

## Unicité des Solutions Stationnaires des Modèles Dérive-Diffusion avec Génération d’Avalanche

ABDELLATIF ELLABIB, ABDELJALIL NACHAOUI

*CNRS UMR6629 Université de Nantes, 2, rue de la Houssinière,  
BP 92208, F-44322 Nantes, France*

*e-mail: nachaoui@math.univ-nantes.fr*

(Presented by W. Okrasinski)

AMS Subject Class. (2000): 35J65, 35M10, 35Q99

Received February 6, 2002

### 1. INTRODUCTION ET HYPOTHÈSE

Pour les équations de semi-conducteur à l’état stationnaire, les paramètres physiques comme les lois de mobilités, le terme de génération d’avalanche et le dopage sont des sources potentielles pour l’existence de solutions multiples, voir par exemple [6]. Ce travail est une continuation de notre résultat d’existence de solutions du système [2]

$$(1) \quad \begin{cases} -\nabla \cdot (\varepsilon \nabla u) + q n_i \left( e^{\frac{u}{U_T}} \eta - e^{-\frac{u}{U_T}} \rho \right) = q N & \text{dans } \Omega, \\ -\nabla \cdot \left( \mu_n U_T e^{\frac{u}{U_T}} \nabla \eta \right) = -Q(u, \eta, \rho)(\eta \rho - 1) + g(u, \eta, \rho) & \text{dans } \Omega, \\ -\nabla \cdot \left( \mu_p U_T e^{-\frac{u}{U_T}} \nabla \rho \right) = -Q(u, \eta, \rho)(\eta \rho - 1) + g(u, \eta, \rho) & \text{dans } \Omega, \\ u = u_d, \eta = \eta_d, \rho = \rho_d \text{ sur } \Gamma_D, \nu \cdot \nabla u = \nu \cdot \nabla \rho = \nu \cdot \nabla \eta = 0 \text{ sur } \Gamma_N \end{cases}$$

où  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ ,  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$  et  $\text{mes}(\Gamma_D) > 0$ . Voir [6, 5, 3] pour la signification physique des paramètres.

Nous apportons, ici, une contribution à l’analyse de l’unicité de solutions du système (1) dans le cas où certains changements de conditions aux limites se font à angles plats et en tenant compte du terme d’avalanche noté  $g$ . Sous certaines conditions, nous démontrons que le système (1) admet une solution unique. Dans toute la suite, nous supposons vérifiées les conditions suivantes.

- (H<sub>1</sub>) : il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon(x) \quad \forall x \in \Omega$ . Les constantes  $q, n_i$  et  $U_T$  sont positives,

- (H<sub>2</sub>) : il existe  $\underline{\mu}, \bar{\mu} > 0$  tels que  $0 < \underline{\mu} \leq \mu_n(x), \mu_p(x) \leq \bar{\mu} \ \forall x \in \Omega$ ,
- (H<sub>3</sub>) : il existe  $L_Q, C_Q > 0$  tel que pour tout  $(r, s, t), (r', s', t')$  dans un borné de  $\mathbb{R}^3$  on a
 
$$|Q(r, s, t) - Q(r', s', t')| \leq L_Q (|r - r'| + |t - t'| + |s - s'|) \text{ et}$$

$$|Q(r, s, t)| \leq C_Q,$$
- (H<sub>4</sub>) :  $g$  est de la forme

$$g(u, \eta, \rho) = \alpha(\nabla u) \mu_n U_T e^{\frac{u}{U_T}} |\nabla \eta| + \beta(\nabla u) \mu_p U_T e^{-\frac{u}{U_T}} |\nabla \rho|,$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux fonctions positives vérifiant

- il existe  $C_\alpha, C_\beta > 0$  tels que pour tout  $\zeta \in \mathbb{R}^2$ ,  $|\alpha(\zeta)| \leq C_\alpha$ ,  $|\beta(\zeta)| \leq C_\beta$
- il existe  $L_\alpha, L_\beta > 0$  tels que pour tout  $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}^2$ ,  $|\alpha(\zeta_1) - \alpha(\zeta_2)| \leq L_\alpha |\zeta_1 - \zeta_2|$ ,  $|\beta(\zeta_1) - \beta(\zeta_2)| \leq L_\beta |\zeta_1 - \zeta_2|$ .

Considérons  $\Omega$  un ouvert polygonal borné connexe de  $\mathbb{R}^2$ . Nous adoptons les notations usuelles suivantes :  $\|\cdot\|_p$  et  $\|\cdot\|_\infty$  représentent respectivement la norme de  $L^p(\Omega)$ ,  $p \geq 2$  et de  $L^\infty(\Omega)$ . Nous posons  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denote le produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$ . Rappelons deux inégalités utiles par la suite [4].

$$(2) \quad \forall v \in W_D^{1,p}(\Omega), 1 < p < \infty \quad \|v\|_p \leq b_{(p)} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|_p$$

$$(3) \quad \forall v \in H_D^1(\Omega), \|v\|_{\frac{2p}{p-2}} \leq c_{(p)} |\Omega|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \|\nabla v\| \text{ où } p > 2$$

où  $W_D^{1,p}(\Omega) = \{v \in W^{1,p}(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$  et  $H_D^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$ . Notons que le potentiel électrostatique  $u$  vérifie, voir [2], l'estimation  $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$  où  $\underline{u}$  et  $\bar{u}$  sont deux constantes réelles.

## 2. ÉTUDE DE L'UNICITÉ

Avant de présenter notre résultat d'unicité, nous commençons par exposer quelques résultats préliminaires.

LEMME 1. *Supposons satisfaites les hypothèses (H<sub>1</sub>), (H<sub>2</sub>), (H<sub>3</sub>) et (H<sub>4</sub>). Si  $(u_1, \eta_1, \rho_1)$  et  $(u_2, \eta_2, \rho_2)$  sont deux solutions faibles du système (1) alors*

$$(4) \quad \underline{\varepsilon} \|\nabla(u_2 - u_1)\| \leq q n_i b_{(2)}^2 |\Omega| \{e^{-\frac{\underline{u}}{U_T}} \|\nabla(\rho_2 - \rho_1)\| + e^{\frac{\bar{u}}{U_T}} \|\nabla(\eta_2 - \eta_1)\|\}$$

$$(5) \quad \|u_1 - u_2\|_\infty \leq \frac{q n_i}{\underline{\varepsilon}} 2^{\frac{4}{3}} c_{(3)}^2 b_{(2)} |\Omega| \{e^{-\frac{\underline{u}}{U_T}} \|\nabla(\rho_2 - \rho_1)\| + e^{\frac{\bar{u}}{U_T}} \|\nabla(\eta_2 - \eta_1)\|\}$$

où  $b_{(2)}$  et  $c_{(3)}$  sont les constantes données dans (2) et (3).

*Preuve.* Soient  $(u_1, \eta_1, \rho_1)$  et  $(u_2, \eta_2, \rho_2)$  deux solutions faibles du système (1), nous avons alors pour tout  $\psi \in H_D^1(\Omega)$   $\langle \varepsilon \nabla u_j, \nabla \psi \rangle = \langle q n_i e^{-\frac{u_j}{U_T}} \rho_j - q n_i e^{\frac{u_j}{U_T}} \eta_j + q N, \psi \rangle$   $j = 1, 2$ .  
Nous en déduisons que

$$(6) \quad \langle \varepsilon \nabla(u_1 - u_2), \nabla \psi \rangle = \langle q n_i \left( e^{-\frac{u_1}{U_T}} \rho_1 - e^{-\frac{u_2}{U_T}} \rho_2 - e^{\frac{u_1}{U_T}} \eta_1 + e^{\frac{u_2}{U_T}} \eta_2 \right), \psi \rangle$$

Posons  $\psi = (u_1 - u_2)/U_T$ , en utilisant la convexité de la fonction  $e^u$  et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$\|\sqrt{\varepsilon} \nabla(u_2 - u_1)\|^2 \leq q n_i \left\{ e^{\frac{\bar{u}}{U_T}} \|\eta_1 - \eta_2\| + e^{-\frac{\bar{u}}{U_T}} \|\rho_1 - \rho_2\| \right\} \|u_1 - u_2\|.$$

L'hypothèse (H<sub>1</sub>) et l'inégalité (2) entraînent alors l'inégalité (4). Pour montrer l'inégalité (5), nous montrons d'abord le résultat suivant.

LEMME 2. Soient  $\varphi \in H_D^1(\Omega)$  et  $a_0 \in \mathbb{R}$  telle que  $(\varphi - a_0)^+ \in H_D^1(\Omega)$ . Si  $h \in L^2(\Omega)$  est telle que

$$(7) \quad \forall a \geq a_0 \quad \|\nabla(\varphi - a)^+\|^2 \leq \int_{\Omega} h(x)(\varphi - a)^+(x) dx,$$

alors

$$(8) \quad \|\varphi\|_{\infty} \leq a_0 + 2^{\frac{4}{3}} c_{(3)}^2 |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|h\|$$

où  $c_{(3)}$  est la constante donnée dans (3).

*Preuve.* Soient  $\varphi \in H_D^1(\Omega)$ ,  $a_0 \in \mathbb{R}$  telle que  $(\varphi - a_0)^+ \in H_D^1(\Omega)$ , soit  $h \in L^2(\Omega)$  vérifiant (7). Pour  $a \geq a_0$ , posons  $\Omega_a = \{x \in \Omega; \varphi(x) > a\}$ , nous avons alors

$$\int_{\Omega} h(x)(\varphi - a)^+(x) dx \leq \|h\| \|(\varphi - a)^+\|_6 |\Omega_a|^{\frac{1}{3}}.$$

De l'inégalité (3) avec  $v = (\varphi - a)^+$  et  $p = 3$ , l'inégalité (7), et la dernière inégalité, nous obtenons

$$(9) \quad \|(\varphi - a)^+\|_6 \leq c_{(3)}^2 |\Omega_a|^{\frac{2}{3}} \|h\|.$$

D'autre part, pour  $\hat{a} > a$ , nous avons  $\|(\varphi - a)^+\|_6^6 \geq \int_{\Omega_{\hat{a}}} (\varphi(x) - a)^6 dx \geq (\hat{a} - a)^6 |\Omega_{\hat{a}}|$ . Alors en utilisant (9), nous obtenons  $|\Omega_{\hat{a}}| \leq c_{(3)}^{12} \|h\|^6 (\hat{a} - a)^{-6} |\Omega_a|^4$ . Considérons la fonction  $f$  définie, pour tout  $a \geq a_0$ , par  $f(a) = |\Omega_a|$ . D'après la dernière inégalité,  $f$  vérifie l'hypothèse du Lemme 2.9 [8], donc  $f(s_0) = 0$  avec  $s_0 = a_0 + 2^{\frac{4}{3}} c_{(3)}^2 |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|h\|$ , d'où l'inégalité (8). ■

Nous pouvons maintenant montrer l'inégalité (5). Soit  $c \geq 0$ , prenons  $\psi = ((u_1 - u_2 - c)/U_T)^+ \in H_D^1(\Omega)$  dans (6). La convexité de la fonction exponentielle, comme dans la démonstration de l'inégalité (4), entraîne

$$(10) \quad \langle \varepsilon U_T \nabla \psi, \nabla \psi \rangle \leq \langle q n_i \left( e^{-\frac{u_1}{U_T}} (\rho_1 - \rho_2) - e^{\frac{u_1}{U_T}} (\eta_1 - \eta_2) \right), \psi \rangle.$$

Il est clair, en prenant dans (10)  $\varphi = (u_1 - u_2)/U_T$ ,  $a_0 = 0$  et

$$h = \frac{q n_i}{\varepsilon U_T} \left[ e^{-\frac{u_1}{U_T}} (\rho_1 - \rho_2) - e^{\frac{u_1}{U_T}} (\eta_1 - \eta_2) \right],$$

que

$$\|\nabla(\varphi - a)^+\|^2 \leq \int_{\Omega} h(x) (\varphi - a)^+(x) dx$$

avec  $a = c/U_T$ . Nous obtenons alors, du Lemme 2,

$$\|\varphi\|_{\infty} \leq \frac{q n_i}{\varepsilon U_T} 2^{\frac{4}{3}} c_{(3)}^2 |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|e^{-\frac{u_1}{U_T}} (\rho_1 - \rho_2) - e^{\frac{u_1}{U_T}} (\eta_1 - \eta_2)\|.$$

L'inégalité triangulaire et l'application de l'inégalité (2) avec  $v = \rho_1 - \rho_2$  et  $v = \eta_1 - \eta_2$  entraînent (5), ce qui achève la démonstration du Lemme 1. ■

LEMME 3. *Sous les hypothèses du Lemme 1, si  $(u_1, \eta_1, \rho_1)$  et  $(u_2, \eta_2, \rho_2)$  sont deux solutions faibles du système (1) alors*

$$\begin{aligned} & \mu e^{\frac{\bar{u}}{U_T}} U_T \|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\| \leq \left\{ b_{(2)}^2 |\Omega| L_Q \|\eta_1 \rho_1 - 1\|_{\infty} \right. \\ & \left. + \bar{\mu} U_T c_{(3)} |\Omega|^{\frac{1}{6}} \left( L_{\alpha} e^{\frac{\bar{u}}{U_T}} \|\nabla \eta_1\|_3 + L_{\beta} e^{-\frac{\bar{u}}{U_T}} \|\nabla \rho_1\|_3 \right) \right\} \\ \|\nabla(u_1 - u_2)\| & + \left\{ \bar{\mu} e^{\frac{\bar{u}}{U_T}} \frac{q n_i}{\varepsilon} 2^{\frac{4}{3}} c_{(3)}^2 b_{(2)} |\Omega| \left[ \left( 1 + C_{\alpha} b_{(2)} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \right) e^{\frac{\bar{u}}{U_T}} \right. \right. \\ & \times \|\nabla \eta_1\| + C_{\beta} b_{(2)} e^{-\frac{\bar{u}}{U_T}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \rho_1\| \left. \right] + \bar{\mu} U_T C_{\alpha} b_{(2)} e^{\frac{\bar{u}}{U_T}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \\ & + b_{(2)}^2 |\Omega| L_Q \|\eta_1 \rho_1 - 1\|_{\infty} + b_{(2)}^2 |\Omega| C_Q \|\rho_1\|_{\infty} \left. \right\} \|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\| \\ & + \left\{ \bar{\mu} e^{-\frac{\bar{u}}{U_T}} \frac{q n_i}{\varepsilon} 2^{\frac{4}{3}} c_{(3)}^2 b_{(2)} |\Omega| \left[ \left( 1 + C_{\alpha} b_{(2)} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \right) e^{\frac{\bar{u}}{U_T}} \right. \right. \\ & \times \|\nabla \eta_1\| + C_{\beta} b_{(2)} e^{-\frac{\bar{u}}{U_T}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \rho_1\| \left. \right] \\ & + \bar{\mu} U_T C_{\beta} b_{(2)} e^{-\frac{\bar{u}}{U_T}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} + b_{(2)}^2 |\Omega| L_Q \|\eta_1 \rho_1 - 1\|_{\infty} \\ & \left. + b_{(2)}^2 |\Omega| C_Q \|\eta_2\|_{\infty} \right\} \|\nabla(\rho_1 - \rho_2)\| \end{aligned}$$

où  $b_{(2)}$ ,  $c_{(3)}$  sont les constantes définies respectivement dans (2) et (3).

*Preuve.* Soit  $\varphi \in H_D^1(\Omega)$ , de la deuxième équation du système (1), nous obtenons, pour  $i = 1, 2$ ,  $\langle \mu_n U_T e^{\frac{u_i}{U_T}} \nabla \eta_i, \nabla \varphi \rangle + \langle Q(u_i, \eta_i, \rho_i)(\eta_i \rho_i - 1), \varphi \rangle = \langle g_i, \varphi \rangle$  avec  $g_i = g(u_i, \eta_i, \rho_i)$ , nous en déduisons

$$(11) \quad \begin{aligned} & \langle \mu_n U_T (e^{\frac{u_1}{U_T}} \nabla \eta_1 - e^{\frac{u_2}{U_T}} \nabla \eta_2), \nabla \varphi \rangle \\ & = \langle Q(u_2, \eta_2, \rho_2)(\eta_2 \rho_2 - 1) - Q(u_1, \eta_1, \rho_1)(\eta_1 \rho_1 - 1), \varphi \rangle \\ & \quad + \langle g_1 - g_2, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Posons  $\varphi = \eta_1 - \eta_2$  dans (11), nous obtenons

$$(12) \quad \langle \mu_n U_T e^{\frac{u_2}{U_T}} \nabla(\eta_1 - \eta_2), \nabla(\eta_1 - \eta_2) \rangle = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &= \left\langle \mu_n U_T \left( e^{\frac{u_2}{U_T}} - e^{\frac{u_1}{U_T}} \right) \nabla \eta_1, \nabla(\eta_1 - \eta_2) \right\rangle, \\ I_2 &= \langle [Q(u_2, \eta_2, \rho_2) - Q(u_1, \eta_1, \rho_1)] (\eta_1 \rho_1 - 1), \eta_1 - \eta_2 \rangle, \\ I_3 &= \langle Q(u_2, \eta_2, \rho_2)(\eta_2 \rho_2 - \eta_1 \rho_1), \eta_1 - \eta_2 \rangle \text{ et} \\ I_4 &= \langle g_1 - g_2, \eta_1 - \eta_2 \rangle. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que  $I_1 \leq \bar{\mu} e^{\frac{\bar{u}}{U_T}} \|u_2 - u_1\|_\infty \|\nabla \eta_1\| \|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\|$ . Alors, d'après (5), nous obtenons

$$(13) \quad \begin{aligned} I_1 &\leq \bar{\mu} e^{\frac{\bar{u}}{U_T}} \frac{q n_i}{\underline{\varepsilon}} 2^{\frac{4}{3}} c_{(3)}^2 b_{(2)} |\Omega| \\ &\times \left\{ e^{\frac{\bar{u}}{U_T}} \|\nabla(\eta_2 - \eta_1)\| + e^{-\frac{\underline{u}}{U_T}} \|\nabla(\rho_2 - \rho_1)\| \right\} \|\nabla \eta_1\| \|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\|. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (H<sub>3</sub>),  $I_2 \leq L_Q \langle (|u_1 - u_2| + |\eta_1 - \eta_2| + |\rho_1 - \rho_2|)(\eta_1 \rho_1 - 1), \eta_1 - \eta_2 \rangle$ . En utilisant (2), nous obtenons

$$(14) \quad \begin{aligned} I_2 &\leq b_{(2)}^2 |\Omega| L_Q \|\eta_1 \rho_1 - 1\|_\infty \\ &\times (\|\nabla(u_1 - u_2)\| + \|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\| + \|\nabla(\rho_1 - \rho_2)\|) \|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\|. \end{aligned}$$

L'hypothèse (H<sub>3</sub>) entraîne  $I_3 \leq C_Q \langle (\eta_2 - \eta_1) \rho_1 + \eta_2 (\rho_2 - \rho_1), \eta_1 - \eta_2 \rangle$ . Nous déduisons de (2) que

$$(15) \quad \begin{aligned} I_3 &\leq b_{(2)}^2 |\Omega| C_Q \\ &\times \{ \|\rho_1\|_\infty \|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\| + \|\eta_2\|_\infty \|\nabla(\rho_1 - \rho_2)\| \} \|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\|. \end{aligned}$$

Nous avons aussi  $\langle g_1 - g_2, \eta_1 - \eta_2 \rangle = I_5 + I_6$  avec

$$\begin{aligned} I_5 &= \langle \mu_n U_T \left( \alpha(\nabla u_1) e^{\frac{u_1}{\bar{U}_T}} |\nabla \eta_1| - \alpha(\nabla u_2) e^{\frac{u_2}{\bar{U}_T}} |\nabla \eta_2| \right), \eta_1 - \eta_2 \rangle \\ I_6 &= \langle \mu_p U_T \left( \beta(\nabla u_1) e^{-\frac{u_1}{\bar{U}_T}} |\nabla \rho_1| - \beta(\nabla u_2) e^{-\frac{u_2}{\bar{U}_T}} |\nabla \rho_2| \right), \eta_1 - \eta_2 \rangle. \end{aligned}$$

Le terme  $I_5$  se décompose de la façon suivante  $I_5 = I_{51} + I_{52} + I_{53}$  où

$$\begin{aligned} I_{51} &= \langle \mu_n U_T (\alpha(\nabla u_1) - \alpha(\nabla u_2)) e^{\frac{u_1}{\bar{U}_T}} |\nabla \eta_1|, \eta_1 - \eta_2 \rangle, \\ I_{52} &= \langle \mu_n U_T \alpha(\nabla u_2) \left( e^{\frac{u_1}{\bar{U}_T}} - e^{\frac{u_2}{\bar{U}_T}} \right) |\nabla \eta_1|, \eta_1 - \eta_2 \rangle, \\ I_{53} &= \langle \mu_n U_T \alpha(\nabla u_2) e^{\frac{u_2}{\bar{U}_T}} (|\nabla \eta_1| - |\nabla \eta_2|), \eta_1 - \eta_2 \rangle. \end{aligned}$$

En utilisant (H<sub>2</sub>), (H<sub>4</sub>), l'inégalité de Hölder et l'inégalité (3) avec  $p = 3$ , nous obtenons

$$(16) \quad I_{51} \leq \bar{\mu} U_T L_\alpha e^{\frac{\bar{u}}{\bar{U}_T}} c_{(3)} |\Omega|^{\frac{1}{6}} \|\nabla(u_1 - u_2)\| \|\nabla \eta_1\|_3 \|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\|.$$

Les hypothèses (H<sub>2</sub>) et (H<sub>4</sub>) entraînent

$$I_{52} \leq \bar{\mu} C_\alpha e^{\frac{\bar{u}}{\bar{U}_T}} \|u_1 - u_2\|_\infty \|\nabla \eta_1\| \|\eta_1 - \eta_2\|.$$

En utilisant les inégalités (2) et (5), nous obtenons

$$(17) \quad \begin{aligned} I_{52} &\leq \bar{\mu} C_\alpha e^{\frac{\bar{u}}{\bar{U}_T}} \frac{q n_i}{\underline{\varepsilon}} 2^{\frac{4}{3}} c_{(3)}^2 b_{(2)}^2 |\Omega|^{\frac{3}{2}} \\ &\cdot \left\{ e^{-\frac{\bar{u}}{\bar{U}_T}} \|\nabla(\rho_2 - \rho_1)\| + e^{\frac{\bar{u}}{\bar{U}_T}} \|\nabla(\eta_2 - \eta_1)\| \right\} \|\nabla \eta_1\| \|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\|. \end{aligned}$$

Les hypothèses (H<sub>2</sub>), (H<sub>4</sub>) et l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz à  $I_{53}$  impliquent

$$(18) \quad \begin{aligned} I_{53} &\leq \bar{\mu} U_T C_\alpha e^{\frac{\bar{u}}{\bar{U}_T}} \|\nabla \eta_1 - \nabla \eta_2\| \|\eta_1 - \eta_2\| \\ &\leq \bar{\mu} U_T C_\alpha e^{\frac{\bar{u}}{\bar{U}_T}} b_{(2)} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\|^2. \end{aligned}$$

La combinaison de (16), (17) et (18) nous donne

$$\begin{aligned}
 I_5 \leq & \bar{\mu} U_T L_\alpha e^{\frac{\bar{u}}{\bar{v}_T}} c_{(3)} |\Omega|^{\frac{1}{6}} \|\nabla(u_1 - u_2)\| \|\nabla\eta_1\|_3 \|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\| \\
 (19) \quad & + \bar{\mu} U_T C_\alpha e^{\frac{\bar{u}}{\bar{v}_T}} b_{(2)} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\|^2 + \bar{\mu} e^{\frac{\bar{u}}{\bar{v}_T}} \frac{q n_i}{\underline{\varepsilon}} b_{(2)}^2 c_{(3)}^2 C_\alpha 2^{\frac{4}{3}} |\Omega|^{\frac{3}{2}} \\
 & \cdot \left\{ e^{-\frac{u}{\bar{v}_T}} \|\nabla(\rho_2 - \rho_1)\| + e^{\frac{\bar{u}}{\bar{v}_T}} \|\nabla(\eta_2 - \eta_1)\| \right\} \|\nabla\eta_1\| \|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\|.
 \end{aligned}$$

D'une façon similaire, nous obtenons une estimation de  $I_6$ . Finalement, en introduisant les estimations (13), (14), (15), (19) et celle de  $I_6$  dans (12), en minorant le terme de gauche de l'inégalité obtenue par

$$\underline{\mu} e^{\frac{u}{\bar{v}_T}} U_T \|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\|^2$$

et en simplifiant le résultat par  $\|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\|$  alors l'inégalité du Lemme 3 s'obtient en regroupant les termes en  $\|\nabla(u_1 - u_2)\|$ ,  $\|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\|$  et  $\|\nabla(\rho_1 - \rho_2)\|$ . ■

Par un argument similaire appliqué à la deuxième équation de continuité, nous obtenons aussi le résultat suivant.

LEMME 4. *Sous les hypothèses du Lemme 1, si  $(u_1, \eta_1, \rho_1)$  et  $(u_2, \eta_2, \rho_2)$  sont deux solutions faibles du système (1) alors*

$$\begin{aligned}
 \underline{\mu} e^{-\frac{\bar{u}}{\bar{v}_T}} U_T \|\nabla(\rho_1 - \rho_2)\| \leq & \left\{ b_{(2)}^2 |\Omega| L_Q \|\eta_1 \rho_1 - 1\|_\infty + \bar{\mu} U_T c_{(3)} |\Omega|^{\frac{1}{6}} \right. \\
 & \cdot \left. \left( L_\alpha e^{\frac{\bar{u}}{\bar{v}_T}} \|\nabla\eta_1\|_3 + L_\beta e^{-\frac{u}{\bar{v}_T}} \|\nabla\rho_1\|_3 \right) \right\} \|\nabla(u_1 - u_2)\| \\
 & + \left\{ \bar{\mu} e^{\frac{\bar{u}}{\bar{v}_T}} \frac{q n_i}{\underline{\varepsilon}} 2^{\frac{4}{3}} c_{(3)}^2 b_{(2)} |\Omega| \left[ \left( 1 + C_\beta b_{(2)} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \right) \times e^{-\frac{u}{\bar{v}_T}} \|\nabla\rho_1\| \right. \right. \\
 & + \left. \left. C_\alpha b_{(2)} e^{\frac{\bar{u}}{\bar{v}_T}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|\nabla\eta_1\| \right] + \bar{\mu} U_T C_\alpha b_{(2)} e^{\frac{\bar{u}}{\bar{v}_T}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} + b_{(2)}^2 |\Omega| L_Q \|\eta_1 \rho_1 - 1\|_\infty \right. \\
 & + \left. b_{(2)}^2 |\Omega| C_Q \|\rho_1\|_\infty \right\} \|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\| + \left\{ \bar{\mu} e^{-\frac{u}{\bar{v}_T}} \frac{q n_i}{\underline{\varepsilon}} 2^{\frac{4}{3}} c_{(3)}^2 b_{(2)} |\Omega| \right. \\
 & \cdot \left[ \left( 1 + C_\beta b_{(2)} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \right) \times e^{-\frac{u}{\bar{v}_T}} \|\nabla\rho_1\| + C_\alpha b_{(2)} e^{\frac{\bar{u}}{\bar{v}_T}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|\nabla\eta_1\| \right] \\
 & + \left. \bar{\mu} U_T C_\beta b_{(2)} e^{-\frac{u}{\bar{v}_T}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} + b_{(2)}^2 |\Omega| L_Q \|\eta_1 \rho_1 - 1\|_\infty + b_{(2)}^2 |\Omega| C_Q \|\eta_2\|_\infty \right\} \\
 & \cdot \|\nabla(\rho_1 - \rho_2)\|
 \end{aligned}$$

où  $b_{(2)}$ ,  $c_{(3)}$  sont les constantes données respectivement dans (2) et (3).

THÉORÈME. *Supposons satisfaites les hypothèses (H<sub>1</sub>), (H<sub>2</sub>), (H<sub>3</sub>) et (H<sub>4</sub>). Soient  $(u_1, \eta_1, \rho_1)$  et  $(u_2, \eta_2, \rho_2)$  deux solutions faibles du système (1). Nous définissons la matrice  $A$ , d'ordre 3 dont les coefficients  $a_{ij}$  sont définis par*

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \sqrt{\underline{\varepsilon}}, & a_{12} &= -\frac{q n_i b_{(2)}^2 e^{\frac{\bar{u}}{U_T}} |\Omega|}{\sqrt{\underline{\varepsilon}}}, & a_{13} &= -\frac{q n_i b_{(2)}^2 e^{-\frac{\bar{u}}{U_T}} |\Omega|}{\sqrt{\underline{\varepsilon}}}, \\
a_{21} &= -b_{(2)}^2 |\Omega| L_Q \|\eta_1 \rho_1 - 1\|_\infty - \bar{\mu} U_T c_{(3)} |\Omega|^{\frac{1}{6}} (L_\alpha e^{\frac{\bar{u}}{U_T}} \|\nabla \eta_1\|_3 \\
&\quad + L_\beta e^{-\frac{\bar{u}}{U_T}} \|\nabla \rho_1\|_3), \\
a_{22} &= \underline{\mu} U_T e^{\frac{\bar{u}}{U_T}} - \bar{\mu} e^{\frac{\bar{u}}{U_T}} \frac{q n_i}{\underline{\varepsilon}} 2^{\frac{4}{3}} c_{(3)}^2 b_{(2)} |\Omega| \left[ \left(1 + C_\alpha b_{(2)} |\Omega|^{\frac{1}{2}}\right) e^{\frac{\bar{u}}{U_T}} \|\nabla \eta_1\| \right. \\
&\quad \left. + C_\beta b_{(2)} e^{-\frac{\bar{u}}{U_T}} \times |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \rho_1\| \right] - \bar{\mu} U_T C_\alpha b_{(2)} e^{\frac{\bar{u}}{U_T}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \\
&\quad - b_{(2)}^2 |\Omega| L_Q \|\eta_1 \rho_1 - 1\|_\infty - b_{(2)}^2 |\Omega| C_Q \|\rho_1\|_\infty, \\
a_{23} &= -\bar{\mu} e^{-\frac{\bar{u}}{U_T}} \frac{q n_i}{\underline{\varepsilon}} 2^{\frac{4}{3}} c_{(3)}^2 b_{(2)} |\Omega| \left[ \left(1 + C_\alpha b_{(2)} |\Omega|^{\frac{1}{2}}\right) e^{\frac{\bar{u}}{U_T}} \|\nabla \eta_1\| \right. \\
&\quad \left. + C_\beta b_{(2)} e^{-\frac{\bar{u}}{U_T}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \rho_1\| \right] - \bar{\mu} U_T C_\beta b_{(2)} e^{-\frac{\bar{u}}{U_T}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \\
&\quad - b_{(2)}^2 |\Omega| L_Q \|\eta_1 \rho_1 - 1\|_\infty - b_{(2)}^2 |\Omega| C_Q \|\eta_2\|_\infty, \\
a_{31} &= -b_{(2)}^2 |\Omega| L_Q \|\eta_1 \rho_1 - 1\|_\infty - \bar{\mu} U_T c_{(3)} |\Omega|^{\frac{1}{6}} (L_\alpha e^{\frac{\bar{u}}{U_T}} \|\nabla \eta_1\|_3 \\
&\quad + L_\beta e^{-\frac{\bar{u}}{U_T}} \|\nabla \rho_1\|_3), \\
a_{32} &= -\bar{\mu} e^{\frac{\bar{u}}{U_T}} \frac{q n_i}{\underline{\varepsilon}} 2^{\frac{4}{3}} c_{(3)}^2 b_{(2)} |\Omega| \left[ \left(1 + C_\beta b_{(2)} |\Omega|^{\frac{1}{2}}\right) e^{-\frac{\bar{u}}{U_T}} \|\nabla \rho_1\| \right. \\
&\quad \left. + C_\alpha b_{(2)} e^{\frac{\bar{u}}{U_T}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \eta_1\| \right] - \bar{\mu} U_T C_\alpha b_{(2)} e^{\frac{\bar{u}}{U_T}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \\
&\quad - b_{(2)}^2 |\Omega| L_Q \|\eta_1 \rho_1 - 1\|_\infty - b_{(2)}^2 |\Omega| C_Q \|\rho_1\|_\infty, \\
a_{33} &= \underline{\mu} U_T e^{-\frac{\bar{u}}{U_T}} - \bar{\mu} e^{-\frac{\bar{u}}{U_T}} \frac{q n_i}{\underline{\varepsilon}} 2^{\frac{4}{3}} c_{(3)}^2 b_{(2)} |\Omega| \left[ \left(1 + C_\beta b_{(2)} |\Omega|^{\frac{1}{2}}\right) e^{-\frac{\bar{u}}{U_T}} \|\nabla \rho_1\| \right. \\
&\quad \left. + C_\alpha b_{(2)} e^{\frac{\bar{u}}{U_T}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \eta_1\| \right] - \bar{\mu} U_T C_\beta b_{(2)} e^{-\frac{\bar{u}}{U_T}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \\
&\quad - b_{(2)}^2 |\Omega| L_Q \|\eta_1 \rho_1 - 1\|_\infty - b_{(2)}^2 |\Omega| C_Q \|\eta_2\|_\infty.
\end{aligned}$$

Si la matrice  $A$  est définie positive alors  $u_1 = u_2$ ,  $\eta_1 = \eta_2$  et  $\rho_1 = \rho_2$ .

*Preuve.* On considère  $\zeta = (\|\nabla(u_1 - u_2)\|, \|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\|, \|\nabla(\rho_1 - \rho_2)\|)^T \in \mathbb{R}^3$ . En utilisant l'inégalité (4) et les Lemmes 3 et 4, on montre que  $(A\zeta, \zeta) \leq 0$  et comme  $A$  est supposée définie positive alors  $\zeta = 0$ . ■

*Remarque.* En absence de recombinaison-génération i.e.  $g = 0$  et  $Q = 0$ , on montre que la matrice  $A$ , définie dans le Théorème, est définie positive pour  $\underline{\varepsilon}$  suffisamment grand ou  $|\Omega|$  suffisamment petit. On prouve ainsi, en utilisant le même cadre, les résultats d'unicité obtenus par des méthodes différentes dans [7] et [9]. Voir [3] pour plus de détails.

## RÉFÉRENCES

- [1] ALABAU, F., On the existence of multiple steady-state solutions in the theory of electro-diffusion, *Trans. Am. Math. Soc.*, **350** (12) (1998), 4709–4756.
- [2] ELLABIB, A., NACHAOUI, A., Existence de solutions pour le modèle dérive-diffusion avec terme d'avalanche, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **332** (4) (2001), 305–310.
- [3] ELLABIB, A., “Analyse Mathématique d'Équations de Semi-Conducteurs avec Mobilités non-Constantes et Identification des Frontières Libres dans les Jonctions  $PN$ ”, Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes, 2000. [http : www.math.sciences.univ-nantes.fr/DEA/THESES/ellabib20000620.html](http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/DEA/THESES/ellabib20000620.html)
- [4] LADYZHENSKAYA, O.A., URAL'TSEVA, N.N., “Linear and Quasilinear Elliptic Equations”, Academic Press, 1968.
- [5] MARKOWICH, P.A., “The Stationary Semiconductor Device Equations”, Springer Verlag, Wien-New york, 1986.
- [6] MOCK, M.S., An example of nonuniqueness of stationary solutions in semiconductor device models, *COMPEL*, **1** (3) (1982), 165–174.
- [7] NACHAOUI, A., NASSIF, N.R., On the uniqueness of the solution to the drift-diffusion model in semiconductor analysis, *COMPEL*, **2** (3) (1992), 377–390.
- [8] TROIANIELLO, G.M., “Elliptic Differential Equations and Obstacle Problems”, Plenum Press, New York, 1987.
- [9] WANG, Y., FAN, J., On existence, uniqueness and regularity of steady state solutions to the basic semiconductor equations, *Acta Mathematica Scientia*, **15** (2) (1995), 180–188.