EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **19**, Núm. 2, 163 – 170 (2004)

Théorème du Graphe Fermé dans les G-Espaces Topologiques

R. Ameziane Hassani, A. Blali, A. Bouziani

Département de Mathématiques et Informatique, Université S.M. Ben Abdellah Faculté des Sciences Dhar-Mehraz, B.P. 1796-*Fès Atlas, Fès, Maroc*

(Presented by Joaquín Motos)

AMS *Subject Class.* (2000): 46A30 *Received July* 10, 2003

In this paper, we introduce the notion of topological G-spaces. This is an intermediate class between G-sets and A-modules. After giving suitable definitions and illustrating exemples, we prove a theorem of type closed graph theorem.

1. Introduction

Dans cet article nous introduisons la notion de G-espace topologique (définition 4), où $(G, .)$ est un monoïde [5] muni d'une structure topologique. Ces espaces forment une classe strictement plus large que celle des modules topologiques, du fait qu'un module topologique sur un anneau unitaire A est un A-espace topologique. Si $\lambda, \mu \in G$ et E un G-espace, l'équation : $\lambda x+\mu x = \alpha x$, $\forall x \in E$, d'inconnu α, qui admet évidemment $\lambda + \mu$ comme solution dans le cas des A-modules, peut ne pas avoir de solution dans G, comme le montre l'exemple 2. Pour surmonter cette difficulté qui résulte de la structure pauvre du monoïde G, nous utilisons les applications $\lambda + \mu$, $-\lambda$ et $\lambda - \mu$, pour tous $\lambda, \mu \in G$. Ce qui nous a permis d'étendre la notion de parties absorbantes (définition 5) et parsuite celle de réseau aux G-espaces topologiques.

D'autre part, plusieurs mathématiciens ont étudié le théorème du graphe fermé (voir par exemple [1, 2, 6, 7]). Ce théorème est un outil très puissant dans l'analyse fonctionnelle. Sa version classique, qui montre que toute application linéaire à graphe fermé entre deux espaces vectoriels topologiques métrisables complets est automatiquement continue, est dû à S. Banach [8]. La démonstration se base essentiellement sur le théorème de Baire. Dans le but de généraliser ce résultat, les espaces à réseaux convergents ont été introduits et étudiés par M. DeWilde [7]. Des résultats analogues ont été établis dans les modules topologiques après avoir adopté des notions convenables de parties équilibrées et de réseaux [2].

Pour établir un résultat de ce type dans les G-espaces topologiques nous faisons les hypothèses suivantes :

– Il existe une suite $(\lambda_n)_n$ d'éléments dans G qui converge vers un élément $\lambda_0 \in G$.
– Si E est un G-espace topologique les applications $\lambda_n - \lambda_0 : E \to E$, $x \mapsto \lambda_n.x - \lambda_0.x$, $n \in \mathbb{N}$, sont bicontinues (i.e. bijectives, continues et ouvertes).

Ces hypothèses sont évidemment satisfaites dans le cas classique des espaces vectoriels topologiques. Il suffit de prendre $\lambda_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Nous donnons des exemples illustrant les différentes notions introduites dans cet article puis nous établissons des résultats de type théorème du graphe fermé.

2. G-Espaces topologiques

Définition 1. Un monoïde est un ensemble muni d'une loi de composition interne associative possédant un élément neutre.

Soit G un monoïde noté multiplicativement d'élément neutre 1.

Définition 2. ([5]) Un ensemble non vide E est dit un G-ensemble muni d'une loi de composition externe dont G est l'ensemble d'opérateurs ($(\lambda, x) \mapsto \lambda x$) vérifiant :

(i) $1x = x$, pour tout x de E.
(ii) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$, pour tous λ, μ de G et tout x de E.

Définition 3. Un groupe commutatif $(E, +)$ est dit un G-espace s'il est muni d'une loi de composition externe, dont G est l'ensemble d'opérateurs, vérifiant :

(i) E est un G-ensemble.
(ii) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ pour tous x, y de E et tout λ de G.

Notations. Soient E un G-espace et λ, μ deux éléments de G. Les applications de E dans E : $x \mapsto \lambda x + \mu x$, $x \mapsto -\lambda x$, $x \mapsto \lambda x - \mu x$ seront notées respectivement $\lambda + \mu$, $-\lambda$ et $\lambda - \mu$.

Dans la suite, on suppose G muni d'une structure topologique compatible. Pour tout $\lambda \in G$, soit $\vartheta(\lambda)$ un système fondamental de voisinages de λ.

DÉFINITION 4. On appelle G-espace topologique tout G-espace E muni d'une topologie telle que $(E, +)$ soit un groupe topologique et la loi de composition externe $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ de $G \times E$ dans E soit continue.

Remarque 1. La classe des G-espaces topologiques est strictement plus large que celle des modules topologiques sur un anneau unitaire. En effet, il est clair qu'un A-module est un A-espace. L'exemple suivant montre que l'inclusion est stricte.

EXEMPLE 1. Soit E le groupe additif des applications continues de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Si on considère l'opération externe définie par :

$$\mathbb{C} \times E \to E,\ (\lambda, f) \mapsto (z \mapsto f(\lambda z))\,,$$

E sera un $\mathbb{C}$-espace, qui n'est pas un $\mathbb{C}$-module :

$$0.f : z \mapsto f(0)\,.$$

DÉFINITION 5. Soient A et B deux parties d'un G-espace topologique.

– On dit que A *absorbe* B si pour tout $\lambda_0 \in G$, il existe $a \in \vartheta(\lambda_0)$ tel que : pour tout $\lambda \in a$, $(\lambda - \lambda_0)(B) \subset A$.
– On dit que A est *absorbante* si elle absorbe toute partie réduite à un seul élément.

Remarque 2. Soit E un G-espace topologique. E est tout d'abord un groupe topologique, donc il admet un système fondamental de voisinages de 0 formé de parties symétriques et fermées [4]. Le fait que pour tout $x \in E$ et tout $\lambda_0 \in G$ l'application $G \to E$, $\lambda \mapsto \lambda x - \lambda_0 x$, est continue en λ_0 montre que tout voisinage de l'origine est absorbant. Il en résulte que tout G-espace topologique admet un système fondamental de voisinages de 0 formé de parties symétriques, fermées et absorbantes.

DÉFINITION 6. Une application f d'un G-espace E dans un G-espace F est dite G-linéaire si elle vérifie : $f(x + y) = f(x) + f(y)$ et $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, $\forall x, y \in E$ et $\forall \lambda \in G$.

Remarque 3. Si $T : E \to F$ est une application G-linéaire alors pour tous $\lambda, \mu \in G$ on a $T \circ (\lambda - \mu) = (\lambda - \mu) \circ T$.

Nous utilisons ce résultat dans les démonstration des deux théorèmes 1 et 2.

Exemple 2. (Distribution de Heaviside) $(\mathbb{R},+)$ muni de sa topologie usuelle et de la loi de composition externe définie par $\lambda.x = \lambda^{-1}x$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, est un $\mathbb{R}_+^*$-espace topologique.

Soit $(D(\mathbb{R}),+)$ le groupe des fonctions réelles, indéfiniment dérivables et à support compact sur $\mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes. $D(\mathbb{R})$ muni de l'opération externe définie par

$$\lambda.\varphi : x \to \varphi(\lambda x)$$

pour $\varphi \in D(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, est un $\mathbb{R}_+^*$-espace topologique. Soit

$$\begin{cases} H(x) = 1 & \text{pour } x \in \mathbb{R}_+ \,, \\ H(x) = 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}_-^* \,; \end{cases}$$

$< H, \lambda.\varphi > = \int_0^{+\infty} \varphi(\lambda x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lambda^{-1}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \lambda. < H, \varphi >$. Donc H est une application $\mathbb{R}_+^*$-linéaire de $D(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

3. Théorème du graphe fermé

On suppose dans tout ce qui suit que les G-espaces considérés sont séparés et qu'il existe une suite $(\lambda_n)_n$ d'éléments dans G qui converge vers un élément $\lambda_0 \in G$ telle que les applications $\lambda_n - \lambda_0$, $n \in \mathbb{N}$, soient bicontinues. Ces hypothèses nous permettent de donner un recouvrement à tout G-espace E sous la forme :

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\lambda_n - \lambda_0)^{-1}(A)$$

où A est une partie absorbante (par exemple un voisinage de 0).

3.1. Cas des G-espaces métrisables complets.

Le résultat suivant étend le théorème de S. Banach, la version classique du théorème du graphe fermé, connu dans la théorie des espaces vectoriels topologiques :

Théorème 1. *Soient E et F deux G-espaces topologiques métrisables complets. Si T est une application G-linéaire de E dans F à graphe fermé alors T est continue.*

Preuve. Soit $(U_n)_n$ (resp. $(V_n)_n$) un système fondamental de voisinages de l'origine dans E (resp. F), tels que V_n soit fermé symétrique et $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$. On pose $A_n = T^{-1}(V_n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(i) L'intérieur de $\overline{A_n}$ est non vide, $\forall n \in \mathbb{N}$: Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Pour $x \in E$, $T(x)$ est absorbé par V_n. D'où il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(\lambda_{i_0} - \lambda_0)T(x) \in V_n$. Ainsi $T((\lambda_{i_0} - \lambda_0)x) \in V_n$ et $(\lambda_{i_0} - \lambda_0)x \in A_n$. Ce qui donne $E = \cup_i(\lambda_i - \lambda_0)^{-1}(A_n)$. E est métrisable complet donc il est de Baire. Il existe alors $i \in \mathbb{N}$ tel que l'adhérence de $(\lambda_i - \lambda_0)^{-1}(A_n)$ est d'intérieur non vide. Soit O un ouvert non vide tel que $O \subset \overline{(\lambda_i - \lambda_0)^{-1}(A_n)} = (\lambda_i - \lambda_0)^{-1}(\overline{A_n})$. D'où $(\lambda_i - \lambda_0)(O) \subset \overline{A_n}$. Comme $(\lambda_i - \lambda_0)(O)$ est ouverte alors $\overline{A_n}$ est d'intérieur non vide.

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m_n \in \mathbb{N}$ tel que $T(U_{m_n}) \subset V_n$: Soient $x \in E$ et $U \in \vartheta(E)$ tels que $x + U \subset \overline{A_{n+2}}$. Ainsi $(x+U) - (x+U) \subset \overline{A_{n+2}} + \overline{A_{n+2}} \subset \overline{A_{n+1}}$. Donc on peut trouver un entier m_n vérifiant $U_{m_n} \subset \overline{A_{n+1}}$. Ce qui donne $U_{m_n} \subset A_{n+1} + U_{m_{n+1}}$. Soit $a_1 \in U_{m_n}$, il existe $x_1 \in A_{n+1}$ et $a_2 \in U_{m_{n+1}}$ tels que $a_1 = x_1 + a_2$. On obtient deux suites $(a_i)_i$ et $(x_i)_i$ telles que $a_i \in U_{m_{n+i-1}}$, $x_i \in A_{n+i}$ et $a_1 = \sum_{i=1}^{s} x_i + a_{s+1}$, $\forall s \in \mathbb{N}$. D'où $a_1 = \sum_i x_i$. D'autre part la suite $(\sum_{i=1}^{s} T(x_i))_s$ est de cauchy car $\sum_{i=k}^{k+s} T(x_i) \in \sum_{i=k}^{k+s} V_{n+i} \subset V_{n+k-1}$. Or F est complet et V_n fermé, donc il existe $y \in V_n$ tel que $y = \sum_{i=1}^{\infty} T(x_i)$. Et puisque G_T est fermé alors $(a_1, y) \in G_T$. D'où $T(a_1) = y$. ∎

3.2. Cas des G-espaces à réseau convergent. Dans le but de généraliser le résultat précédent, on étend les différentes notions de réseaux, connues dans la théorie des espaces vectoriels topologiques (voir par exemple [8, 11]), aux G-espaces topologiques. Soit E un G-espace topologique, pour une application $W : \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^k \to 2^E$ et $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ on note

$$W_{\varphi,k} = W(\varphi(1), \ldots, \varphi(k)), \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Définition 7. L'application W est dite un réseau dans E si les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) Les parties $W_{\varphi,k}$ sont symétriques contenant l'origine.

(ii) $\bigcup\{W_{\varphi,1} : \varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ est absorbante dans E.

(iii) Pour $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et $k \in \mathbb{N}$, tout point de $W_{\varphi,k}$ est absorbé par l'ensemble $\bigcup\{W_{\sigma,k+1} : \sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \sigma(i) = \varphi(i), \forall i = 1, \ldots, k\}$.

iv) $W_{\varphi,k+1} + W_{\varphi,k+1} \subset W_{\varphi,k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall \varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

On dit que le réseau W est compatible avec la topologie de E si pour tout $U \in \vartheta(E)$ et toute $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $W_{\varphi,n} \subset U$.

D'une manière analogue au cas des espaces vectoriels topologiques (voir [8, p. 90]), nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 1. *Pour un réseau W dans E, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *W est compatible.*

(ii) *Si $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et $(x_n)_n$ une suite dans E telle que $x_n \in W_{\varphi,n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors la suite $(\sum_{n=1}^{n=k} x_n)_k$ est de cauchy.*

(iii) *Si $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et $(x_n)_n$ une suite dans E telle que $x_n \in W_{\varphi,n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(x_n)_n$ est une suite nulle.*

Définition 8. On dit que le réseau W est convergent si pour toute suite $(x_n)_n$ et toute $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telles que $x_n \in W_{\varphi,n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_n x_n$ converge dans E.

L'exemple le plus simple d'un G-espace topologique à réseau convergent est celui d'un G-espace topologique métrisable complet. Il suffit de choisir convenablement un système fondamental de voisinages de l'origine, (U_n), et de poser $W(n_1, \ldots, n_k) = U_k$.

Exemple 3. Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{R}$. Si on considère l'opération externe définie par $\lambda.x = |\lambda|x$, pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, E sera un $\mathbb{R}$-espace topologique. De plus, si $\lambda_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $\lambda_0 = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'application $E \to E$, $x \mapsto \lambda_n.x - \lambda_0.x$, est bicontinue.

La classe des G-espaces topologiques à réseau convergent posséde des propriétés de permanence importantes.

Proposition 2. *Soit E un G-espace topologique à réseau convergent.*

(i) *S'il existe une application G-linéaire $T : E \to F$ séquentiellement continue alors F est à réseau convergent.*

(ii) *Tout G-espace quotient séparé de E est à réseau convergent.*

On obtient un réseau par $(n_1, \ldots, n_k) \to T(W(\varphi, k))$.

Théorème 2. *Soient E un G-espace topologique de Baire et F un G-espace topologique à réseau convergent. Toute application G-linéaire à graphe fermé de E dans F est continue.*

Preuve. Soient W un réseau convergent dans F et T une application G-linéaire à graphe fermé de E dans F.

(a) On montre par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $W_k = W(n_1, \ldots, n_k)$ tel que $T^{-1}(W_k)$ soit non maigre. Posons $W_0 = F$, on aura $T^{-1}(W_0) = E$ qui est un espace de Baire, donc non maigre. Supposons qu'il existe $W_{k-1} = W(n_1, \dots, n_{k-1})$ tel que $T^{-1}(W_{k-1})$ soit non maigre. W_{k-1} est absorbé par l'ensemble $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} W(n_1, \dots, n_{k-1}, n)$ donc on peut écrire :

$$W_{k-1} = \bigcup_{i,n\in\mathbb{N}} (\lambda_i - \lambda_0)^{-1}(W(n_1, \dots, n_{k-1}, n)),$$

Soit $n_k \in \mathbb{N}$ tel que $W_k = W(n_1, \dots, n_{k-1}, n_k)$ et $T^{-1}(W_k)$ non maigre.

La suite de la preuve est similaire aux étapes (b) et (c) de la démonstration du théorème [8, pp. 92 – 93] dans le cas des espaces vectoriels topologiques. ∎

Corollaire 1. *Toute application G-linéaire à graphe fermé d'un G-espace topologique métrisable complet dans un G-espace topologique à réseau convergent est continue.*

Corollaire 2. *Si E est limite inductive topologique d'une famille de G-espaces topologiques de Baire et F un G-espace topologique à réseau convergent, alors toute application G-linéaire à graphe fermé de E dans F est continue.*

Preuve. Supposons E muni d'une topologie limite inductive définie par une famille $(E_i)_i$ de G-espaces topologiques de Baire relativement aux applications $S_i : E_i \to E$. On remarque que $G_{T\circ S_i} = (S_i \times I_F)^{-1}(G_T)$, donc $T \circ S_i$ est à graphe fermé chaque fois que T est à graphe fermé. Il en résulte que $T \circ S_i$ est continue pour tout indice i. D'où T est aussi continue. ∎

Comme conséquence du théorème du graphe fermé, on obtient le résultat suivant dit théorème de l'application ouverte :

Corollaire 3. *Soient E un G-espace topologique à réseau convergent et F un G-espace topologique de Baire. Toute application G-linéaire surjective continue de E dans F est ouverte.*

Preuve. $N(T)$ le noyau de T est fermé, donc $E/N(T)$ est séparé. En vertu de la proposition 2, $E/N(T)$ est à réseau convergent. Soient φ la surjection canonique et S l'isomorphisme vérifiant $T = S \circ \varphi$. Alors S est à graphe fermé ainsi que son inverse $S^{-1} : F \to E/N(T)$, d'après le théorème 2, S^{-1} est continue. D'où T est ouverte. ∎

Références

[1] Aamri, M., Marhrani, El., Les S-anneaux et propriétés de tonnelage dans les modules topologiques, *Atti Accad. Peloritana Pericolanti Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* **67** (1991), 275 – 292.

[2] Aamri, M., Chaira, K., Propriétés de tonnelage dans les groupes topologiques et théorème du graphe fermé, *Rend. Sem. Mat. Messina Ser. II* **5** (1997), 5 – 18.

[3] Ameziane Hassani, R., Espaces de suites sur un module β et γ-dualité, *Atti Accad. Peloritana Pericolanti Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* **66** (1988), 301 – 316.

[4] Bourbaki, N., "Espaces Vectoriels Topologiques, Chapitre 1 à 5", Masson, Paris, 1981.

[5] Bourbaki, N., "Algèbre, Chapitre 1 à 3", Diffusion C.C.L.S, Paris, 1970.

[6] De Wilde, M., Réseau dans les espaces linéaires à semi-normes, Soc. Liége **18** (5) (1969), 1 – 114.

[7] De Wilde, M., Théorème du graphe fermé et espaces à réseau absorbant, *Bull. Soc. Math. Roumene* 11 (59)2, (1967), 224-238.

[8] Jarchow, H., Locally convex spaces, B.G. Teubner, Stuttgart, 1981.

[9] Mascart, H., Sur la notion de parties équilibrées d'un module topologique, *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. (5)* **50** (1964), 1143 – 1150.

[10] Mascart, H., Les modules topologiques, résultats récents, *Rev. Acad. Cienc. Zaragoza (2)* **22** (1967), 189 – 203.

[11] Robertson, W., On the closed graph therorem and spaces with webs, *Proc. London Math. Soc.* **24** (1972), 692 – 738.

[12] Ruess, W., Closed graph theorems for generalized inductive limit topologies, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **82** (1977), 67 – 83.

[13] Warner, S., "Topological Rings", North-Holland Math. Stud. 178, Amsterdam, 1993.