}\overrightarrow{M'M}$, où S_D désigne la symétrie orthogonale par rapport à (D). Si $M \in (\delta)\setminus\{A\}$ alors $S_D(\overrightarrow{M})N_1 = \frac{1}{3}\overrightarrow{N_1M}$ et $\overrightarrow{N_1M'} = \vec{u}$, où $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $(\delta_1)\cap(D) = \{B\}$. Si $M = A$ alors $M' = M = A$.

L'application f est faiblement contractante et vérifie la propriété (L.I.), mais elle n'est ni contractante, ni à graphe fermé et ni continue sur $(P_1)\cup(P_2)\cup(\delta)$.

3. Théorème du point fixe d'une application faiblement contractante

Rappelons d'abord la définition d'une application regular-global-inf(r.g.i.) [1]. Soit E un espace topologique et F une application de E dans $\mathbb{R}$. L'application F est dite r.g.i. en un élément x_0 de E, si $F(x_0) > \inf\{F(x)\colon x \in E\}$

implique qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon < F(x_0) - \inf\{F(x)\colon x \in E\}$ et un voisinage V_{x_0} de x_0 tel que $F(x) > F(x_0) - \epsilon$ pour tout $x \in V_{x_0}$.

F est dite r.g.i. sur E si elle est r.g.i. pour tout $x \in E$. Dans tout ce qui suit on considère le cas où $\inf\{F(x)\colon x \in E\} \neq \infty$.

PROPOSITION 1. (voir [10]) *Soit (E,d) un espace métrique et F une application de E dans $\mathbb{R}$. Alors, F est r.g.i. sur E si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n \subset E$, la condition "$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \inf\{F(x)\colon x \in E\}$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$" implique que $F(x_0) = \inf\{F(x)\colon x \in E\}$.*

Remarque 4. a) Si $f\colon (E,d) \to (E,d)$ est une application à graphe fermé et si $\inf\{d(x,f(x))\colon x \in E\} = 0$ alors, $F\colon x \to d(x,f(x))$ est r.g.i. sur (E,d).

b) Soit $f\colon (E,d) \to (E,d)$ une application. Si $\inf\{d(x,f(x))\colon x \in E\} = 0$ et si $F\colon x \to d(x,f(x))$ est semi-continue inférieurement sur (E,d) alors, $F\colon x \to d(x,f(x))$ est r.g.i. sur (E,d).

Dans la suite de cet article, on considère l'application F définie par $F(x) = d(x,f(x))$ pour tout $x \in E$, par $L_c = \{x \in E\colon d(x,f(x)) \leq c\}$, $c \in \mathbb{R}^+$ et par μ la mesure de noncompacité de Kuratowski [12]. Récemment W.A. Kirk et L.M. Saliga ont donné le résultat suivant :

THÉORÈME 1. (voir [10]) *Si (E,d) est un espace métrique complet et f une application de E dans E vérifiant les conditions*

(i) *f est faiblement contractante sur E ;*
(ii) *il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $\mu(f(L_c)) \leq \alpha\mu(L_c)$ pour tout $c > 0$;*
(iii) *l'application F est r.g.i. sur E,*

alors, l'ensemble des points fixes Fix(f) *est non vide et compact. De plus, si $(x_n)_n$ est une suite de E telle que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, f(x_n)) = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} d(x_n, \mathrm{Fix}(f)) = 0$.*

THÉORÈME 2. *Soient (E,d) un espace métrique complet et $f\colon E \to E$ une application faiblement contractante. Si le graphe de f est fermé, alors l'ensemble des points fixes* Fix(f) *est non vide et fermé dans (E,d).*

Preuve. Il suffit d'utiliser le résultat suivant, mentionné par H.L. Hicks et B.E. Rhoades [7] : *Si f est une applications faiblement contractantes suivant chaque orbite $O(x)$, $x \in E$, et f est à graphe fermé sur E, alors f admet un point fixe.* ∎

Remarque 5. a) L'hypothèse du théorème “f est à graphe fermé ” est indispensable pour conclure que f admet un point fixe ; car on peut trouver des applications faiblement contractantes, à graphes non fermés et n'admettant pas de points fixes.

Exemple 4. On considère l'application $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}(x - [x])$ si $x \in \mathbb{R}^*$, et $f(0) = \frac{1}{2}$, où $[x]$ désigne la partie entière du réel x. Cette application n'est pas à graphe fermé et n'admet aucun point fixe sur $\mathbb{R}$, pourtant elle est faiblement contractante sur $\mathbb{R}$.

b) L'ensemble des points fixes $\mathrm{Fix}(f)$ n'est pas forcément compact ; par exemple, si on considère l'application $h\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par :

$$h(x) = \begin{cases} -nx + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} & \text{si } x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \quad n \in \mathbb{N}^* \\ x & \text{si } x \in [1, +\infty[\cup \{0\}, \end{cases}$$

l'ensemble $\mathrm{Fix}(h) = [1, +\infty[\cup \{0\}$ n'est pas compact.

Théorème 3. *Soient (E, d) un espace métrique complet et $f\colon E \to E$ une application faiblement contractante. Si f vérifie la propriété (L.I.) alors f admet un point fixe.*

Preuve. Soit $x_0 \in E$ fixé. La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par $x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}$, converge vers un élément a de E. Et, comme f vérifie la propriété (L.I.), on en déduit que $\liminf_{n\to\infty} d(f^n(x_0), f(a)) = 0$. Donc, il existe une sous-suite $(f^{\psi(n)}(x_0))_{n\geq 0}$ de la suite $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $f(a)$; et, par suite $f(a) = a$. ∎

4. Approximation du point fixe d'une application à l'aide d'une suite d'applications faiblement contractantes

A partir du théorème de Khamsi concernant les applications nonexpansives des espaces métriques à structure uniformément normale (voir [8, théorème 10]), on obtient le résultat suivant :

Théorème 4. *Soit (E, d) un espace métrique borné, complet et à structure uniformément normale. Si $\{f_n\colon E \to E;\ n \in \mathbb{N}\}$ est une suite d'applications vérifiant les conditions*

(i) *Pour chaque* $n \in \mathbb{N}$, *il existe* $k_n \in [0,1[$ *tel que* $d(f_n(x), f_n(y)) \leq k_n \cdot d(x,y)$, *pour tout* $(x,y) \in E^2$.

(ii) *La suite* $\{f_n \colon E \to E;\ n \in \mathbb{N}\}$ *converge uniformément vers une application* f *sur* E.

Alors, l'ensemble des points fixes $\mathrm{Fix}(f)$ *est non vide et fermé dans* (E,d).

Preuve. Les fonctions $f_n,\ n \in \mathbb{N}$, sont continues sur E et la suite $\{f_n \colon E \to E;\ n \in \mathbb{N}\}$ converge uniformément vers une application f sur E, donc l'application f est continue sur E. Les conditions (i) et (ii) impliquent que

$$d(f(x), f(y)) \leq \liminf_{n\to\infty}(k_n).d(x,y) \leq \limsup_{n\to\infty}(k_n) \cdot d(x,y) \quad \forall (x,y) \in E^2.$$

Si $\liminf_{n\to\infty}(k_n) < 1$ alors, l'application f est contractante sur E et admet un unique point fixe. Si $\liminf_{n\to\infty}(k_n) = 1$ alors $\liminf_{n\to\infty}(k_n) = \limsup_{n\to\infty}(k_n) = 1$ et $d(f(x), f(y)) \leq d(x,y)$ pour tout $(x,y) \in E^2$. Et comme (E,d) est borné, complet et à structure uniformément normale, l'ensemble des points fixes $\mathrm{Fix}(f)$ est non vide et fermé dans (E,d). ∎

Remarque 6. On obtient le même resultat du théorème 4 si on remplace la condition (E,d) borné et à structure uniformément normale par la condition :

(iii') Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\bigcup_{n\geq n_0} f_n(E)$ est relativement compacte dans E.

THÉORÈME 5. *Soient* (E,d) *un espace métrique complet et* $\{f_n \colon E \to E;\ n \in \mathbb{N}\}$ *une suite d'applications faiblement contractantes telles que :*

(i) *Pour chaque* $n \in \mathbb{N}$ *il existe* $\alpha_n \in [0,1[$ *tel que* $\mu(f_n(L_{n,c})) \leq \alpha_n \mu(L_{n,c})$ *pour tout* $c > 0$, *où* $L_{n,c} = \{x \in E \colon d(x, f_n(x)) \leq c\}$.

(ii) *La suite* $\{f_n \colon E \to E;\ n \in \mathbb{N}\}$ *converge uniformément vers une application* f *sur* E.

(iii) *Il existe* $n_0 \in \mathbb{N})$ *et* $\eta \in \mathbb{R}^{+*}$ *tel que pour tout* $c \in]0,\eta[$ $L_c \subset L_{n_0,c}$.

(iv) *L'application* $F \colon x \to d(x, f(x))$ *est r.g.i. sur* E.

Alors, l'ensemble des points fixes $\mathrm{Fix}(f)$ *est non vide et compact.*

Preuve. Les applications $f_n,\ n \in \mathbb{N}$, sont faiblement contractantes donc pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\inf\{F_n(x) \colon x \in E\} = 0$. D'après la condition (ii) et comme $0 \leq F(x) \leq F_n(x) + \sup_{y\in E}(d(f_n(y), f(y)))$, pour tout $(x,n) \in E \times \mathbb{N}$, on a $\inf\{F(x) \colon x \in E\} = 0$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\inf\{F_n(x)\colon x \in E\} = 0$ et d'après la condition (i), on a $\lim_{c\to 0^+} \mu(L_{n,c}) = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, f_n, $n \in \mathbb{N}$, est une application faiblement contractante sur E, donc $f_n(L_{n,c}) \subset L_{n,c}$ pour tout $(n,c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^{+*}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $r_n = \lim_{c\to 0^+} \mu(L_{n,c})$. D'après (i), $\lim_{c\to 0^+} \mu(f_n(L_{n,c})) \le \alpha_n r_n$. Soit $c > 0$; pour tout réel $d' > \mu(f_n(L_{n,c}))$ il existe une collection finie $\{E_i\}_i$ de parties de E, de diamétres inférieurs ou égals à d' et telles que $f_n(L_{n,c}) \subset \bigcup_i E_i$. Donc,

$$L_{n,c} \subset \bigcup_i \{x \in E\colon \text{il existe } y \in E_i \text{ tel que } d(x,y) \le c\}.$$

Par suite $\mu(L_{n,c}) \le d' + c$ pour tout $d' > \mu(f_n(L_{n,c}))$. Donc, $\mu(L_{n,c}) \le \mu(f_n(L_{n,c})) + c$. Lorsque c tend vers 0^+, on obtient $0 \le r_n \le \alpha_n r_n$; et, comme $\alpha_n \in [0,1[$, on déduit que $r_n = \lim_{c\to 0^+} \mu(L_{n,c}) = 0$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Et, en particulier pour $n = n_0$.

La condition (iii) implique que $\mu(L_c) \le \mu(L_{n_0,c})$ pour tout $c \in]0,\eta[$, donc $\lim_{c\to 0^+} \mu(L_c) = 0$. On a l'application $F\colon x \to d(x, f(x))$ est r.g.i. sur E, $\inf\{F(x)\colon x \in E\} = 0$ et $\lim_{c\to 0^+} \mu(L_c) = 0$, donc d'après [10, théorème 2.2], l'ensemble des points fixes $\mathrm{Fix}(f)$ est non vide et compact. ∎

Corollaire 1. *Soient (E,d) un espace métrique complet et $\{f_n\colon E \to E;\ n \in \mathbb{N}\}$ une suite d'applications faiblement contractantes telles que :*

(i) *Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il existe $\alpha_n \in [0,1[$ tel que $\mu(f_n(L_{n,c})) \le \alpha_n \mu(L_{n,c})$ pour tout $c > 0$.*

(ii) *Les applications $F_n\colon x \to d(x, f_n(x))$, $n \in \mathbb{N}$, sont semi-continues inférieurement sur E.*

(iii) *La suite $\{f_n\}$ converge uniformément vers une application f sur E.*

(iv) *Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\eta \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que pour tout $c \in]0,\eta[$ $L_c \subset L_{n_0,c}$.*

Alors, l'ensemble des points fixes $\mathrm{Fix}(f)$ est non vide et compact, $\lim_{n\to\infty} d(x_n, \mathrm{Fix}(f)) = 0$ où $x_n \in \mathrm{Fix}(f_n), n \in \mathbb{N}$, et $\lim_{c\to 0^+} D(\overline{L_c}, \mathrm{Fix}(f)) = 0$ où D désigne la distance de Hausdorff.

Preuve. Les applications $F_n\colon x \to d(x, f_n(x))$, $n \in \mathbb{N}$, sont semi-continues inférieurement sur E, donc F l'est aussi ; et, par suite F et F_n, $n \in \mathbb{N}$, sont r.g.i. sur E. On suit presque les mêmes démarches du théorème 5 et en tenant compte du [10, théorème 2.2], on obtient $\mathrm{Fix}(f)$ et $\mathrm{Fix}(f_n)$, $n \in \mathbb{N}$, sont non vides et compacts, $\lim_{n\to\infty} d(x_n, \mathrm{Fix}(f)) = 0$ où $x_n \in \mathrm{Fix}(f_n), n \in \mathbb{N}$, et $\lim_{c\to 0^+} D(\overline{L_c}, \mathrm{Fix}(f)) = 0$. ∎

Il est facile de prouver la remarque suivante :

Remarque 7. a) Soient (E,d) un espace métrique et $f\colon E \to E$ une application telle que :

(i) le graphe de l'application f est fermé ;

(ii) $f(E)$ est relativement compacte dans E.

Alors, f est continue sur E.

b) Soient (E,d) un espace métrique complet et $\{f_n\colon E \to E;\ n \in \mathbb{N}\}$ une suite d'applications telles que :

(i) $\{f_n\}$ converge simplement vers une application f sur E ;

(ii) il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\bigcup_{n\geq n_0} f_n(E)$ est relativement compacte dans E.

Alors, $f(E)$ est relativement compacte dans E.

THÉORÈME 6. *Soient (E,d) un espace métrique complet et $\{f_n\colon E \to E;\ n \in \mathbb{N}\}$ une suite d'applications faiblement contractantes telles que :*

(i) *La suite $\{f_n\}$ converge uniformément vers une application f sur E.*

(ii) *Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\bigcup_{n\geq n_0} f_n(E)$ est relativement compacte dans E.*

(iii) *Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le graphe de l'application f_n est fermé.*

Alors, f est continue sur E, l'ensemble des points fixes $\mathrm{Fix}(f)$ est non vide et compact et $\lim_{n\to\infty} d(x_n, \mathrm{Fix}(f)) = 0$ où $x_n \in \mathrm{Fix}(f_n), n \in \mathbb{N}$.

Preuve. On suit les mêmes démarches que dans la démonstration du théorème 5, on obtient $\inf\{F(x)\colon x \in E\} = 0$. Et, d'après la remarque 7, f est continue sur E et $f(E)$ est précompacte dans E. Ce qui implique que l'ensemble des points fixes $\mathrm{Fix}(f)$ est non vide et compact.

Montrons que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, \mathrm{Fix}(f)) = 0$ où $x_n \in \mathrm{Fix}(f_n), n \in \mathbb{N}$. En effet, supposons le contraire : il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $n \geq N$ vérifiant $d(x_n, \mathrm{Fix}(f)) \geq \epsilon$. Donc, il existe $\epsilon > 0$ et une suite strictement croissante $(\phi(n))_{n\geq 0}$ telle que $d(x_{\phi(n)}, \mathrm{Fix}(f)) \geq \epsilon$. Or pour la suite $(x_{\phi(n)})_{n\geq 0}$ il existe une sous-suite $(x_{\psi(\phi(n))})_{n\geq n_0}$ qui converge vers un élément x de E. De plus,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_{\psi(\phi(n))}) = \lim_{n\to\infty} f_{\psi(\phi(n))}(x_{\psi(\phi(n))}) = \lim_{n\to\infty} x_{\psi(\phi(n))} = x,$$

donc $x \in \mathrm{Fix}(f)$, ce qui est absurde, puisque $d(x_{\psi(\phi(n))}, x) \geq d(x_{\psi(\phi(n))}, \mathrm{Fix}(f)) \geq \epsilon > 0$ pour tout entier $n \geq n_0$. ∎

5. Points presque fixes approximativement

Définition 3. Soient (E,d) un espace métrique, E une partie non vide de X et $f\colon E \to X$ une application. On dit que f vérifie la propriété du point presque fixe approximativement (p.p.p.f.a.) s'il existe une suite d'applications $\{f_n\colon E \to X;\ n \in \mathbb{N}\}$ telle que :

(i) La suite $\{f_n\}$ converge uniformément vers l'application f sur E.

(ii) Il existe $x \in E$ et une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E à partir d'un certain rang vérifiant $\lim_{n\to\infty} d(f_n(x_n), x_n) = 0$ et $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

Exemple 5. On considère la série entière réelle

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{où} \quad a_n = \Big(1 + \frac{(-1)^n}{n}\Big)^{n^2},\ n \in \mathbb{N}^*,\ x \in]-e^{-1}, e^{-1}[.$$

On pose $X = f(]-e^{-1}, e^{-1}[)$, $E = [0,b]$ $(0 < b < e^{-1})$ et $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$, $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

(i) La suite $\{f_n\colon E \to X;\ n \in \mathbb{N}^*\}$ converge uniformément vers l'application f sur E.

(ii) Il existe une suite $(n^{-2}2^{-n^2})_n$ d'éléments de E à partir d'un certain rang vérifiant $\lim_{n\to\infty} d(f_n(x_n), x_n) = 0$ et $\lim_{n\to\infty} d(x_n, 0) = 0$.

L'élément 0 est un point fixe de f.

Théorème 7. *Soient (X,d) un espace métrique complet et E une partie fermée de X. Si $f\colon E \to X$ est une application p.p.p.f.a. sur E et $F\colon E \to \mathbb{R}$ est r.g.i. sur E, alors l'ensemble des points fixes* $\mathrm{Fix}(f)$ *est non vide et fermé dans E.*

Preuve. $f\colon E \to X$ est une application p.p.p.f.a. sur E, donc il existe un élément $x \in E$ et une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E à partir d'un certain rang vérifiant $\lim_{n\to\infty} d(f_n(x_n), x_n) = 0$ et $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. Et, comme $0 \le F(x) \le F_n(x) + \sup_{y\in E}(d(f_n(y), f(y)))$, pour tout $(x,n) \in E \times \mathbb{N}$, on en déduit que $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = 0$. L'application $F\colon E \to \mathbb{R}$ étant r.g.i. sur E, on obtient ainsi, $F(x) = 0$. ∎

Remarque 8. Le théorème 7 généralise les théorèmes précédents 4, 6 et la remarque 6.

THÉORÈME 8. *Soient* (E, d) *un espace métrique localement compact et* $f: E \to E$ *une application vérifiant les conditions suivantes :*

(i) $f(E)$ *est borné.*

(ii) *Il existe une suite d'applications* $\{f_n: E \to E;\ n \in \mathbb{N}\}$ *qui converge uniformément vers* f *sur* E.

(iii) *Il existe une suite* $(x_n)_n$ *dans* E *telle que* $\lim_{n\to\infty} d(f_n(x_n), x_n) = 0$.

(iv) *L'application* $F: x \to d(x, f(x))$ *est r.g.i. sur* E.

Alors, l'ensemble des points fixes $\mathrm{Fix}(f)$ *est non vide et compact.*

Preuve. D'après la condition (iii), il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E vérifiant $\lim_{n\to\infty} d(f_n(x_n), x_n) = 0$. Donc, $\lim_{n\to\infty} d(f(x_n), x_n) = 0$; et, comme $f(E)$ est borné, la suite $(x_n)_n$ est bornée. Il existe donc $r > 0$ et $a \in E$ tels que la boule compacte $B[a, r]$ contient la suite $(x_n)_n$. Ainsi, il existe une sous suite $(x_{\phi(n)})_n$ de la suite $(x_n)_n$ qui converge vers un élément x de E. L'application F étant r.g.i. sur E, on en déduit que $F(x) = 0$. ∎

6. APPLICATIONS

APPLICATION 1. MÉTHODE D'AITKEN. La méthode d'Aitken se présente de la façon suivante : si $(u_n)_n$ est une suite réelle qui converge vers un réel l, non stationnaire, telle que $(u_{n+1} - l)(u_n - l)^{-1}$ a une limite $k \in]0, 1[$, alors la suite $(v_n)_n$ définie à partir d'un certain rang par $v_n = u_n - [(\delta u_n)^2(\delta^2 u_n)^{-1}]$ où $\delta u_n = u_{n+1} - u_n$ et $\delta^2 u_n = \delta(\delta u_n)$, converge vers la même limite l et sa vitesse de convergence est plus rapide que celle de $(u_n)_n$. Donc, on peut appliquer cette méthode à des suites données par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, où f est d'un des types suivants :

(1) faiblement contractante et à graphe fermé ;

(2) faiblement contractante et vérifie la propriété (L.I.),

(3) faiblement contractante, $\mu(f(L_c)) \leq \alpha\mu(L_c)$ pour tout $c > 0$ avec $\alpha \in [0, 1[$, et F est r.g.i.

APPLICATION 2. Soient $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, E une partie de X compacte et étoilée en un point x_0 de E où $f: (E, \|\cdot\|_E) \to (E, \|\cdot\|_E)$ est une application vérifiant les conditions suivantes :

(i) $\|f(f_n(x)) - f(x)\|_E \leq \|f_n(x) - x\|_E$ où $f_n(x) = (1 - 1/n) \cdot f(x) + 1/n \cdot f(x_0)$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in E$.

(ii) L'application f est à graphe fermé.

Alors, l'ensemble des points fixes $\mathrm{Fix}(f)$ est non vide et compact et,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, \mathrm{Fix}(f)) = 0,$$

où $x_n \in \mathrm{Fix}(f_n),\ n \in \mathbb{N}$.

Preuve. D'après le théorème 6 on a $(E, \|\cdot\|_E)$ est complet et : (i) la suite $\{f_n\colon E \to E;\ n \in \mathbb{N}^*\}$ converge uniformément vers l'application f sur E. Les applications $f_n, n \in \mathbb{N}^*$, sont faiblement contractantes sur E, $k_n = 1 - \frac{1}{n}$; (ii) $\bigcup_{n\geq 1} f_n(E)$ est relativement compacte dans E ; (iii) Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, le graphe de l'application f_n est fermé.

Donc, l'ensemble des points fixes $\mathrm{Fix}(f)$ est non vide et compact et,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, \mathrm{Fix}(f)) = 0$$

où $x_n \in \mathrm{Fix}(f_n),\ n \in \mathbb{N}$. ∎

Application 3. Ce résultat est inspiré de [10, théorème 3.5]. On suppose qu'il existe une fonction $\theta\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\lim_{\substack{(t,s)\to(0,0)\\(t,s)\in(\mathbb{R}^+)^2}} \theta(t,s) = 0.$$

Théorème 9. *Soient E une partie bornée, fermée et convexe d'un espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$, et $f\colon (E, \|\cdot\|_E) \to (E, \|\cdot\|_E)$ une application vérifiant les conditions suivantes :*

(i) *Il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $\|f(x) - f(m)\| \leq \|x - m\|$ pour tout $x \in E$ et pour tout $m = (1-\alpha)x + \alpha f(x)$.*

(ii) *$\|f(x) - f(y)\| \leq \theta(\|x - f(x)\|, \|y - f(y)\|)$ pour tout $(x,y) \in E^2$.*

Alors, f admet un unique point fixe si, et seulement si, F est r.g.i. sur E.

Preuve. D'après (i) et, comme E est une partie bornée et convexe de l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$, on a : $\inf\{F(x)\colon x \in E\} = 0$ (voir[7, p.98]). Pour chaque $c > 0$ et pour chaque $(x,y) \in (L_c)^2$,

$$\|x - y\| \leq \theta(\|x - f(x)\|, \|y - f(y)\|) + 2c;$$

de plus, $\lim_{c\to 0^+} \theta(\|x - f(x)\|, \|y - f(y)\|) = 0$. Donc, $\lim_{c\to 0^+} diam(L_c) = 0$. Ainsi, on déduit le résultat tout en utilisant le théorème de M. Angrisani et M. Clavelli [1]. ∎

Application 4. A partir du théorème 3.3 (resp. 3.4) mentionné par D. O'Regan [14], on peut affaiblir la continuité (resp. la demi-continuité) de l'hypothèse de ces deux théorèmes par la notion r.g.i. (resp. faiblement r.g.i.[10]).

Théorème 10. *Soient* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace de Banach,* C *une partie convexe de* E*,* U *une partie ouverte de* C *contenant* 0 *et* f *une application de* $\overline{U}$ *dans* C *vérifiant les conditions suivantes :*

(i) $f(\overline{U})$ *est borné.*

(ii) *Si* $(x_n)_n \subset U$ *et* $\lambda \in [0,1]$*, alors la condition* $\lim_{n\to\infty} \|x_n - \lambda f(x_n)\| = 0$ *implique que* $(x_n)_n$ *est une suite de Cauchy.*

(iii) *Pour tout* $y \in U$ *il existe* $\epsilon > 0$ *tel que : s'il existe* $\lambda \in [0,1]$ *tel que* $\|y - \lambda f(y)\| < \epsilon$*, alors* $\lambda \cdot f$ *admet un point fixe dans* U*.*

(iv) *Pour chaque* $\lambda \in [0,1]$*, l'application* $F_\lambda \colon x \to \|x - \lambda f(x)\|$ *est r.g.i sur* $\overline{U}$*.*

Alors, soit que f *admet un point fixe dans* $\overline{U}$*, soit qu'il existe* $\lambda \in]0,1[$ *et* $x \in \partial U$ *tels que* $x = \lambda \cdot f(x)$*.*

Théorème 11. *Soient* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace de Banach,* C *une partie convexe de* E*,* U *une partie ouverte de* C *contenant* 0 *et* f *une application de* $\overline{U}$ *dans* C *vérifiant les conditions* (i), (ii) et (iii) *du théorème précédent et*

(iv') *Pour chaque* $\lambda \in [0,1]$*, l'application* $F_\lambda \colon x \to \|x - \lambda f(x)\|$ *est faiblement r.g.i sur* $\overline{U}$*.*

Alors, soit que f *admet un point fixe dans* $\overline{U}$*, soit qu'il existe* $\lambda \in]0,1[$ *et* $x \in \partial U$ *tels que* $x = \lambda \cdot f(x)$*.*

Références

[1] Angrisani, M., Clavelli, M., Synthetic approaches to problems of fixed points in metric space, *Ann. Mat. Pura Appl.,* **(IV) CLXX** (1996), 1–12.

[2] Boyd, D.W., Wong, J.S.W., On nonlinear contractions, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **20** (1969), 458–464.

[3] Brndsted, A., Fixed point and partial orders, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **60** (1976), 365–366.

[4] Caristi, J., Fixed point theorems for mapping satisfying inwardness conditions, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **215** (1976), 241–251.

[5] Caristi, J., Fixed point theory and inwardness conditions, in "Applied Nonlinear Analysis (Proc. Third Internat. Conf., Univ. Texas, Arlington 1978)", Academic Press, 1979, 479–483.

[6] Cromme, L.J., Fixed point theorems for discontinuous fonctions and applications, *Nonlinear Anal.,* **30(3)** (1997), 1527 – 1534.

[7] Hicks, T.L., Rhoades, B.E., A Banach type fixed point theorem, *Math. Japonica,* **24(3)** (1979), 327 – 330.

[8] Khamsi, M.A., "Etude de la Propriété du Point Fixe dans les Espaces de Banach et les Espaces Métriques", Thèse de Doctorat de l'Université Paris, Paris, 1987.

[9] Khamsi, M.A., On metric spaces with uniform normal structure, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **106** (1989), 723 – 726.

[10] Kirk, W.A., Saliga, L.M., Some results on existence and approximation in metric fixed point theory, *Journal of Computational and Applied Mathematics,* **113** (2000), 141 – 152.

[11] Kirk, W.A., Nonexpansive mappings in metric and Banach spaces, *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano,* **51** (1981), 133 – 144.

[12] Kuratowski, C., Sur les espaces complets, *Fund. Math.,* **15** (1930), 301 – 309.

[13] Goebel, K., Kirk, W.A., "Topics in Metric Fixed Point Theory", Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[14] O'Regan, D., Fixed point theorems for nonlinear operators, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* **202** (1996), 413 – 432.

[15] Sam B. Nadler, Jr., Sequences of contractions and fixed points, *Pacific Journal of Mathematics,* **27(3)** (1968), 579 – 585.

[16] Zeidler, E., "Nonlinear Fonctional Analysis and its Applications, I : Fixed-Point Theorems ", Springer-Verlag, New York-Berlin, 1986.