

Expression de la Différentielle d_3 de la Suite Spectrale de Hochschild-Serre en Cohomologie Bornée Réelle

A. BOUARICH

*Université Sultan Moulay Slimane, Faculté des Sciences et Techniques,
B.P. 523, Beni Mellal, Maroc/Morocco
bouarich1@yahoo.fr or bouarich@fstbm.ac.ma*

Presented by A. Martínez Cegarra

Received November 26, 2007*

Abstract: For discrete groups, we construct two bounded cohomology classes with coefficients in the second space of the reduced real ℓ_1 -homology. Precisely, we associate to any discrete group G a bounded cohomology class of degree two noted $\mathfrak{g}_2 \in H_b^2(G, \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}))$. For G and Π groups and $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(C)$ any homomorphism we associate a bounded cohomology class of degree three noted $[\theta] \in H_b^3(\Pi, \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}))$. When the outer homomorphism $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(C)$ induces an extension of G by Π we show that the class \mathfrak{g}_2 is Π -invariant and that the differential d_3 of Hochschild-Serre spectral sequence sends the class \mathfrak{g}_2 on the class $[\theta] : d_3(\mathfrak{g}_2) = [\theta]$. Moreover, we show that for any integer $n \geq 0$ the differential $d_3 : E_3^{n,2} \rightarrow E_3^{n+3,0}$ of Hochschild-Serre spectral sequence in real bounded cohomology is given as a cup-product by the class $[\theta]$.

Key words: Cohomology of groups, ℓ_1 -homology of groups, bounded cohomology of groups, spectral sequences, Banach spaces.

AMS *Subject Class.* (2010): 20J06, 55T05, 46A22

1. INTRODUCTION

1.1. MOTIVATION. Soit G un groupe discret et $C_b^n(G; \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des n -cochaînes bornées non homogènes, $c : G^n \rightarrow \mathbb{R}$. La différentielle de degré $n \geq 0$ d'une n -cochaîne c est définie par,

1. Pour $n \geq 1$ et pour tout $(g_0, g_1, \dots, g_n) \in G^{n+1}$ on pose,

$$\begin{aligned} d_n c(g_0, g_1, \dots, g_n) &= c(g_1, \dots, g_n) \\ &+ \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^i c(g_0, g_1, \dots, g_{i-1} g_i, g_{i+1}, \dots, g_n) \\ &+ (-1)^{n-1} c(g_0, g_1, \dots, g_{n-1}). \end{aligned}$$

*Conditionally accepted for publication on October 31, 2008. Final acceptance on December 1, 2010.

2. $d_0 : C_b^0(G, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est l'application nulle.

L'homologie du complexe différentiel $(C_b^*(G; \mathbb{R}), d_*)$ s'appelle la cohomologie bornée réelle du groupe G au sens de Gromov (cf. [15]) et est notée $H_b^*(G, \mathbb{R})$.

Dans [3] et [4], en adaptant au contexte de cohomologie bornée réelle les méthodes de construction du deuxième et du troisième groupe de cohomologie ordinaire d'un groupe G à la donnée d'une extension de groupes discrets $1 \rightarrow G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \rightarrow 1$ nous avons associé la suite exacte à quatre termes,

$$0 \longrightarrow H_b^2(\Pi, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sigma_b} H_b^2(\Gamma, \mathbb{R}) \xrightarrow{i_b} H_b^2(G, \mathbb{R})^\Pi \xrightarrow{\delta} H_b^3(\Pi, \mathbb{R}) \quad (1)$$

dans laquelle l'homomorphisme $H_b^2(G, \mathbb{R})^\Pi \xrightarrow{\delta} H_b^3(\Pi, \mathbb{R})$ s'appelle opérateur de transgression, et où $H_b^2(G, \mathbb{R})^\Pi$ désigne le sous-espace des classes de cohomologie bornée réelle de degré deux invariants par l'action du groupe Π qui est induite par la représentation extérieure $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(C)$ associée à l'extension $1 \rightarrow G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \rightarrow 1$.

La suite exacte (1) suggère qu'il existe une théorie des suites spectrales en cohomologie bornée. En effet, A. Noskov [23] (Voir aussi N. Monod et M. Burger [21]) a prouvé qu'on peut associer à une extension de groupes discrets $1 \rightarrow G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \rightarrow 1$ une suite spectrale de Hochschild-Serre en cohomologie bornée réelle $(E_r^{p,q}, d_r)$ qui converge vers la cohomologie bornée réelle du groupe Γ . Cependant, pour expliciter le second terme $E_2^{p,q}$, A. Noskov a stipulé dans [23] que les espaces de cohomologie bornée $H_b^q(G, \mathbb{R})$ soient des espaces de Banach (voir aussi [21] cf. pr. 4.2.2 p. 264), or cette hypothèse n'est pas toujours remplie quand la dimension de l'espace vectoriel réelle $H_b^q(G, \mathbb{R})$ est infinie [24].

Dans [6], pour contourner l'hypothèse demandée par [23] et [21], nous sommes placés dans la catégorie des espaces vectoriels réels semi-normés pour prouver que tout complexe différentiel (K^*, d_*) qui est muni d'une filtration positive décroissante régulière induit une suite spectrale convergente $(E_r^{*,*}, d_r^{*,*})$ dont les termes sont des espaces vectoriels semi-normés identifiés à une bijection linéaire continue près (cf. 3.2.1). Ainsi, par exemple, à une extension de groupes discrets $1 \rightarrow G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \rightarrow 1$ nous pouvons associer une suite spectrale de Hochschild-Serre $(E_r^{p,q}, d_r)$ dont les termes sont des espaces vectoriels semi-normés et qui converge vers la cohomologie bornée réelle $H_b^{p+q}(\Gamma, \mathbb{R})$. De plus, il existe une bijection canonique continue, non nécessairement bicontinue, qui est définie sur le second terme $E_2^{p,q}$ à valeurs dans l'espace vectoriel réel semi-normé $H_b^p(\Pi, H_b^q(G, \mathbb{R}))$ de la cohomologie

bornée avec coefficients ; ceci même si l'espace vectoriel semi-normé $H_b^q(G, \mathbb{R})$ n'est pas séparé (cf. 3.2.2).

En conséquence de ce résultat nous pouvons associer à toute extension de groupes discrets $1 \rightarrow G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \rightarrow 1$ la suite exacte à cinq termes (cf. [23], [21] et [6]) :

$$0 \rightarrow H_b^2(\Pi, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sigma_b} H_b^2(\Gamma, \mathbb{R}) \xrightarrow{i_b} H_b^2(G, \mathbb{R})^\Pi \xrightarrow{d_3} H_b^3(\Pi, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sigma_b} H_b^3(\Gamma, \mathbb{R}) \quad (2)$$

qui diffère de la suite exacte (1) par le terme supplémentaire $H_b^3(\Gamma, \mathbb{R})$ et au lieu de l'opérateur de transgression $\delta : H_b^2(G, \mathbb{R})^\Pi \rightarrow H_b^3(\Pi, \mathbb{R})$ nous avons la différentielle $d_3 : E_3^{0,2} = H_b^2(G, \mathbb{R})^\Pi \rightarrow E_3^{3,0} = H_b^3(\Pi, \mathbb{R})$. Ainsi, suite à ces remarques, on se propose dans ce travail de comparer les deux opérateurs $\delta : E_3^{0,2} \rightarrow E_3^{3,0}$ et $d_3 : E_3^{0,2} \rightarrow E_3^{3,0}$ en suivant le plan que nous décrivons dans le prochain paragraphe.

1.2. PRÉSENTATION DES RÉSULTATS. Dans la section 2, nous étudions la notion d'homologie ℓ_1 d'un groupe discret G à coefficients dans un G -module de Banach V . Les espaces d'homologie ℓ_1 seront notés $H_*^{\ell_1}(G, V)$ tandis que les espaces de Banach d'homologie ℓ_1 -réduite seront notés $\overline{H}_*^{\ell_1}(G, V)$.

Afin de rendre le contenu de l'article auto suffisant, nous allons consacrer la section 3 à un bref rappel sur quelques éléments de la cohomologie bornée utiles pour ce travail. Plus précisément, nous rappelons la notion de la cohomologie bornée d'un groupe discret à coefficients dans un module de Banach V (cf. [6], [15] et [22]), nous décrivons la construction des termes d'une suite spectrale $(E_r^{p,q}, d_r^{p,q})$ et nous expliquerons aussi la relation entre les quasi-morphismes et les 2-cocycles bornés réels. Ensuite, nous démontrerons notre premier résultat principal :

THÉORÈME PRINCIPAL A. *Pour tout groupe discret G il existe une unique classe de cohomologie bornée à coefficients triviaux notée, $\mathfrak{g}_2 \in H_b^2(G, \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}))$, qui possède les deux propriétés suivantes :*

1. \mathfrak{g}_2 est nulle si et seulement si le second groupe de cohomologie bornée $H_b^2(G, \mathbb{R})$ est nul.
2. Pour toute classe de cohomologie bornée réelle $x \in H_b^2(G, \mathbb{R})$ on a la relation,

$$x \cup \mathfrak{g}_2 = x$$

où le cup-produit \cup est défini par l'entrelacement naturel (dualité) entre les espaces de Banach $H_b^2(G, \mathbb{R})$ et $\overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$.

Dans la section 4, à partir d'une représentation extérieure $\theta: \Pi \rightarrow \text{Out}(C)$ nous construisons une classe de cohomologie bornée de degré trois notée $[\theta] \in H_b^3(\Pi, \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}))$, où l'action du groupe Π sur $\overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ est celle induite par la représentation extérieure θ .

Pour construire la classe de cohomologie bornée avec coefficients, $[\theta] \in H_b^3(\Pi, \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}))$, nous avons adapté au contexte de la cohomologie bornée avec coefficients les méthodes permettant la construction d'une classe de cohomologie ordinaire de degré trois à partir de la représentation extérieure $\theta: \Pi \rightarrow \text{Out}(C)$ (cf. [17] et [10]).

Dans la section 5, en supposant que la représentation extérieure $\theta: \Pi \rightarrow \text{Out}(C)$ est induite par une extension de groupes discrets $1 \rightarrow G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \rightarrow 1$ nous démontrons que la classe de cohomologie bornée $\mathfrak{g}_2 \in H_b^2(G, \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}))$ est Π -invariante. Il résulte de cette invariance que \mathfrak{g}_2 définit un élément de $E_3^{0,2} = H_b^2(G, \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}))^\Pi$. Par ailleurs, en remarquant que la classe de cohomologie $[\theta]$ définit un élément du terme $E_3^{3,0}$ nous démontrons le théorème suivant :

THÉORÈME PRINCIPAL B. *La différentielle $d_3: E_3^{0,2} \rightarrow E_3^{3,0}$ de la suite spectrale de Hochschild-Serre associée à l'extension de groupes discrets $1 \rightarrow G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \rightarrow 1$ en cohomologie bornée à coefficients dans le Π -module de Banach $\overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ envoie la classe \mathfrak{g}_2 sur la classe $[\theta]$.*

Ensuite, grâce au résultat du théorème principal B nous démontrons le théorème suivant qui donne l'expression explicite de la différentielle d_3 en fonction de la classe de cohomologie bornée $[\theta]$.

THÉORÈME PRINCIPAL C. *Soit $\theta: \Pi \rightarrow \text{Out}(C)$ une représentation extérieure induite par une extension de groupes discrets $1 \rightarrow G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \rightarrow 1$ et soit $[\theta] \in H_b^3(\Pi, \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}))$ la classe de cohomologie bornée associée à θ . Alors, pour tout entier $n \geq 0$ la différentielle $d_3: E_3^{n,2} \rightarrow E_3^{n+3,0}$ de la suite spectrale de Hochschild-Serre en cohomologie bornée réelle est donnée par l'expression :*

$$d_3(x) = (-1)^n x \cup [\theta], \quad \forall x \in E_3^{n,2}.$$

En utilisant l'expression explicite de l'opérateur de transgression $\delta: H_b^2(G, \mathbb{R})^\Pi \rightarrow H_b^3(\Pi, \mathbb{R})$, rappelée ci-dessous à la suite du corollaire 4 de la section 4.3, nous déduisons le :

COROLLAIRE A. L'opérateur de transgression $\delta : H_b^2(G, \mathbb{R})^\Pi \rightarrow H_b^3(\Pi, \mathbb{R})$ associé à l'extension $1 \rightarrow G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \rightarrow 1$ est égal à la différentielle $d_3 : E_3^{0,2} \rightarrow E_3^{3,0}$.

Le résultat du théorème principal C nous permet aussi de déduire le :

COROLLAIRE B. Si la classe de cohomologie bornée $[\theta] \in H_b^3(\Pi, \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}))$ est nulle, alors l'opérateur $0 \rightarrow H_b^3(\Pi, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sigma_b} H_b^3(\Gamma, \mathbb{R})$ est injectif.

Enfin, notons que le résultat du corollaire B nous suggère les deux questions suivantes :

QUESTION 1. La classe $[\theta]$ est-elle une obstruction à l'exactitude à gauche du foncteur de cohomologie bornée réelle $H_b^3(-, \mathbb{R})$? C'est-à-dire, si un homomorphisme surjectif $\sigma : \Gamma \rightarrow \Pi$ induit un opérateur injectif $H_b^3(\Pi, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sigma_b} H_b^3(\Gamma, \mathbb{R})$; la classe $[\theta] \in H_b^3(\Pi, \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}))$ est-elle nulle ?

QUESTION 2. La classe $[\theta] \in H_b^3(\Pi, \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}))$ est-elle triviale lorsque $\theta(\Pi) \subset \text{Out}(C)$ est moyennable ? En effet, dans [5], nous avons démontré que si l'image de la représentation extérieure $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(C)$ est moyennable alors pour tout entier $n \geq 0$ l'opérateur $\sigma_b : H_b^n(\Pi, \mathbb{R}) \rightarrow H_b^n(\Gamma, \mathbb{R})$ est injectif.

2. HOMOLOGIE ℓ_1 D'UN GROUPE DISCRET

2.1. G -MODULES DE BANACH RELATIVEMENT PROJECTIFS. Soient G un groupe discret et E un espace de Banach. On dira que E est un G -module de Banach s'il est muni d'une action du groupe G telle que chaque élément $g \in G$ induit un opérateur linéaire borné $g : E \rightarrow E$ de norme $\|g\| \leq 1$. On notera par $g.v$ l'action de g sur un élément v de E .

Les G -modules de Banach constituent une catégorie dont les G -morphismes sont tous les opérateurs linéaires continus $f : E \rightarrow F$ qui sont G -équivalents,

$$f(g \cdot x) = g \cdot f(x), \quad \forall x \in E, \forall g \in G.$$

À un G -module de Banach E on associe un sous-espace vectoriel de vecteurs G -invariants $E^G := \{v \in E ; g \cdot v = v \forall g \in G\}$ et un espace quotient de Banach de vecteurs G -coinvariants $E_G := \frac{E}{\overline{E}(G)}$; où $\overline{E}(G)$ désigne l'adhérence du sous-espace vectoriel de E engendré par tous les vecteurs $g \cdot v - v$ avec $g \in G$ et $v \in E$.

Notons que si on se donne deux G -modules de Banach E et F on définit une structure de G -module de Banach sur leur produit tensoriel projectif complété $E \widehat{\otimes} F$ (cf. [13]) en posant :

$$g \cdot (x \otimes y) := g \cdot x \otimes g^{-1} \cdot y, \quad \forall g \in G, x \in E, y \in F.$$

L'espace de Banach des vecteurs G -coinvariants du G -module de Banach $E \widehat{\otimes} F$ sera désigné par l'expression, $E \widehat{\otimes}_G F := (E \widehat{\otimes} F)_G$.

Soient E et X deux G -modules de Banach. On dira qu'un G -morphisme surjectif $p : E \rightarrow X$ est admissible s'il existe un opérateur linéaire continu $r \in \mathcal{L}(X, E)$, non nécessairement G -équivariant, tel que $p \circ r = id_X$. De même, on dira qu'un G -module de Banach V est relativement projectif si pour tout G -morphisme surjectif admissible $E \begin{smallmatrix} \xrightarrow{p} \\ \xleftarrow{r} \end{smallmatrix} X \longrightarrow 0$ et pour tout G -morphisme $\alpha : V \rightarrow X$ il existe au moins un G -morphisme $\beta : V \rightarrow E$ tel que $p \circ \beta = \alpha$,

$$\begin{array}{ccc} & & V \\ & \beta \swarrow & \downarrow \alpha \\ E & \begin{smallmatrix} \xrightarrow{p} \\ \xleftarrow{r} \end{smallmatrix} & X \longrightarrow 0. \end{array}$$

Étant donné un groupe discret G , on désigne par $C_n^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ le complété de l'espace vectoriel des n -chaînes réelles $C_n(G, \mathbb{R}) := \mathbb{R}[G^n]$ qui est engendré par les éléments de l'ensemble G^n et est muni par la norme ℓ^1 ,

$$\text{si } z = \sum_{i=1}^{i=m} a_i(g_1^i, \dots, g_n^i) \in \mathbb{R}[G^n] \quad \text{on pose} \quad \|z\|_1 = \sum_{i=1}^{i=m} |a_i| \in \mathbb{R}^+. \quad (3)$$

Sur l'espace de Banach $C_n^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ nous avons une structure de G -module de Banach naturelle définie par la G -action suivante,

$$g \cdot (g_1, \dots, g_n) := (gg_1, \dots, gg_n), \quad \forall g, g_1, \dots, g_n \in G.$$

LEMME 1. *Pour tout groupe discret G et pour tout G -module de Banach V , le produit tensoriel projectif complété $C_n^{\ell_1}(G, \mathbb{R}) \widehat{\otimes} V$ est un G -module de Banach relativement projectif.*

Démonstration. Puisque pour tout couple d'entiers naturels $m \geq 1$ et $n \geq 1$ les espaces de Banach $C_m^{\ell_1}(G, \mathbb{R}) \widehat{\otimes} C_n^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ et $C_{m+n}^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ sont canoniquement isomorphes, il suffit de démontrer le lemme pour $n = 1$.

Soit $E \begin{smallmatrix} \xrightarrow{p} \\ \xleftarrow{r} \end{smallmatrix} X \longrightarrow 0$ un G -morphisme surjectif admissible. Pour tout G -morphisme $\alpha : C_1^{\ell_1}(G, \mathbb{R}) \widehat{\otimes} V \rightarrow X$ et pour tous $g \in G$ et $v \in V$ posons

$$\beta(g \otimes v) = g \cdot r(g^{-1} \cdot \alpha(g \otimes v)).$$

Les opérateurs α et p étant G -équivariants, l'opérateur continu

$$\beta : C_1^{\ell_1}(G, \mathbb{R}) \widehat{\otimes} V \rightarrow E$$

vérifie l'identité $p \circ \beta = \alpha$. De plus, comme pour tous les éléments g et $h \in G$ et pour tout vecteur $v \in V$ on a,

$$\begin{aligned} h \cdot \beta(h^{-1} \cdot (g \otimes v)) &= h \cdot \beta(h^{-1}g \otimes h \cdot v) \\ &= h \cdot [h^{-1}g \cdot r(g^{-1}h \cdot \alpha(h^{-1}g \otimes h \cdot v))] \\ &= g \cdot r(g^{-1}h \cdot \alpha(h^{-1} \cdot (g \otimes v))) \\ &= g \cdot r(g^{-1} \cdot \alpha(g \otimes v)) \\ &= \beta(g \otimes v) \end{aligned}$$

on en déduit que l'opérateur continu $\beta : C_1^{\ell_1}(G, \mathbb{R}) \widehat{\otimes} V \rightarrow E$ est G -équivariant. Par suite, le G -module de Banach $C_1^{\ell_1}(G, \mathbb{R}) \widehat{\otimes} V$ est relativement projectif. ■

2.2. RÉOLUTIONS RELATIVEMENT PROJECTIVES. Soit V un G -module de Banach. On appelle G -résolution homologique de V dans la catégorie relative des G -modules de Banach la donnée d'un complexe différentiel (K_*, d_*) ,

$$\cdots \rightarrow K_3 \xrightarrow{d_3} K_2 \xrightarrow{d_2} K_1 \xrightarrow{d_1} K_0 \xrightarrow{d_0=\varepsilon} V \longrightarrow 0.$$

dont les flèches sont exactes (i.e. $Imd_{n+1} = Kerd_n$) et dont les termes K_n sont des G -modules de Banach. On rappelle que le complexe différentiel (K_*, d_*) possède une homotopie contractante s'il existe une suite d'opérateurs continus $s_n : K_n \rightarrow K_{n+1}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, s_{n-1} \circ d_n + d_{n+1} \circ s_n = id_{K_n}$, $d_1 \circ s_0 = id_{K_0}$ et tel que la norme $\|s_n\| \leq 1$,

$$\cdots \rightarrow K_3 \begin{smallmatrix} \xrightarrow{d_3} \\ \xleftarrow{s_2} \end{smallmatrix} K_2 \begin{smallmatrix} \xrightarrow{d_2} \\ \xleftarrow{s_1} \end{smallmatrix} K_1 \begin{smallmatrix} \xrightarrow{d_1} \\ \xleftarrow{s_0} \end{smallmatrix} K_0 \xrightarrow{d_0=\varepsilon} V \longrightarrow 0.$$

Quand une G -résolution homologique (K_*, d_*) d'un G -module de Banach V possède une homotopie contractante $s_* : K_* \rightarrow K_{*+1}$ on dira que (K_*, d_*, s_*) est une résolution homologique forte du G -module de Banach V .

Dans ce qui va suivre on va se servir du lemme 1 pour associer à chaque G -module de Banach une résolution relativement projective forte.

D'abord, notons que lorsque le groupe G agit trivialement sur \mathbb{R} , vue comme espace de Banach, le lemme 1 permet de voir que pour tout entier $n \geq 0$ l'espace de Banach des n -chaînes non normalisées

$$C_{n,0}^{\ell_1}(G, \mathbb{R}) := C_{n+1}^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$$

est un G -module de Banach relativement projectif. En fait, si on considère la suite d'opérateurs différentiels continus de degré -1 ,

$$\partial_n = \sum_{i=0}^{i=n+1} (-1)^i d_i : C_n^{\ell_1}(G, \mathbb{R}) \rightarrow C_{n-1}^{\ell_1}(G, \mathbb{R}),$$

où $d_i(g_0, g_1, \dots, g_n) = (g_0, \dots, \widehat{g}_i, \dots, g_n)$, on obtient une G -résolution forte $(C_{*,0}^{\ell_1}(G, \mathbb{R}), \partial_*)$ de \mathbb{R} . De plus, si pour tout entier $n \geq 0$ on pose $s_n(g_0, \dots, g_n) = (1, g_0, \dots, g_n)$ on définit ainsi une homotopie contractante qui rend le complexe différentiel des G -modules de Banach $(C_{*,0}^{\ell_1}(G, \mathbb{R}), \partial_*, s_*)$ une résolution homologique forte de l'espace de Banach \mathbb{R} qui s'appelle la bar résolution du groupe G par les chaînes non normalisées.

Dans le cas d'un G -module de Banach V quelconque, une résolution homologique forte peut être construite de la manière suivante.

Soient E, F et V des espaces de Banach et $q : F \rightarrow Q$ un opérateur linéaire continu surjectif. D'après le théorème de l'application ouverte (cf. [9] et [25]), l'opérateur linéaire $q \widehat{\otimes} V : E \widehat{\otimes} V \rightarrow Q \widehat{\otimes} V$ qui est obtenu en tensorisant l'opérateur q par l'espace de Banach V est lui même continu et surjectif. De même, le théorème l'application ouverte permet de déduire l'identification : $\text{Ker}(q \widehat{\otimes} V) \simeq \text{Ker}(q) \widehat{\otimes} V$ (cf. prop. 3 de [13] page 38). En conséquence de ces remarques, on conclut que le foncteur de tensorisation $-\widehat{\otimes} V$ préserve les suites exactes dans la catégorie des espaces de Banach. D'où la :

PROPOSITION 1. *Soient G un groupe discret et V un G -module de Banach. Alors, le complexe différentiel $(C_{*,0}^{\ell_1}(G, \mathbb{R}) \widehat{\otimes} V, \partial_*, s_*)$ qui est obtenu en tensorisant la bar résolution $(C_{*,0}^{\ell_1}(G, \mathbb{R}), \partial_n, s_n)$ du groupe G par le G -module de Banach V est une résolution forte relativement projective de V .*

Le lemme suivant nous montre que toutes les résolutions fortes relativement projectives d'un G -module de Banach donné sont homotopiquement équivalentes. Sa preuve sera omise, car, elle est analogue au cas classique (cf. [14] et [17]).

LEMME 2. Soient (U_*, d_*, s_*) une résolution homologique forte de G -modules de Banach et (V_*, d_*) un complexe différentiel homologique de G -modules de Banach relativement projectifs. Alors, tout G -morphisme continu $u : V_{-1} \rightarrow U_{-1}$ se prolonge en un morphisme $u_* : V_* \rightarrow U_*$ de complexes différentiels de G -modules de Banach unique à homotopie près.

2.3. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DE L'HOMOLOGIE ℓ_1 .

DÉFINITION 1. Soient V un G -module de Banach et (P_*, d_*) une résolution homologique forte relativement projective de V . Les groupes d'homologie du sous-complexe différentiel des vecteurs G -coinvariants $(P_*)_G$ s'appellent espaces de ℓ_1 -homologie du groupe G à coefficients dans le G -module de Banach V et se notent $H_*^{\ell_1}(G, V) := H_*((P_*)_G)$.

D'après le lemme 2 on sait que toutes les résolutions fortes relativement projectives d'un G -module de Banach V sont homotopiquement équivalentes. Donc, les espaces d'homologie $H_*^{\ell_1}(G, V)$ ne dépendent pas de la résolution relativement projective choisie. En particulier, si on prend la bar résolution $(C_{*,0}^{\ell_1}(G, \mathbb{R}) \widehat{\otimes} V, \partial_*, s_*)$ associée au groupe G on obtient un isomorphisme canonique :

$$H_n^{\ell_1}(G, V) \simeq H_n(C_{*,0}^{\ell_1}(G, \mathbb{R}) \widehat{\otimes}_G V, \partial_*) \tag{4}$$

où ∂_n désigne l'opérateur différentiel du complexe des n -chaînes normalisées de type ℓ_1 ,

$$C_{n+1,0}^{\ell_1}(G, \mathbb{R}) \widehat{\otimes}_G V \simeq C_n^{\ell_1}(G, \mathbb{R}) \widehat{\otimes} V$$

dont l'expression explicite est donnée pour tout

$$[g_1 \mid \cdots \mid g_n] \otimes v \in C_n^{\ell_1}(G, \mathbb{R}) \widehat{\otimes} V$$

par :

$$\begin{aligned} \partial_n([g_1 \mid \cdots \mid g_n] \otimes v) &= [g_2 \mid \cdots \mid g_n] \otimes g_1 \cdot v - [g_1 g_2 \mid \cdots \mid g_n] \otimes v \\ &\quad + \cdots + (-1)^n [g_1 \mid \cdots \mid g_{n-1}] \otimes v. \end{aligned}$$

Maintenant, grâce à l'isomorphisme (4) on voit aisément que le groupe $H_0^{\ell_1}(G, V) = V_G$. De même, si on suppose que le groupe G agit trivialement sur l'espace de Banach V on en déduit que le groupe $H_1^{\ell_1}(G, V) = 0$ (cf. [20]). En effet, si pour tous les éléments $g \in G$ et $v \in V$ on pose,

$$\mathbf{m}(g, v) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} [g^{2^{n-1}} \mid g^{2^{n-1}}] \otimes v \in C_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}) \widehat{\otimes} V \tag{5}$$

on obtient une 2-chaîne normalisée dont le bord est égal à $\partial_2(\mathbf{m}(g, v)) = [g] \otimes v \in B_1^{\ell_1}(G, V)$.

Rappelons aussi que puisque l'image d'un opérateur linéaire continu n'est pas en général fermée ceci implique que la restriction de la norme ℓ_1 sur l'espace des ℓ_1 -cycles $Z_n^{\ell_1}(G, V)$ peut dégénérer sur le quotient,

$$\frac{Z_n^{\ell_1}(G, V)}{B_n^{\ell_1}(G, V)} = H_n^{\ell_1}(G, V).$$

En effet, S. Soma a construit des exemples de variétés de dimension trois M^3 pour lesquelles la semi-norme $\|\cdot\|_1$ induite sur l'espace $H_2^{\ell_1}(M, \mathbb{R})$ dégénère (cf. [24]).

DÉFINITION 2. Le groupe quotient de l'espace $H_n^{\ell_1}(G, V)$ par le noyau $\text{Ker}(\|\cdot\|_1)$ s'appelle groupe d'homologie ℓ_1 -réduite du groupe G à coefficients dans le G -module de Banach V et se note $\overline{H}_n^{\ell_1}(G, V)$.

Pour finir cette section nous donnerons deux résultats classiques qui concernent l'action d'un groupe discret sur ses propres espaces de ℓ_1 -homologie.

PROPOSITION 2. Soit V un G -module de Banach. Alors, pour tout entier $n \geq 0$ et pour tout élément $g \in G$ l'automorphisme intérieur $i_g : G \rightarrow G$ induit l'application identique sur l'espace d'homologie $H_n^{\ell_1}(G, V)$ (resp. $\overline{H}_n^{\ell_1}(G, V)$).

Démonstration. Soient V un G -module de Banach et (P_n^*, ∂_*, s_*) une résolution homo-logique forte relativement projective de V . Pour chaque $g_0 \in G$ et $n \in \mathbb{N}$ posons pour tout vecteur $v_n \in P_n$, $U_n(v_n) = g_0 \cdot v_n$. Ainsi, puisque les morphismes $U_n : P_n \rightarrow P_n$ vérifient les deux relations,

$$U_n(g \cdot v_n) = i_{g_0}(g) \cdot U_n(v_n) \quad \text{et} \quad U_n(v_n) = v_n + (g_0 \cdot v_n - v_n), \quad \forall v_n \in P_n, \forall g \in G$$

on en déduit que U_n induit l'identité sur l'espace des vecteurs G -coinvariants $(P_n)_G$. Par conséquent, l'automorphisme intérieur $i_{g_0} : G \rightarrow G$ induit l'application identique sur les groupes d'homologie $H_n((P_n)_G) = H_n^{\ell_1}(G, V)$. ■

COROLLAIRE 1. Soit Γ un groupe discret et G sous-groupe normal de Γ . Alors, la conjugaison dans le groupe Γ induit une action naturelle du groupe quotient $\frac{\Gamma}{G}$ sur les espaces d'homologie $H_*^{\ell_1}(G, V)$ (resp. $\overline{H}_*^{\ell_1}(G, V)$).

3. COHOMOLOGIE BORNÉE D'UN GROUPE DISCRET

3.1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS. Étant donné un G -module de Banach V , pour tout entier $n \geq 0$ on désigne par $C_b^n(G, V)$ l'espace de Banach des n -cochaînes non homogènes bornées $f : G^n \rightarrow V$. C'est-à-dire, il existe un réel $k > 0$ tel que la norme ℓ_∞ ,

$$\| f \|_\infty = \sup\{\| f(g_1, \dots, g_n) \| : g_1, \dots, g_n \in G\} \leq k.$$

Notons que la norme $\| \cdot \|_\infty$ permet de voir que l'espace $C_b^n(G, V)$ est isomorphe à l'espace de Banach des opérateurs linéaires continus $\mathcal{L}(\mathbb{R}[G^n], V)$.

Sur le complexe des cochaînes bornées non homogènes $C_b^*(G, V)$ on définit une différentielle $d_n : C_b^n(G, V) \rightarrow C_b^{n+1}(G, V)$ par l'expression,

$$\begin{aligned} d_n(f)(g_1, \dots, g_{n+1}) &= g_1 \cdot f(g_2, \dots, g_{n+1}) \\ &+ \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^i f(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1} f(g_1, \dots, g_n). \end{aligned}$$

Les groupes quotient $H_b^n(G, V) := \frac{\text{Ker}(d_n)}{\text{Im}(d_{n-1})}$ s'appellent espaces de cohomologie bornée du groupe G à valeurs dans le G -module de Banach V . Notons qu'on a $H_b^0(G, V) = V^G$ et que

$$H_b^1(G, V) = \frac{\{f \in C_b^1(G, V) \mid f(g_1 g_2) = g_1 \cdot f(g_2) + f(g_1), \forall g_1, g_2 \in G\}}{\{f \in C_b^1(G, V) \mid \exists v \in V, \forall g \in G, f(g) = g \cdot v - v\}}.$$

En particulier, quand le groupe G agit trivialement sur l'espace vectoriel réel V on voit qu'on a $H_b^1(G, V) = 0$ puisque $\{0\}$ est le seul sous-groupe additif borné dans V . Notons aussi que la norme $\| \cdot \|_\infty$ définie sur les espaces $C_b^n(G, V)$ induit une semi-norme sur les espaces de cohomologie bornée $H_b^n(G, V)$. Quand le groupe G agit trivialement sur $V = \mathbb{R}, \mathbb{N}$, Ivanov a démontré que $H_b^2(G, \mathbb{R})$ est un espace de Banach (cf. [16]).

Les groupes de cohomologie bornée $H_b^n(G, V)$ peuvent être définis à partir du sous-complexe différentiel des cochaînes homogènes G -invariantes,

$$(C_{b,0}^n(G, V))^G := (\mathcal{L}(\mathbb{R}[G^{n+1}], V))^G \simeq C_b^n(G, V)$$

où la différentielle d'une n -cochaîne homogène $f : G^{n+1} \rightarrow V$ est donnée par l'expression,

$$\delta_n(f)(g_0, g_1, \dots, g_{n+1}) = \sum_{i=0}^{i=n+1} (-1)^i f(g_0, \dots, \hat{g}_i, \dots, g_{n+1}),$$

où \widehat{g}_i veut dire omettre la composante g_i .

Pour finir ce paragraphe on donnera quelques résultats utiles pour la suite de ce travail dont les démonstrations se trouvent dans l'article [15] ou [6].

PROPOSITION 3. *Soient G un groupe discret et V un G -module de Banach. Pour tout élément g_0 fixé dans le groupe G on note $i_{g_0} : G \rightarrow G$ l'automorphisme intérieur qui lui est associé. Alors l'opérateur $(i_{g_0})_b : H_b^n(G, V) \rightarrow H_b^n(G, V)$ est égal à l'identité.*

COROLLAIRE 2. *Soit Γ un groupe discret. Pour tout sous-groupe normal $G \subseteq \Gamma$ la conjugaison dans le groupe Γ induit une action isométrique du groupe quotient $\frac{\Gamma}{G}$ sur les espaces semi-normés $H_b^n(G, V)$.*

La proposition 3 et son corollaire 2 nous permettent de déduire la proposition suivante :

PROPOSITION 4. *Soit Γ un groupe discret. Pour tout sous-groupe normal $G \subseteq \Gamma$ et pour tout entier $n \geq 1$ l'injection canonique $i : G \rightarrow \Gamma$ induit un opérateur $i_b : H_b^n(\Gamma, V) \rightarrow H_b^n(G, V)$ qui prend ses valeurs dans le sous-espace des vecteurs $\frac{\Gamma}{G}$ -invariants. C'est-à-dire on a $Im(i_b) \subseteq H_b^n(G, V)^{\Gamma/G}$.*

3.2. SUITES SPECTRALES EN COHOMOLOGIE BORNÉE. Dans ce paragraphe, nous donnerons un bref rappel sur la théorie des suites spectrales développée dans la catégorie des complexes différentiels semi-normés. Ensuite, avec la donnée d'une extension de groupes discrets $1 \rightarrow G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \rightarrow 1$, nous décrirons le complexe différentiel double qui induira la suite spectrale de Hochschild-Serre en cohomologie bornée $(E_r^{p,q}, d_r^{p,q})$ dont la différentielle $d_3^{m,0} : E_3^{n,2} \rightarrow E_3^{n+3,0}$ sera explicitée dans la section 5.

3.2.1. CONSTRUCTION DES SUITES SPECTRALES. Soit (K^*, d_*) un complexe différentiel de degré +1 (i.e. cohomologique) dont le terme général K^n est un espace vectoriel réel semi-normé et $d_n : K^n \rightarrow K^{n+1}$ est un opérateur linéaire continu tel que $d_{n+1} \circ d_n = 0$.

On dira que le complexe différentiel (K^*, d_*) possède une filtration positive décroissante si pour tout entier $n \geq 0$, il existe une famille de sous-espaces vectoriels $F^p K^n \subset F^{p-1} K^n$ tels que $d_n(F^p K^n) \subset F^p K^{n+1}$ avec $F^p K^* = K^*$ si $p \leq 0$. Les termes $F^p K^n$ seront donc munis par la topologie induite.

Il est clair que les inclusions de complexes différentiels $F^p K^* \xrightarrow{j} K^*$ induisent des opérateurs linéaires continus, $j^p : H^n(F^p K^*, d_*) \rightarrow H^n(K^*, d_*)$, et que les images $F^p H^n(K^*, d_*) := \text{Im}(j^p) \subseteq H^n(K^*, d_*)$ avec $F^0 H^n(K^*, d_*) = H^n(K^*, d_*)$ définissent une filtration positive décroissante de l'espace vectoriel $H^n(K^*, d_*)$,

$$\begin{aligned} \dots &\subseteq F^{p+1} H^n(K^*, d_*) \subseteq F^p H^n(K^*, d_*) \subseteq \dots \\ &\subseteq F^1 H^n(K^*, d_*) \subseteq F^0 H^n(K^*, d_*) \end{aligned}$$

dont le nombre des termes n'est pas fini en général.

En fait, si on suppose que la filtration positive décroissante $F^p K^*$ est régulière i.e. :

$$\forall q \geq 0, \quad \exists n(q) \geq 0, \quad \forall p > n(q) \quad \implies \quad F^p K^q = 0$$

il en résulte que pour chaque entier $n \geq 0$ fixé la famille $\{F^p K^n ; p \in \mathbb{N}\}$ est finie et que par conséquent la famille décroissante de sous-espaces vectoriels $\{F^p H^n(K^*, d_*) ; p \in \mathbb{N}\}$ est finie.

Considérons un complexe différentiel (K^*, d_*) d'espaces vectoriels réels semi-normés et supposons qu'il est muni d'une filtration positive décroissante régulière notée $F^p K^*$. Pour tout entier $r \geq 0$ on définit les sous-espaces vectoriels topologiques,

- $Z_r^{p,q} = \{x \in F^p K^{p+q} \mid d_{p+q} x \in F^{p+r} K^{p+q+1}\}$;
- $B_r^{p,q} = \{x \in F^p K^{p+q} \mid \exists y \in F^{p-r} K^{p+q-1}, d_{p+q-1} y = x\}$.

Observons que par construction des sous-espaces $Z_r^{p,q}$ et $B_r^{p,q}$ on a les inclusions,

$$d_{p+q}(Z_r^{p,q}) \subset Z_r^{p+r, q-r+1}$$

et

$$d_{p+q}(Z_{r-1}^{p+1, q-1} + B_{r-1}^{p,q}) \subset Z_{r-1}^{p+1+r, q-r} + B_{r-1}^{p+r, q-r+1}.$$

Donc, si on munit l'espace vectoriel quotient

$$E_r^{p,q} = \frac{Z_r^{p,q}}{Z_{r-1}^{p+1, q-1} + B_{r-1}^{p,q}}$$

par la semi-norme de la topologie quotient on déduit que la différentielle $d_n : K^n \rightarrow K^{n+1}$ induit une famille d'opérateurs linéaires continus :

$$\begin{aligned} d_r^{p,q} : E_r^{p,q} &\longrightarrow E_r^{p+r, q-r+1} \\ [x] &\longmapsto [d_{p+q}(x)] \end{aligned}$$

de norme $\|d_r^{p,q}\| \leq \|d_{p+q}\|$ et tels que $d_r^{p+r,q-r+1} \circ d_r^{p,q} = 0$. En conséquence, pour tout entier $r \geq 0$ le couple $(E_r^{*,*}, d_r^{*,*})$ est un complexe différentiel d'espaces vectoriels réels semi-normés bi-gradués.

Au complexe différentiel filtré (K^*, d_*) on associe également les familles de sous-espaces vectoriels topologiques suivants :

- $Z_\infty^{p,q} = \{x \in F^p K^{p+q} \mid d_{p+q} x = 0\}$;
- $B_\infty^{p,q} = \{x \in F^p K^{p+q} \mid \exists y \in K^{p+q-1}, d_{p+q-1} y = x\}$;
- $E_\infty^{p,q} = \frac{Z_\infty^{p,q}}{B_\infty^{p,q} + Z_\infty^{p+1,q-1}}$ que l'on munit de la structure topologique quotient.

Avec les notations ci-dessus on obtient donc les inclusions suivantes :

$$B_0^{p,q} \subseteq \dots \subseteq B_r^{p,q} \subseteq B_{r+1}^{p,q} \subseteq \dots \subseteq B_\infty^{p,q} \subseteq Z_\infty^{p,q} \subseteq \dots \subseteq Z_{r+1}^{p,q} \subseteq Z_r^{p,q} \dots \subseteq Z_0^{p,q}$$

tel que pour $r \geq p$ on a :

$$B_\infty^{p,q} = \bigcup_{r \geq 0} B_r^{p,q} = B_r^{p,q} = B_{r+1}^{p,q} = \dots = B_\infty^{p,q}$$

et par régularité de la filtration $F^p K^*$ si on pose $r_0 = u(p+q+1) - p$ on vérifie que l'intersection :

$$\bigcap_{s \geq 0} Z_s^{p,q} = Z_{r_0}^{p,q} = Z_{r_0+1}^{p,q} = \dots = Z_\infty^{p,q}.$$

En effet, grâce à la régularité de la filtration $F^p K^*$ on déduit que la suite des sous-espaces vectoriels réels $\{E_r^{p,q} ; \forall r \in \mathbb{N}\}$ est stationnaire. C'est-à-dire, à partir d'un certain rang assez grand $r \geq 0$ on a,

$$E_r^{p,q} = E_{r+1}^{p,q} = \dots = E_\infty^{p,q}.$$

Suite à cette propriété on dira que la famille de complexes différentiels bi-gradués $(E_r^{*,*}, d_r^{*,*})$ converge vers l'aboutissement $E_\infty^{*,*}$ et on désignera ce fait par le symbole :

$$E_r^{p,q} \implies E_\infty^{p,q}.$$

Enfin, observons que puisque le sous-espace vectoriel $Z_\infty^{p,q}$ est contenu dans le sous-espace vectoriel des cocycles $\text{Ker}(d_{p+q})$ on obtient une surjection canonique continue,

$$Z_\infty^{p,q} \rightarrow \frac{F^p H^{p+q}(K^*, d_*)}{F^{p+1} H^{p+q}(K^*, d_*)}$$

dont le noyau est égal à la somme $B_\infty^{p,q} + Z_\infty^{p+1,q-1}$. Par conséquent, comme la filtration $F^p K^*$ est régulière on déduit que pour tout entier $n \geq 0$ la famille des bijections linéaires continues induites,

$$\{E_\infty^{p,n-p} := \frac{Z_\infty^{p,n-p}}{B_\infty^{p,n-p} + Z_\infty^{p+1,n-p-1}} \rightarrow \frac{F^p H^n(K^*, d_*)}{F^{p+1} H^n(K^*, d_*)} ; \forall p \in \mathbb{N}\},$$

est finie.

Avec les notations ci-dessus, pour tout complexe différentiel (K^*, d_*) qui est muni d'une filtration positive décroissante et régulière $F^p K^*$ on a les affirmations suivantes (cf. [6]) :

1. Il existe une bijection canonique continue définie sur le premier terme $E_1^{p,q}$ dans l'espace d'homologie relative $H^{p+q}(F^p K^*/F^{p+1} K^*)$ qui envoie la différentielle d_1 sur l'opérateur de bord (i.e. connexion) associé au triplet $(F^p K^*, F^{p+1} K^*, F^{p+2} K^*)$.
2. Pour chaque entier $r \geq 0$ il existe une bijection continue, $E_{r+1}^{p,q} \xrightarrow{\sim} H^{p,q}(E_r^{*,*}, d_r)$. Autrement dit, la famille de complexes différentiels bi-gradués $(E_r^{*,*}, d_r^{*,*})$ est une suite spectrale dont les termes sont des espaces vectoriels réels semi-normés.
3. Il existe une bijection continue qui envoie la somme directe topologique

$$E_\infty^n = \bigoplus_{p=0}^{p=n} E_\infty^{p,n-p} \text{ sur la somme directe topologique}$$

$$\bigoplus_{p=0}^{p=n} \frac{F^p H^n(K^*, d_*)}{F^{p+1} H^n(K^*, d_*)} \xrightarrow{\sim} H^{p+q}(K^*, d_*).$$

En conséquence, la suite spectrale $(E_r^{*,*}, d_r^{*,*})$ converge vers l'espace vectoriel de la cohomologie $H^n(K^*, d_*)$ i.e. :

$$E_r^{p,q} \implies E_\infty^{p+q} \xrightarrow{\sim} H^{p+q}(K^*, d_*).$$

3.2.2. LA SUITE SPECTRALE DE HOCHSCHILD-SERRE. La donnée d'une extension de groupes discrets $1 \rightarrow G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \rightarrow 1$ et d'un Γ -module de Banach V permet de construire un complexe différentiel double dont le terme général est défini par,

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \quad K^{p,q} := C_b^p(\Pi, U^q) \quad \text{où} \quad U^q := \mathcal{L}_G(\mathbb{R}[\Gamma^{q+1}], V).$$

Comme au paragraphe 3.1, puisque les éléments de l'espace vectoriel $K^{p,q}$ sont des cochaînes bornées, on définit une différentielle horizontale $d_{\Pi} : K^{p,q} \rightarrow K^{p+1,q}$ et une différentielle verticale $d_U : K^{p,q} \rightarrow K^{p,q+1}$ telles que

$$d_{\Pi}d_{\Pi} = 0, \quad d_Ud_U = 0 \quad \text{et} \quad d_{\Pi}d_U = d_Ud_{\Pi}.$$

De même, au complexe différentiel double $(K^{*,*}, d_{\Pi}, d_U)$ on associe un complexe différentielle totale $(\text{Tot}(K^{*,*}), d_*)$ de degré $+1$ où pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$\text{Tot}(K^{*,*})^n := \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q} \quad \text{et} \quad d_* := d_{\Pi} + (-1)^p d_U.$$

Le complexe différentiel total $(\text{Tot}(K^{*,*}), d_*)$ possède deux filtrations positives décroissantes et régulières verticale et horizontale notées respectivement :

$$F_v^p \text{Tot}(K^{*,*}) := \sum_{i \geq p} K^{i,j} \quad \text{et} \quad F_h^q \text{Tot}(K^{*,*}) := \sum_{j \geq q} K^{i,j}.$$

Donc, aux filtrations $(F_h^p \text{Tot}(K^{*,*}), d_*)$ et $(F_v^p \text{Tot}(K^{*,*}), d_*)$ on associe deux suites spectrales notées respectivement $E_{r,h}^{*,*}$ et $E_{r,v}^{*,*}$ qui convergent vers la cohomologie du complexe différentiel total, $(\text{Tot}(K^{*,*}), d_* = d_{\Pi} + (-1)^p d_U)$ et vérifient les propriétés suivantes (cf. [6]) :

1. La suite spectrale $E_{r,h}^{*,*}$ dégénère au premier terme (i.e., $E_{r,h}^{p,q} = 0, \forall p \geq 1, q \geq 0$) et son aboutissement $E_{\infty,h}^n = H_b^n(\Gamma, V)$. Donc, la suite spectrale $E_{r,h}^{p,q}$ converge vers l'espace de la cohomologie bornée $H_b^{p+q}(\Gamma, V)$.
2. Il existe une bijection continue du terme $E_{1,v}^{p,q}$ dans l'espace vectoriel semi-normé $C_b^p(\Pi, H_b^q(G, V))$ des p -cochaînes non homogènes bornées sur le groupe Π à coefficients dans l'espace semi-normé $H_b^q(G, V)$, en plus, la différentielle $d_{v,1}$ s'envoie sur la différentielle d_{Π} .
3. Il existe une bijection continue du terme $E_{2,v}^{p,q}$ dans $H_b^p(\Pi, H_b^q(G, V))$ espace de cohomologie bornée associé au complexe différentiel $(C_b^*(\Pi, H_b^q(G, V)), d_{\Pi})$.
4. La suite spectrale $(E_{r,v}^{p,q}, d_{r,v})$ converge vers la cohomologie bornée du groupe Γ à coefficients dans le Γ -module V i.e. :

$$E_{2,v}^{p,q} \xrightarrow{\sim} H_b^p(\Pi, H_b^q(G, V)) \implies H_b^{p+q}(\Gamma, V).$$

Pour finir ce paragraphe nous démontrons le lemme suivant qui donne des renseignements sur la structure des termes $E_3^{n,0}$ et $E_3^{n,2}$ utiles pour la preuve des théorèmes

B et C.

LEMME 3. Si V est un Γ -module de Banach trivial alors on a les assertions suivantes :

1. Le terme $E_3^{n,0} = E_2^{n,0}$, donc il existe une bijection linéaire continue sur le terme $E_3^{n,0}$ à valeurs dans l'espace de cohomologie bornée $H_b^n(\Pi, V)$.
2. Il existe une suite exacte d'opérateurs linéaires continues,

$$E_2^{n-2,3} \xrightarrow{d_2^{n-2,3}} E_2^{n,2} \longrightarrow E_3^{n,2} \rightarrow 0.$$

En conséquence, il existe une bijection linéaire continue sur le terme $E_3^{0,2}$ à valeurs dans $H_b^2(G, V)^\Pi$ espace des classes de cohomologie bornée Π -invariantes.

Démonstration. 1) Rappelons que le terme $E_3^{p,q}$ est égal à la cohomologie du complexe différentiel $(E_2^{*,*}, d_2^{*,*})$ (à une bijection continue près), donc pour tout entier $n \geq 0$ on a :

$$E_3^{n,0} \xrightarrow{\sim} \frac{\text{Ker}(d_2^{n,0} : E_2^{n,0} \rightarrow E_2^{n+2,-1})}{\text{Im}(d_2^{n-2,1} : E_2^{n-2,1} \rightarrow E_2^{n,0})}$$

et

$$E_3^{n,2} \xrightarrow{\sim} \frac{\text{Ker}(d_2^{n,2} : E_2^{n,2} \rightarrow E_2^{n+2,1})}{\text{Im}(d_2^{n-2,3} : E_2^{n-2,3} \rightarrow E_2^{n,2})}.$$

Puisque V est un Γ -module trivial, l'espace vectoriel $H_b^1(G, V) = \{0\}$ et par suite le terme $E_2^{n-2,1} \xrightarrow{\sim} H_b^{n-2}(\Pi, H_b^1(G, V)) = \{0\}$. De plus, comme le terme $E_2^{n+2,-1} = \{0\}$ on déduit que le terme $E_3^{n,0} = E_2^{n,0} \xrightarrow{\sim} H_b^n(\Pi, V)$.

2) Puisque le terme $E_2^{n+2,1} \xrightarrow{\sim} H_b^{n+2}(\Pi, H_b^1(G, V)) = \{0\}$ cela implique que la suite d'opérateurs linéaires continus $E_2^{n-2,3} \xrightarrow{d_2^{n-2,3}} E_2^{n,2} \rightarrow E_3^{n,2} \rightarrow 0$ est exacte. Ainsi, si on prend $n = 0$ il s'ensuit que le terme $E_2^{n-2,3} = \{0\}$ et que $E_3^{0,2} = E_2^{0,2} \xrightarrow{\sim} H_b^0(\Pi, H_b^2(G, V))$. Donc, le terme $E_3^{0,2} \xrightarrow{\sim} H_b^2(G, V)^\Pi$. ■

3.3. CUP-PRODUIT. Soient U, V et W trois G -modules de Banach et $\mu : U \times V \rightarrow W$ un opérateur bilinéaire continu G -équivariant. Pour tout couple de cochaînes bornées non homogènes $f \in C_b^p(G, U)$ et $h \in C_b^q(G, V)$ on définit leurs cup-produit $f \cup h \in C_b^{p+q}(G, W)$ par la formule suivante (cf. [10]) :

$$f \cup h([g_1 \mid \cdots \mid g_{p+q}]) = \mu(f([g_1 \mid \cdots \mid g_p]) \otimes g_1 g_2 \cdots g_p \cdot h([g_{p+1} \mid \cdots \mid g_{p+q}])). \quad (6)$$

Il est facile de vérifier que le cup-produit $\cup : C_b^*(G, U) \times C_b^*(G, V) \rightarrow C_b^*(G, W)$ est continu, associatif et commute avec la différentielle d_* dans la formule suivante,

$$d_{p+q}(f \cup h) = d_p(f) \cup h + (-1)^p f \cup d_q(h). \quad (7)$$

Ainsi, en passant en cohomologie, l'expression (6) induit un cup-produit sur les espaces de cohomologie bornée qui sera noté aussi :

$$\begin{aligned} \cup : H_b^p(G, U) \times H_b^q(G, V) &\longrightarrow H_b^{p+q}(G, W) \\ ([f], [h]) &\longmapsto [f] \cup [h] := [f \cup h]. \end{aligned}$$

Dans le reste de ce paragraphe, on donnera des exemples de cup-produit utiles pour la suite de ce travail.

Notons d'abord que grâce à la functorialité de la cohomologie bornée et de l'homologie ℓ^1 , la donnée d'une représentation extérieure $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(C)$ permet de munir les deux espaces $H_b^2(G, \mathbb{R})$ et $\overline{H}_2^{\ell^1}(G, \mathbb{R})$ d'une structure de Π -module de Banach. Notons aussi que le crochet de dualité $\langle, \rangle : H_b^2(G, \mathbb{R}) \times \overline{H}_2^{\ell^1}(G, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ (évaluation) réalise une forme bilinéaire Π -équivariante. En effet, l'action de Π sur \mathbb{R} étant triviale on aura pour tous les éléments $\alpha \in \Pi$, $x \in H_b^2(G, \mathbb{R})$ et $y \in \overline{H}_2^{\ell^1}(G, \mathbb{R})$:

$$\langle \theta(\alpha)_b(x), \theta(\alpha)_*^{-1}(y) \rangle = \langle x, \theta(\alpha)_* \circ \theta(\alpha)_*^{-1}(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Par conséquent, l'expression (6) induit un cup-produit sur la cohomologie bornée du groupe Π qu'on notera :

$$\cup : H_b^p(\Pi, \overline{H}_2^{\ell^1}(G, \mathbb{R})) \times H_b^q(\Pi, H_b^2(G, \mathbb{R})) \rightarrow H_b^{p+q}(\Pi, \mathbb{R}), \quad \forall p, q \in \mathbb{N}.$$

Ce cup-produit \cup qu'on vient de définir possède deux cas particuliers très utiles pour la suite de ce travail :

1) Si on suppose $\Pi = G$ et que $\theta = 1$ est la représentation triviale on obtient alors un cup-produit sur les espaces de cohomologie bornée à coefficients triviaux :

$$\cup : H_b^p(G, \overline{H}_2^{\ell^1}(G, \mathbb{R})) \times H_b^q(G, H_b^2(G, \mathbb{R})) \longrightarrow H_b^{p+q}(G, \mathbb{R}), \quad \forall p, q \in \mathbb{N}.$$

2) Supposons que la représentation extérieure $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(C)$ est associée à une extension de groupes discrets $1 \rightarrow G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \rightarrow 1$. Ensuite,

considérons les trois complexes différentiels doubles

$$\begin{aligned} K^{p,q} &= C_b^p(\Pi, \mathcal{L}_G(\mathbb{R}[\Gamma^{q+1}], \mathbb{R})), \\ K_\infty^{p,q} &= C_b^p(\Pi, \mathcal{L}_G(\mathbb{R}[\Gamma^{q+1}], H_b^2(G, \mathbb{R}))), \\ K_{\ell_1}^{p,q} &= C_b^p(\Pi, \mathcal{L}_G(\mathbb{R}[\Gamma^{q+1}], \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}))), \end{aligned}$$

où chacun d'eux est muni de la filtration positive décroissante naturelle suivant le degré p (cf. 3.2.2). Ainsi, avec ces données, on obtient trois suites spectrales de Hochschild-Serre notées respectivement

$$(E_r^{p,q}, d_r), \quad (E_{r,\infty}^{p,q}, d_{r,\infty}) \quad \text{et} \quad (E_{r,\ell_1}^{p,q}, d_{r,\ell_1}).$$

Enfin, si on considère le crochet de dualité $\langle, \rangle : H_b^2(G, \mathbb{R}) \times \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ on obtient un cup-produit au niveau des complexes différentiels doubles, $\cup : K_\infty^{p,q} \times K_{\ell_1}^{p',q'} \rightarrow K^{p,q}$, qui induit par suite un cup-produit au niveau des suites spectrales,

$$\cup : E_{r,\infty}^{p,q} \times E_{r,\ell_1}^{p',q'} \rightarrow E_r^{p+p',q+q'}$$

qui commute avec les trois différentielles $d_{r,\infty}$, d_{r,ℓ_1} et d_r dans la relation suivante :

$$d_r^{p+p',q+q'}(x_\infty^{p,q} \cup x_{\ell_1}^{p',q'}) = d_{r,\infty}^{p,q}(x_\infty^{p,q}) \cup x_{\ell_1}^{p',q'} + (-1)^{p+q} x_\infty^{p,q} \cup d_{r,\ell_1}^{p',q'}(x_{\ell_1}^{p',q'}).$$

3.4. QUASI-MORPHISMES ET 2-COCYCLES BORNÉS. Ce paragraphe est entièrement extrait de [3] et [4].

3.4.1. GÉNÉRALITÉS SUR LES EXTENSIONS CENTRALES. Soient G un groupe discret et $c \in Z^2(G, \mathbb{R})$ un 2-cocycle réel non dégénéré i.e. $c(g, 1) = c(1, g) = 0, \forall g \in G$.

Observons que si on munit le produit cartésien $\mathbb{R} \times G$ par la multiplication interne

$$(t, g) \cdot (u, h) := (t + u + c(g, h), gh)$$

on obtient un groupe noté, $\mathbb{R} \times_c G$, tel que l'injection canonique $j(t) = (t, 1)$ et la surjection canonique $p(t, g) = g$ deviennent des homomorphismes et que le sous-groupe image $j(\mathbb{R}) = \text{Ker}(p)$ est central dans le groupe $\mathbb{R} \times_c G$. Notons aussi que si on remplace c par le 2-cocycle $c' = c + df$, avec $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ est une cochaînes telle que $f(1) = 0$, on obtient un isomorphisme de groupes $F : \mathbb{R} \times_{c'} G \rightarrow \mathbb{R} \times_c G$ défini par $F(t, g) = (t + f(g), g)$ où $F(t, 1) = (t, 1), \forall t \in \mathbb{R}$.

En conséquence, un 2-cocycle $c \in Z^2(G, \mathbb{R})$ induit une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{j} \mathbb{R} \times_c G \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$$

qui réalise une extension centrale du groupe G par \mathbb{R} et qui ne dépend que de la classe de cohomologie $[c] \in H^2(G, \mathbb{R})$.

Inversement, étant donnée une extension centrale

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{j} \bar{G} \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1,$$

en fixant une section ensembliste $s : G \rightarrow \bar{G}$ de la projection $p : \bar{G} \rightarrow G$ (i.e. $p \circ s = id$) telle que $s(1) = 1$ on vérifie que l'expression

$$c(g_1, g_2) = s(g_1)s(g_2)s(g_1g_2)^{-1} \quad (8)$$

définit un 2-cocycle non dégénéré $c \in Z^2(G, \mathbb{R})$ (cf. [10] et [17]).

D'autre part, puisque pour tout élément $\bar{g} \in \bar{G}$, les deux éléments \bar{g} et $s \circ p(\bar{g})$ se projettent via la surjection p sur $p(\bar{g}) \in G$, il existe un unique élément central $\Phi(\bar{g}) \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\bar{g} = s \circ p(\bar{g})\Phi(\bar{g}). \quad (9)$$

AFFIRMATION 1. *La 1-cochaîne réelle $\Phi : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par (9) vérifie les propriétés suivantes où on considère $\mathbb{R} \simeq \text{Ker}(p)$ comme un groupe additif :*

1. $\forall \bar{g}_1, \bar{g}_2 \in \bar{G}, \quad p^*(c)(\bar{g}_1, \bar{g}_2) = \Phi(\bar{g}_1\bar{g}_2) - \Phi(\bar{g}_1) - \Phi(\bar{g}_2).$
2. $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi(t) = t.$
3. $\forall t \in \mathbb{R}, \forall \bar{g} \in \bar{G}, \quad \Phi(\bar{g}t) = \Phi(\bar{g}) + t.$
4. $\phi \circ s = 0.$

En conséquence, la correspondance $F(\bar{g}) := (\Phi(\bar{g}), p(\bar{g}))$ est un isomorphisme d'extensions centrales de \bar{G} dans $\mathbb{R} \times_c G$.

Démonstration. 1) Soient \bar{g}_1 et $\bar{g}_2 \in \bar{G}$, des expressions (8) et (9) il résulte que :

$$\begin{aligned} p^*(c)(\bar{g}_1, \bar{g}_2) &= s \circ p(\bar{g}_1)s \circ p(\bar{g}_2)(s \circ p(\bar{g}_1\bar{g}_2))^{-1} \\ &= \bar{g}_1\Phi(\bar{g}_1)^{-1}\bar{g}_2\Phi(\bar{g}_2)^{-1}(\bar{g}_1\bar{g}_2\Phi(\bar{g}_1\bar{g}_2)^{-1})^{-1} \\ &= \Phi(\bar{g}_1\bar{g}_2) - \Phi(\bar{g}_1) - \Phi(\bar{g}_2). \end{aligned}$$

- 2) Puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$, $p(t) = 1$, la relation (9) implique $\Phi(t) = t$.
- 3) Par construction on a $\bar{g}t = s \circ p(\bar{g}t)\Phi(\bar{g}t), \forall t \in \mathbb{R}$ et $\bar{g} \in \bar{G}$. Ainsi, comme $p(\bar{g}t) = p(\bar{g})$ on obtient $\Phi(\bar{g}t) = \Phi(\bar{g}) + t$.
- 4) Puisque pour $g \in G$ on a $s(g) = s \circ p(s(g))\Phi \circ s(g)$ et $p \circ s(g) = g$, donc $\Phi \circ s(g) = 0$. ■

Suite aux discussions précédentes on conclut qu'il existe une correspondance bijective entre les classes de cohomologie $x \in H^2(G, \mathbb{R})$ et les extensions centrales du groupe G dont le noyau est isomorphe avec \mathbb{R} (cf. [10] et [17]).

3.4.2. GÉNÉRALITÉS SUR LES QUASI-MORPHISMES

DÉFINITION 3. Soit G un groupe discret, on dira que l'application $\Phi : G \rightarrow \mathbb{R}$ est un quasi-morphisme s'il existe un réel $k > 0$ tel que pour tous g et h éléments de G on a,

$$|\Phi(gh) - \Phi(g) - \Phi(h)| < k.$$

Si en plus, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ on a $\Phi(g^n) = n\Phi(g)$ on dira que Φ est un quasi-morphisme homogène.

Notons que si on applique l'affirmation 1, on voit que pour tout 2-cocycle borné $c : G \times G \rightarrow \mathbb{R}$ la 1-cochaîne $\Phi : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$ qui lui est associée par l'expression (9) est un quasi-morphisme. Ce quasi-morphisme n'est pas nécessairement homogène, mais on peut le rendre homogène en posant,

$$\varphi(\bar{g}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \Phi(\bar{g}^n). \tag{10}$$

AFFIRMATION 2. Le quasi-morphisme homogène $\varphi : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par (10) vérifie les propriétés suivantes :

- 1. $\forall t \in \mathbb{R}, \forall \bar{g} \in \bar{G}, \varphi(\bar{g}t) = \varphi(\bar{g}) + t$, en particulier $\varphi(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- 2. La cochaîne réelle $b' = \varphi - \Phi$ est bornée et \mathbb{R} -invariante (i.e. $b'(t\bar{g}) = b'(\bar{g})$).

Démonstration. 1) Puisque \mathbb{R} est contenu dans le centre du groupe \bar{G} , pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout élément $\bar{g} \in \bar{G}$ on a $(\bar{g}t)^n = \bar{g}^n t^n$. Par application de Φ , puis par passage à la limite on obtient 1).

2) Puisque Φ est un quasi-morphisme il existe un réel $k > 0$ tel que pour tous les éléments \bar{g} et \bar{h} de \bar{G} , $|\Phi(\bar{g}\bar{h}) - \Phi(\bar{g}) - \Phi(\bar{h})| \leq k$. Donc, pour tout

$\bar{g} \in \bar{G}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|\Phi(\bar{g}^n) - n\Phi(\bar{g})| \leq (n-1)k$. Ainsi, par passage à la limite sur n on déduit que $b' = \varphi - \Phi$ est une cochaîne bornée, qui est \mathbb{R} -invariante puisque Φ et φ vérifient la propriété 1). ■

La propriété 2) de l'affirmation 2 montre que la cochaîne bornée $b' = \varphi - \Phi$ induit sur le groupe G une cochaîne bornée $b : G \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $b \circ p = b'$. Ainsi, en posant

$$s_0(g) = s(g)b(g)^{-1}, \quad \forall g \in G$$

on obtient une section ensembliste à la projection p telle que $s_0(1) = 1$. De plus, puisque pour tout $\bar{g} \in \bar{G}$ l'élément $s_0 \circ p(\bar{g})$ se projettent sur $p(\bar{g}) \in G$, il existe donc un élément central $h(\bar{g}) \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\bar{g} = h(\bar{g})s_0 \circ p(\bar{g}). \tag{11}$$

AFFIRMATION 3. Avec les notations ci-dessus on a les affirmations suivantes :

1. La cochaîne $h : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par (11) est égale au quasi-morphisme homogène $\varphi : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$ qui est associé à Φ par l'expression (10).
2. Le 2-cocycle borné \bar{c} induit par le cobord \mathbb{R} -invariant $-d\varphi$ est cohomologue au 2-cocycle borné c . Plus précisément, on a $\bar{c} - c = -db$, où b est une cochaîne bornée.

Démonstration. 1) Si à l'élément $\bar{g} \in \bar{G}$ on applique les formules (9) et (11) simultanément, on obtient l'expression

$$\bar{g} = s \circ p(\bar{g})\phi(\bar{g}) = s_0 \circ p(\bar{g})h(\bar{g}) = s \circ p(\bar{g})b(p(\bar{g}))^{-1}h(\bar{g})$$

de laquelle on déduit que $h(\bar{g}) - \Phi(\bar{g}) = b(p(\bar{g})) = b'(\bar{g})$ (cf. aff. 2). C'est-à-dire on a $h = \varphi$.

2) Un calcul direct sur le défaut des sections s et s_0 montre que $\bar{c} - c = -db$. ■

Suite aux assertions de l'affirmation 3 on peut maintenant interpréter une classe de cohomologie bornée réelle $x \in H_b^2(G, \mathbb{R})$ par la donnée d'une extension centrale

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \xrightarrow{j} & \bar{G} & \begin{array}{c} \xleftarrow{s_x} \\ \xrightarrow{p} \end{array} & G & \longrightarrow & 1 \\
 & & & & \downarrow \varphi & & & & \\
 & & & & \mathbb{R} & & & &
 \end{array}$$

munie d'une section ensembliste $s_x : G \rightarrow \overline{G}$ de la projection p telle que le quasi-morphisme $\varphi : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$ qui lui est associé par la formule (9) est homogène et avec $\varphi(s_x(g)) = 0, \forall g \in G$.

L'affirmation suivante se démontre en utilisant le fait que φ est un quasi-morphisme homogène associé à la section s_x :

AFFIRMATION 4. Avec les notations ci-dessus on a les assertions suivantes :

1. $\forall g \in G, \forall n \in \mathbb{Z}, s_x(g^n) = (s_x(g))^n$.
2. La section $s_x : G \rightarrow \overline{G}$ commute avec la conjugaison i.e. :

$$s_x(ghg^{-1}) = s_x(g)s_x(h)s_x(g)^{-1}, \quad \forall g, h \in G.$$

3. Si on désigne par $Z(G)$ le centre du groupe G alors pour tous les éléments $g \in G$ et $z \in Z(G)$ on a $s_x(z) \in Z(\overline{G})$ et $s_x(gz) = s_x(g)s_x(z)$.

En conséquence, la restriction de s_x à $Z(G)$ (à valeurs dans $Z(\overline{G})$) (reps. φ à $Z(\overline{G})$) est un homomorphisme tels que pour tout $\bar{z} \in Z(\overline{G})$ on a :

$$\bar{z} = s_x \circ p(\bar{z}) + j \circ \varphi(\bar{z}) \quad \text{et} \quad \varphi(\bar{z} \bar{g}) = \varphi(\bar{z}) + \varphi(\bar{g}).$$

Autrement dit, en tant que \mathbb{Z} -modules on a $Z(\overline{G}) = \mathbb{R} \oplus Z(G)$.

La section s_x étudiée ci-dessus n'est pas unique dans l'ensemble des sections de la projection p qui induisent par (9) un quasimorphisme homogène. En effet, si on multiplie s_x par un homomorphisme $m : G \rightarrow \mathbb{R}$ on obtient une nouvelle section $s_1 = s_x \cdot m$ de p dont le quasi-morphisme homogène associé par (9) est égal à $\varphi_1 = \varphi - m \circ p$. Cependant, si on note c_x le 2-cocycle borné obtenu par la formule (8) à partir de la section s_x on voit alors que le 2-cocycle borné associé à la section s_1 par la formule (8) reste égal à c_x .

La proposition suivante résume les propriétés du 2-cocycle borné c_x qui sont en effet essentielles pour le reste de ce travail.

PROPOSITION 5. (CF. [4]) Pour toute classe de cohomologie bornée $x \in H_b^2(G, \mathbb{R})$ il existe un 2-cocycle borné c_x unique dans la classe de cohomologie de x tel que :

1. c_x est le seul 2-cocycle borné représentant x qui vérifie la relation :

$$c_x(g^n, g^m) = 0, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, \forall g \in G. \tag{12}$$

De plus le quasi-morphisme qui lui est associé par (9) est homogène. On appellera c_x le 2-cocycle homogène représentant la classe x .

2. La classe de cohomologie $x \in H_b^2(G, \mathbb{R})$ est nulle si et seulement si le 2-cocycle borné homogène c_x est nul.
3. Pour tout automorphisme α de G on a $\alpha^*(c_x) = c_{\alpha_b(x)}$, où $\alpha_b : H_b^2(G, \mathbb{R}) \rightarrow H_b^2(G, \mathbb{R})$ est l'isométrie induite par α . En conséquence, la classe x est fixée par l'isométrie α_b si et seulement si le 2-cocycle homogène c_x est invariant par α (i.e. $\alpha^*(c_x) = c_x$). En particulier, le 2-cocycle homogène c_x est invariant par conjugaison.

Démonstration. 1) Soient $c \in x$ un 2-cocycle qui vérifie (12) et $b : G \rightarrow \mathbb{R}$ une cochaîne bornée telle que $c - c_x = db$. Puisque c et c_x vérifient la condition (12) il s'ensuit que pour tout $g \in G$ on a l'égalité $db(g, g) = 0$ qui implique que $b(g^{2^n}) = 2^n b(g), \forall n \in \mathbb{N}$. Donc, $b = 0$ et par suite $c = c_x$.

2) Supposons que la classe x est nulle. Donc, il existe une cochaîne bornée réelle b telle que $c_x = db$. Ainsi, comme dans la preuve de 1) la condition (12) implique que $c_x = 0$. La réciproque est évidente.

3) Puisque le 2-cocycle c_x est homogène il en résulte que pour tout automorphisme α du groupe G le 2-cocycle $\alpha^*(c_x) \in \alpha_b(x)$ vérifie (12). Donc, d'après 1) $c_{\alpha_b(x)} = \alpha^*(c_x)$. ■

3.5. CONSTRUCTION DE LA CLASSE DE COHOMOLOGIE BORNÉE DE DEGRÉ DEUX g_2 . Soit G un groupe discret que l'on fait agir trivialement sur le second espace de l'homologie ℓ^1 -réduite $\overline{H}_2^{\ell^1}(G, \mathbb{R})$. Soit $\mathbf{m}_2 : G^2 \rightarrow C_2^{\ell^1}(G, \mathbb{R})$ la cochaîne définie par l'expression :

$$\mathbf{m}_2(g, h) = (g, h) - \mathbf{m}(g) + \mathbf{m}(gh) - \mathbf{m}(h) = (g, h) - \mathbf{m} \circ \partial_2(g, h) \quad (13)$$

où $\mathbf{m} : C_1^{\ell^1}(G, \mathbb{R}) \rightarrow C_2^{\ell^1}(G, \mathbb{R})$ désigne l'opérateur borné défini ci-dessus par la formule (5) (cf. [20]). La cochaîne \mathbf{m}_2 est bornée parce que d'après l'expression (5) pour tout $g \in G$ la norme $\|\mathbf{m}(g)\|_1 = 1$ implique que pour tous g et $h \in G$ la norme $\|\mathbf{m}_2(g, h)\|_1 \leq 4$.

AFFIRMATION 5. Pour tous g et $h \in G$ on a les propriétés suivantes :

1. Pour toute cochaîne bornée $b : G \rightarrow \mathbb{R}$, on a : $\langle db, \mathbf{m}_2(g, h) \rangle = 0$.
2. Si $c : G^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est un 2-cocycle borné et si $c_x : G^2 \rightarrow \mathbb{R}$ désigne l'unique 2-cocycle borné homogène tel que $x = [c] = [c_x] \in H_b^2(G, \mathbb{R})$ alors,

$$\langle c, \mathbf{m}_2(g, h) \rangle = \langle c_x, \mathbf{m}_2(g, h) \rangle = c_x(g, h).$$

Démonstration. Premièrement, remarquons que d'après l'expression (5) qui définit la co-chaîne $\mathbf{m} : G \rightarrow C_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ pour toute cochaîne bornée b on a, $\langle db, \mathbf{m}(g) \rangle = b(g)$, ceci entraîne $\langle db, \mathbf{m}_2 \rangle = 0$. Ainsi, puisqu'il existe une cochaîne bornée $b' : G \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $c - c_x = db'$ on voit donc que $\langle c, \mathbf{m}_2 \rangle = \langle c_x, \mathbf{m}_2 \rangle$.

Enfin, en utilisant le fait que le 2-cocycle c_x vérifie la condition d'homogénéité on en déduit que $\langle c_x, \mathbf{m}_2(g, h) \rangle = c_x(g, h)$. ■

AFFIRMATION 6. La cochaîne bornée $\mathbf{m}_2 : G^2 \rightarrow C_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ induit un 2-cocycle borné homogène $\overline{\mathbf{m}}_2 : G^2 \rightarrow \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ (i.e. $\overline{\mathbf{m}}_2(g^m, g^n) = 0, \forall g \in G, \forall m, n \in \mathbb{Z}$).

Démonstration. Observons d'abord que puisque pour tout $g \in G$ on a $\partial_2(\mathbf{m}(g)) = g$ il en résulte que la cochaîne bornée $\mathbf{m}_2 : G^2 \rightarrow C_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ prend ses valeurs dans l'espace des ℓ_1 -cycles $Z_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$. Ainsi, en composant la 2-cochaîne \mathbf{m}_2 avec la surjection canonique $Z_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}) \rightarrow \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$, on obtient une 2-cochaîne bornée $\overline{\mathbf{m}}_2 : G^2 \rightarrow \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$.

Pour démontrer que le cobord de la cochaîne $\overline{\mathbf{m}}_2 : G^2 \rightarrow \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ est nul nous allons démontrer que le cobord de la cochaîne $\mathbf{m}_2 : G^2 \rightarrow Z_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ est une 3-cochaîne à valeurs dans l'adhérence $\overline{B}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}) \subseteq Z_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$.

En effet, si on désigne par D_* la différentielle ordinaire du complexe des cochaînes bornées non homogènes $C_b^*(G, Z_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}))$ où le groupe G agit trivialement sur l'espace $Z_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$, alors, à partir de la deuxième assertion de l'affirmation 5 et de la linéarité du crochet de dualité $\langle, \rangle : H_b^2(G, \mathbb{R}) \times \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ on voit que pour toute classe de cohomologie bornée $x = [c] = [c_x] \in H_b^2(G, \mathbb{R})$ et pour tous g, h et $k \in G$ on a,

$$\begin{aligned} \langle c, D_*(\mathbf{m}_2)(g, h, k) \rangle &= \langle c, \mathbf{m}_2(h, k) \rangle - \langle c, \mathbf{m}_2(gh, k) \rangle \\ &\quad + \langle c, \mathbf{m}_2(g, hk) \rangle - \langle c, \mathbf{m}_2(g, h) \rangle \\ &= c_x(h, k) - c_x(gh, k) + c_x(g, hk) - c_x(g, h) \\ &= dc_x(g, h, k) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, de la dernière expression on déduit que le cobord $D_*(\mathbf{m}_2) : G^3 \rightarrow Z_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ prend ses valeurs dans l'adhérence $\overline{B}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}) \subseteq Z_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$. Parce que si on suppose qu'il existe des éléments g_0, h_0 et $k_0 \in G$ tels que, $D(\mathbf{m}_2)(g_0, h_0, k_0) \notin \overline{B}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}) \subset C_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$, le théorème de séparation de Hahn-Banach (cf. [9], [25]) nous permet de trouver une forme linéaire continue

non nulle $c_0 : C_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ qui s'annule sur le sous-espace fermé $\overline{B_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})}$ et telle que $\langle c_0, D_*(\mathbf{m}_2)(g_0, h_0, k_0) \rangle = 1$.

Maintenant, puisque la forme linéaire continue $c_0 : C_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est nulle sur l'espace des 2-bords bornés $B_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}) \subseteq \overline{B_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})}$ on en déduit que $c_0 : C_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définit un 2-cocycle borné $c_0 \in Z_b^2(G, \mathbb{R})$ et donc, pour tout triplet $(g, h, k) \in G^3$ on aura l'égalité

$$\langle c_0, D_*(\mathbf{m}_2)(g, h, k) \rangle = 0$$

qui contredit le fait que $\langle c_0, D_*(\mathbf{m}_2)(g_0, h_0, k_0) \rangle = 1$.

Par conséquent, pour tous g, h et $k \in G$ le cobord $D_*(\mathbf{m}_2)(g, h, k) \in \overline{B_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})}$.

Finalement, en passant en homologie ℓ_1 -réduite on conclut que $\overline{\mathbf{m}}_2 : G^2 \rightarrow \overline{H_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})}$ est un 2-cocycle borné. De plus, il est homogène parce que pour tous $g \in G$ et $n, m \in \mathbb{Z}$ la relation $\langle c_x, \mathbf{m}_2(g^n, g^m) \rangle = c_x(g^n, g^m) = 0$ implique $\overline{\mathbf{m}}_2(g^n, g^m) = 0$. ■

Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour énoncer et démontrer le théorème principal A.

THÉORÈME PRINCIPAL A. *La classe de cohomologie bornée $\mathbf{g}_2 := [\overline{\mathbf{m}}_2] \in H_b^2(G, \overline{H_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})})$ vérifie les deux propriétés suivantes :*

1. \mathbf{g}_2 est nulle si et seulement si le second groupe de cohomologie bornée $H_b^2(G, \mathbb{R}) = 0$.
2. \mathbf{g}_2 est la seule classe de cohomologie bornée élément de l'espace $H_b^2(G, \overline{H_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})})$ qui vérifie la relation,

$$x \cup \mathbf{g}_2 = x, \quad \forall x \in H_b^2(G, \mathbb{R})$$

où le cup-produit \cup est défini par l'entrelacement naturel (dualité) entre les espaces de Banach $H_b^2(G, \mathbb{R})$ et $\overline{H_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})}$.

Démonstration. 1) La première proposition du théorème est une conséquence de la formule $\langle c_x, \mathbf{m}_2(g, h) \rangle = c_x(g, h)$ (cf. aff. 5) et du fait que la classe de cohomologie bornée réelle $[c_x]$ est nulle si et seulement si le 2-cocycle borné homogène $c_x = 0$ (cf. pr.5).

2) Supposons qu'il existe une cochaîne bornée $\mu : G^2 \rightarrow Z_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ qui induit une classe de cohomologie $[\overline{\mu}] \in H_b^2(G, \overline{H_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})})$ telle que, $x \cup [\overline{\mu}] = x, \forall x \in H_b^2(G, \mathbb{R})$.

Observons que sous cette hypothèse pour toute classe de cohomologie $x \in H_b^2(G, \mathbb{R})$ on peut écrire $\langle c_x, \mu - \mathbf{m}_2 \rangle = 0$. Ainsi, en appliquant le théorème de séparation de Hahn-Banach comme dans la preuve de l'affirmation 6, on déduit que la cochaîne bornée $\mu - \mathbf{m}_2 : G^2 \rightarrow Z_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ prend ses valeurs dans l'adhérence $\overline{B_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})}$. Autrement dit on a, $\bar{\mu} = \bar{\mathbf{m}}_2 : G^2 \rightarrow \overline{H_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})}$. ■

Dans le papier [7], nous reviendrons sur la construction de la classe de cohomologie \mathfrak{g}_2 pour montrer qu'elle est universelle au sens de Yoneda et nous en expliciterons l'expression sur quelques groupes discrets particuliers.

Dans la section 5, si $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(G)$ désigne la représentation extérieure associée à une extension de groupes discrets $1 \rightarrow G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \rightarrow 1$ (cf. voir 4.1) nous allons démontrer que la classe de cohomologie \mathfrak{g}_2 est invariante par rapport à l'action du groupe Π sur l'espace $H_b^2(G, \overline{H_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})})$ qui est induite par la représentation θ (cf. cor. 6).

4. CONSTRUCTION DE LA CLASSE DE COHOMOLOGIE BORNÉE DE DEGRÉ TROIS $[\theta]$

Dans cette section, nous nous proposons d'associer à toute représentation extérieure $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(C)$ une classe de cohomologie bornée de degré trois du groupe Π à valeurs dans l'espace des classes d'homologie ℓ_1 -réduite $\overline{H_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})}$ que l'on suppose muni de la structure de Π -module de Banach induite par l'homomorphisme θ . Cette classe de cohomologie sera notée $[\theta] \in H_b^3(\Pi, \overline{H_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})})$.

Pour construire la classe de cohomologie bornée $[\theta] \in H_b^3(\Pi, \overline{H_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})})$ nous allons nous inspirer des techniques introduites en théorie de l'obstruction qui associe à la donnée d'une représentation extérieure $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(C)$ une classe de cohomologie ordinaire de degré trois élément du groupe $H^3(\Pi, Z(G))$ (cf. [17] et [10]).

4.1. CLASSES DE COHOMOLOGIE D'OBSTRUCTION. Dans ce paragraphe, nous donnerons l'essentiel des idées de la théorie de l'obstruction qui permettent d'associer à un homomorphisme $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(G)$ une classe de cohomologie ordinaire de degré trois élément du groupe $H^3(\Pi, Z(G))$ (cf. [17] et [10]).

4.1.1. L'APPROCHE DIRÈCTE. Soient $1 \rightarrow G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \rightarrow 1$ une extension de groupes discrets et $s : \Pi \rightarrow G$ une section ensembliste de la projection σ telle que $\sigma \circ s = id_{\Pi}$ et $s(1) = 1$. Pour tous $\alpha \in \Pi$ et $g \in G$ on pose $\Psi_s(\alpha)(g) = s(\alpha)i(g)s(\alpha)^{-1}$.

En général, l'application $\Psi_s : \Pi \rightarrow \text{Aut}(G)$ n'est pas un homomorphisme. En effet, si on note $f_s : \Pi \times \Pi \rightarrow G$ le défaut de la section s à être un morphisme de groupes,

$$s(\alpha)s(\beta) = i(f_s(\alpha, \beta))s(\alpha\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in \Pi$$

on vérifie que pour tout $g \in G$:

$$\Psi_s(\alpha) \circ \Psi_s(\beta)(g) = i_{f_s(\alpha, \beta)} \circ \Psi_s(\alpha\beta)(g)$$

où i_x désigne l'automorphisme intérieur de G défini par $i_x(g) = xgx^{-1}, \forall x, g \in G$.

Notons aussi que si s_1 est une deuxième section ensembliste de σ alors il existe une application $h : \Pi \rightarrow G$ telle que $s_1(\alpha) = h(\alpha)s(\alpha), \forall \alpha \in \Pi$. Ainsi, par définition de l'application Ψ_{s_1} , on aura la relation $\Psi_{s_1}(\alpha)(g) = h(\alpha)\Psi_s(\alpha)(g)h(\alpha)^{-1}$ qui montre que Ψ_s induit un homomorphisme $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(G)$ ne dépendant que de la suite exacte donnée.

La cochaîne non abélienne f_s vérifie la condition de 2-cocycle non abélien sur le groupe Π à valeurs dans le groupe G donnée par :

$$\Psi_s(\alpha)(f_s(\beta, \gamma))f_s(\alpha, \beta\gamma) = f_s(\alpha, \beta)f_s(\alpha\beta, \gamma). \quad (14)$$

En effet, c'est grâce à l'expression (14) qu'on pourra identifier le groupe Γ avec le produit cartésien tordu $\Pi \times_{f_s} G$ munit de la loi de composition interne suivante (cf. [10] et [17]) :

$$(\alpha, g) \cdot (\alpha_1, g_1) = (\alpha\alpha_1, g\Psi_s(\alpha)(g_1)f(\alpha, \alpha_1))$$

On vérifie aussi que le couple $(1, 1)$ est élément neutre dans $\Pi \times_{f_s} G$ et que $i(g) = (1, g)$ et $\sigma(\alpha, g) = \alpha$ sont respectivement l'injection canonique de G dans $\Pi \times_{f_s} G$ et la projection canonique de $\Pi \times_{f_s} G$ sur Π .

4.1.2. L'APPROCHE INVERSE. Considérons une représentation $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(G)$ et un relèvement ensembliste, $\Psi : \Pi \rightarrow \text{Aut}(G)$, de θ . Puisque pour tous les éléments α et β de Π les deux automorphismes $\Psi(\alpha) \circ \Psi(\beta)$ et $\Psi(\alpha\beta)$

représentent le même automorphisme extérieur $\theta(\alpha) \circ \theta(\beta) = \theta(\alpha\beta)$ il existe donc un élément $f(\alpha, \beta) \in G$ tel que :

$$i_{f(\alpha, \beta)} \circ \Psi(\alpha\beta) = \Psi(\alpha) \circ \Psi(\beta)$$

Dans la suite nous appellerons le couple (Ψ, f) *noyau abstrait* de l'homomorphisme $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(C)$ (cf. [10] et [17]).

En général, la cochaîne $f : \Pi \times \Pi \rightarrow G$ ne vérifie pas la relation (14) des 2-cocycles non abéliens. Cependant, si pour tous les éléments α, β et $\gamma \in \Pi$ on pose :

$$K_{\Psi, f}(\alpha, \beta, \gamma) = \Psi(\alpha)(f(\beta, \gamma))f(\alpha, \beta\gamma)f(\alpha\beta, \gamma)^{-1}f(\alpha, \beta)^{-1} \quad (15)$$

on vérifie que l'application $K_{\Psi, f} : \Pi^3 \rightarrow G$ prend ses valeurs dans le centre $Z(G)$ du groupe G . En outre, en munissant le groupe abélien $Z(G)$ de la structure de Π -module induite par l'homomorphisme $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(C)$, alors grâce à l'associativité du groupe des automorphismes $\text{Aut}(G)$ on démontre que la 3-cochaîne $K_{\Psi, f} : \Pi^3 \rightarrow Z(G)$ est un cocycle et que la classe de cohomologie $[K_{\Psi, f}] \in H^3(\Pi, Z(G))$ ne dépend que de la représentation extérieure $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(C)$. De plus, on démontre que la classe $[K_{\Psi, f}] \in H^3(\Pi, Z(G))$ s'annule si et seulement si l'homomorphisme $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(C)$ est associé à une extension de groupes discrets $1 \rightarrow G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \rightarrow 1$ (cf. [10] et [17]).

Dans le reste de cette section, nous allons munir l'espace d'homologie ℓ^1 -réduite $\overline{H}_2^{\ell^1}(G, \mathbb{R})$ de la structure de Π -module induite par l'homomorphisme $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(G)$ et ainsi en remarquant que si on répartit les quatre facteurs de l'expression (15) comme suit (voir l'expression (23) du paragraphe 4.4)

$$\overline{\theta}_{\Psi, f}(\alpha, \beta, \gamma) := \overline{\mathbf{m}}_2(\Psi(\alpha)(f(\beta, \gamma)), f(\alpha, \beta\gamma)) - \overline{\mathbf{m}}_2(f(\alpha, \beta), f(\alpha\beta, \gamma))$$

nous allons vérifier que la 3-cochaîne bornée $\overline{\theta}_{\Psi, f} : \Pi^3 \rightarrow \overline{H}_2^{\ell^1}(G, \mathbb{R})$ est un cocycle (cf. pr. 9) représentant une classe de cohomologie notée, $[\theta] \in H_b^3(\Pi, \overline{H}_2^{\ell^1}(G, \mathbb{R}))$, qui ne dépend pas du noyau abstrait (Ψ, f) associé à l'homomorphisme $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(G)$ (cf. pr. 10).

L'utilité de la classe de cohomologie $[\theta]$ pour cet article apparaît dans la section 5.

Plus précisément, en se donnant une extension de groupes discrets $1 \rightarrow G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \rightarrow 1$ munie de sa représentation extérieure $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(G)$, nous allons vérifier que la différentielle $d_3^{0,2} : E_3^{0,2} \rightarrow E_3^{3,0}$, de la suite spectrale de Hochschild-Serre en cohomologie bornée à coefficients dans le Π -module

$\overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$, envoie la classe de cohomologie bornée \mathbf{g}_2 sur la classe de cohomologie bornée $[\theta]$ (cf. th. B). Ensuite, pour tout entier $n \geq 0$ nous allons démontrer que la différentielle $d_3^{n,2} : E_3^{n,2} \rightarrow E_3^{n+3,0}$, de la suite spectrale de Hochschild-Serre en cohomologie bornée réelle, est donnée par le cup produit (cf. th. C),

$$d_3^{n,2}(x) = (-1)^n x \cup [\theta].$$

4.2. QUASI-ACTIONS. Rappelons que d'après les discussions du paragraphe 3.4, étant donnée une classe de cohomologie bornée $x \in H_b^2(G, \mathbb{R})$ nous lui avons associé une extension centrale $0 \rightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{j} \overline{G} \xrightarrow{p} G \rightarrow 1$ munie d'un quasi-morphisme homogène $\varphi : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$ et d'une section ensembliste $s_x : G \rightarrow \overline{G}$ dont le défaut à être un homomorphisme est un 2-cocycle borné homogène $c_x : G^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $p^*(c_x) = -d\varphi$ et $[c_x] = x \in H_b^2(G, \mathbb{R})$.

Le lemme suivant ainsi que la proposition et son corollaire sont extraits de [3] et [4].

LEMME 4. Soit (Ψ, f) un noyau abstrait de l'homomorphisme $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(G)$. Pour tous les éléments $\alpha \in \Pi$ et $\overline{g} \in \overline{G}$ on pose :

$$\overline{\Psi}(\alpha)(\overline{g}) = s_x(\Psi(\alpha)(p(\overline{g})))\varphi(\overline{g}). \quad (16)$$

Alors, pour chaque $\alpha \in \Pi$ l'application $\overline{\Psi}(\alpha) : \overline{G} \rightarrow \overline{G}$ est une bijection égale à l'identité sur la droite centrale $\mathbb{R} = \text{Ker}(p) \subset \overline{G}$ et qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall \overline{g} \in \overline{G}, p(\overline{\Psi}(\alpha)(\overline{g})) = \Psi(\alpha)(p(\overline{g}))$;
2. $\forall \overline{g} \in \overline{G}, \varphi(\overline{\Psi}(\alpha)(\overline{g})) = \varphi(\overline{g})$;
3. $\forall \alpha \in \Pi, \forall \overline{g} \in \overline{G}, \overline{\Psi}(\alpha) \circ i_{\overline{g}} = i_{\overline{\Psi}(\alpha)(\overline{g})} \circ \overline{\Psi}(\alpha)$;
4. $\forall \alpha, \beta \in \Pi, \overline{\Psi}(\alpha) \circ \overline{\Psi}(\beta) = i_{F_x(\alpha, \beta)} \circ \overline{\Psi}(\alpha\beta)$ où $F_x(\alpha, \beta) = s_x \circ f(\alpha, \beta)$.
5. $\forall \alpha \in \Pi, \overline{g} \in \overline{G}, \overline{z} \in Z(\overline{G}), \overline{\Psi}(\alpha)(\overline{g} \overline{z}) = \overline{\Psi}(\alpha)(\overline{g})\overline{\Psi}(\alpha)(\overline{z})$.

Démonstration. La relation 1) est évidente. La relation 2) résulte du fait que $\varphi \circ s_x = 0$. La relation 3) est une conséquence immédiate de la relation : $s_x \circ i_{\overline{g}} = i_{s_x(\overline{g})} \circ s_x$ tandis que la relation 4) se déduit de la formule de composition, $\Psi(\alpha) \circ \Psi(\beta) = i_{f(\alpha, \beta)} \circ \Psi(\alpha\beta)$.

Enfin, la relation 5) se démontre à l'aide des propriétés de s_x et de φ énoncées dans l'affirmation 4. ■

PROPOSITION 6. Pour tous \bar{g} et \bar{h} éléments du groupe \bar{G} la bijection $\bar{\Psi}(\alpha) : \bar{G} \rightarrow \bar{G}$ vérifie la relation suivante :

$$\bar{\Psi}(\alpha)(\bar{g})\bar{\Psi}(\alpha)(\bar{h}) = \bar{\Psi}(\alpha)(\bar{g}\bar{h})(\Psi(\alpha))^*(c_x)(p(\bar{g}), p(\bar{h}))c_x(p(\bar{g}), p(\bar{h}))^{-1} \quad (17)$$

qui mesure le défaut de $\bar{\Psi}(\alpha)$ à être un automorphisme sur l'extension centrale \bar{G} .

En conséquence, l'application $\bar{\Psi}(\alpha) : \bar{G} \rightarrow \bar{G}$ devient un automorphisme si et seulement si la classe de cohomologie bornée $x \in H_b^2(G, \mathbb{R})$ est invariante par l'action de l'automorphisme $\Psi(\alpha) \in \text{Aut}(G)$.

Démonstration. En effet, avec les notations ci-dessus on peut écrire :

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(\alpha)(\bar{g})\bar{\Psi}(\alpha)(\bar{h}) &= [s_x(\Psi(\alpha)(p(\bar{g})))s_x(\Psi(\alpha)(p(\bar{h})))][\varphi(\bar{g})\varphi(\bar{h})] \\ &= [s_x(\Psi(\alpha)(p(\bar{g}\bar{h})))(\Psi(\alpha))^*(c_x)(p(\bar{g}), p(\bar{h}))] \\ &\qquad\qquad\qquad [\varphi(\bar{g}\bar{h})c_x(p(\bar{g}), p(\bar{h}))^{-1}] \\ &= \bar{\Psi}(\alpha)(\bar{g}\bar{h})(\Psi(\alpha))^*(c_x)(p(\bar{g}), p(\bar{h}))c_x(p(\bar{g}), p(\bar{h}))^{-1}. \end{aligned}$$

■

COROLLAIRE 3. Soient $0 \rightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{j} \bar{G} \xrightarrow{p} G \rightarrow 1$ une extension centrale induite par une classe de cohomologie bornée $x \in H_b^2(G, \mathbb{R})$; et $1 \rightarrow G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \rightarrow 1$ une extension de groupes avec $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(G)$ désigne la représentation extérieure qui lui est associée. Alors, il existe un homomorphisme $\bar{\theta} : \Pi \rightarrow \text{Out}(\bar{G}, \mathbb{R}) = \{a \in \text{Out}(\bar{G}) \mid a(t) = t, \forall t \in \mathbb{R}\}$ qui commute dans le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & & \Pi \\ & \swarrow \bar{\theta} & \downarrow \theta \\ \text{Out}(\bar{G}, \mathbb{R}) & \xrightarrow{p^\#} & \text{Out}(G) \end{array}$$

si et seulement si la classe $x \in H_b^2(G, \mathbb{R})$ est Π -invariante. Où $p^\# : \text{Out}(\bar{G}, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Out}(G)$ désigne l'homomorphisme naturel induit par la surjection $p : \bar{G} \rightarrow G$.

4.3. CONSTRUCTION D'UNE COCHAÎNE BORNÉE DE "COMPOSITION".

Dans ce paragraphe, on garde les notations introduites ci-dessus et on désigne par $\text{Sym}(\bar{G}, \mathbb{R})$ (resp. $\text{Aut}(\bar{G}, \mathbb{R})$) le groupe des bijections (resp. des automorphismes) de l'extension centrale \bar{G} qui sont égales à l'identité sur la droite centrale $\mathbb{R} = \text{Ker}(p) \subset \bar{G}$.

Rappelons que la restriction de s_x à $Z(G)$ (à valeurs dans $Z(\overline{G})$) est un homomorphisme (cf. aff. 4). Il en résulte que l'application $\overline{\Psi} : \Pi \rightarrow \text{Sym}(\overline{G} : \mathbb{R})$ qui est définie par la formule (16) (cf. lemme 4) induit un homomorphisme $\overline{\Psi} : \Pi \rightarrow \text{Aut}(Z(\overline{G}), \mathbb{R})$ parce que, pour tous $\alpha, \beta \in \Pi$ et $z \in Z(\overline{G})$ on a,

$$\overline{\Psi}(\alpha) \circ \overline{\Psi}(\beta)(z) = F_x(\alpha, \beta)\overline{\Psi}(\alpha\beta)(z)F_x(\alpha, \beta)^{-1} = \overline{\Psi}(\alpha\beta)(z).$$

Ainsi, en conséquence de ces remarques, dans tout le reste de ce travail nous allons regarder le centre $Z(\overline{G}) \subseteq \overline{G}$ comme un Π -module dont la structure est induite par l'homomorphisme $\overline{\Psi} : \Pi \rightarrow \text{Aut}(Z(\overline{G}), \mathbb{R})$.

Maintenant, considérons une représentation extérieure $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(G)$ et fixons un de ses noyaux abstraits (Ψ, f) . Avec la formule (16) on obtient une application $\overline{\Psi} : \Pi \rightarrow \text{Sym}(\overline{G}, \mathbb{R})$. D'autre part, en imitant la formule (15) qui définit le 3-cocycle d'obstruction $K_{\Psi, f} : \Pi^3 \rightarrow Z(G)$, on pourra définir une application $K_{x, \overline{\Psi}} : \Pi^3 \rightarrow \overline{G}$ en posant pour tous α, β et $\gamma \in \Pi$:

$$K_{x, \overline{\Psi}}(\alpha, \beta, \gamma) = \overline{\Psi}(\alpha)(F_x(\beta, \gamma))F_x(\alpha, \beta\gamma)F_x(\alpha\beta, \gamma)^{-1}F_x(\alpha, \beta)^{-1}. \quad (18)$$

En effet, puisque l'image $p(K_{x, \overline{\Psi}}) = K_{\Psi, f}$ prend ses valeurs dans le centre $Z(G)$ on en déduit que l'expression (18) définit une 3-cochaîne abélienne $K_{x, \overline{\Psi}} : \Pi^3 \rightarrow Z(\overline{G})$. D'autre part, puisque l'on sait que la section $s_x : Z(G) \rightarrow Z(\overline{G})$ et le quasi-morphisme $\varphi : Z(\overline{G}) \rightarrow \mathbb{R}$ sont des homomorphismes reliés par l'identité (cf. aff. 4),

$$\bar{z} = s_x \circ p(\bar{z}) + j \circ \varphi(\bar{z}), \quad \forall \bar{z} \in Z(\overline{G}),$$

il en résulte que les deux 3-cochaînes abéliennes $K_{x, \overline{\Psi}} : \Pi^3 \rightarrow Z(\overline{G})$ et $K_{\Psi, f} : \Pi^3 \rightarrow Z(G)$ sont elles aussi reliées par l'identité,

$$K_{x, \overline{\Psi}} = \varphi_*(K_{x, \overline{\Psi}}) + (s_x)_*(K_{\Psi, f}) \in Z(\overline{G}) \simeq \mathbb{R} \oplus Z(G). \quad (19)$$

La 3-cochaîne image $\varphi_*(K_{x, \overline{\Psi}}) : \Pi^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sera appelée cochaîne de composition. Nous l'avons nommée ainsi parce que si on suppose que la représentation extérieure $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(C)$ est associée à une extension de groupes $1 \rightarrow G \xrightarrow{s} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \rightarrow 1$, en prenant une extension centrale $0 \rightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{j} \overline{G} \xrightarrow{p} G \rightarrow 1$ qui représente la classe de cohomologie bornée $x \in H_b^2(G, \mathbb{R})$; la 2-extension $0 \rightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{j} \overline{G} \xrightarrow{i \circ p} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \rightarrow 1$ permet alors de retrouver la 3-cochaîne $\varphi_*(K_{x, \overline{\Psi}}) : \Pi^3 \rightarrow \mathbb{R}$ en procédant comme si le groupe \overline{G} était un Π -module tordu au sens de Whitehead (cf. [10] page 102).

PROPOSITION 7. La cochaîne de composition $c_{x, \bar{\Psi}} := \varphi_*(K_{x, \bar{\Psi}}) : \Pi^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée explicitement $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \Pi$, par la formule,

$$c_{x, \bar{\Psi}}(\alpha, \beta, \gamma) = c_x(\Psi(\alpha)(f(\beta, \gamma), f(\alpha, \beta\gamma))) - c_x(f(\alpha, \beta), f(\alpha\beta, \gamma)), \quad (20)$$

En conséquence, $c_{x, \bar{\Psi}} = \varphi_*(K_{x, \bar{\Psi}}) : \Pi^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une 3-cochaîne bornée.

Démonstration. Puisque pour tous $\bar{z} \in Z(\bar{G})$ et $\bar{g} \in \bar{G}$ le quasi-morphisme homogène $\varphi : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie la relation, $\varphi(\bar{z} \bar{g}) = \varphi(\bar{z}) + \varphi(\bar{g})$ (cf. aff. 4), donc, si on l'applique sur les deux membres de l'expression

$$K_{x, \bar{\Psi}}(\alpha, \beta, \gamma)F_x(\alpha, \beta)F_x(\alpha\beta, \gamma) = \bar{\Psi}(\alpha)(F_x(\beta, \gamma))F_x(\alpha, \beta\gamma)$$

déduite de (18) on obtient :

$$\varphi(\bar{\Psi}(\alpha)(F_x(\beta, \gamma))F_x(\alpha, \beta\gamma)) = \varphi(K_{x, \bar{\Psi}}(\alpha, \beta, \gamma)) + \varphi(F_x(\alpha, \beta)F_x(\alpha\beta, \gamma)).$$

Ensuite, développons les deux membres ci-dessus en appliquant la relation $p^*(c_x) = -d\varphi$, le fait qu'on a $\varphi \circ s_x = 0$ implique $\varphi \circ F_x = 0$ et que $\varphi(\bar{\Psi}(\alpha)(\bar{g})) = \varphi(\bar{g}), \forall \alpha \in \Pi$ et $\bar{g} \in \bar{G}$.

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{\Psi}(\alpha)(F_x(\beta, \gamma))F_x(\alpha, \beta\gamma)) &= \varphi(\bar{\Psi}(\alpha)(F_x(\beta, \gamma))) + \varphi(F_x(\alpha, \beta\gamma)) \\ &+ c_x(\Psi(\alpha)(f(\beta, \gamma), f(\alpha, \beta\gamma))) \\ &= c_x(\Psi(\alpha)(f(\beta, \gamma), f(\alpha, \beta\gamma))) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi(K_{x, \bar{\Psi}}(\alpha, \beta, \gamma)F_x(\alpha, \beta)F_x(\alpha\beta, \gamma)) &= \varphi(K_{x, \bar{\Psi}}(\alpha, \beta, \gamma)) + \varphi(F_x(\alpha, \beta)F_x(\alpha\beta, \gamma)) \\ &= \varphi(K_{x, \bar{\Psi}}(\alpha, \beta, \gamma)) + \varphi(F_x(\alpha, \beta)) \\ &+ \varphi(F_x(\alpha\beta, \gamma)) + c_x(f(\alpha, \beta), f(\alpha\beta, \gamma)) \\ &= \varphi(K_{x, \bar{\Psi}}(\alpha, \beta, \gamma)) + c_x(f(\alpha, \beta), f(\alpha\beta, \gamma)). \end{aligned}$$

Ainsi, en comparant les deux développements on déduit l'expression (20). ■

PROPOSITION 8. Le cobord de la 3-cochaîne $K_{x, \bar{\Psi}} : \Pi^3 \rightarrow Z(\bar{G})$ est donné par l'expression,

$$d(K_{x, \bar{\Psi}})(\alpha, \beta, \gamma, \zeta) = c_{x, \bar{\Psi}}(\beta, \gamma, \zeta) - c_{\Psi(\alpha)_b(x), \bar{\Psi}}(\beta, \gamma, \zeta) \in \mathbb{R}. \quad (21)$$

Démonstration. Pour tous α, β, γ et ζ éléments du groupe Π nous posons :

$$L = \overline{\Psi}(\alpha) \left(\overline{\Psi}(\beta)(F_x(\gamma, \zeta))F_x(\beta, \gamma\zeta) \right) F_x(\alpha, \beta\gamma\zeta) \in \overline{G}.$$

Ci-dessous, nous développons l'élément $L \in \overline{G}$ de deux façons :

1) Dans le premier développement, nous utilisons l'expression (18) qui définit la cochaîne $K_{x, \overline{\Psi}}$. De plus, nous allons utiliser l'expression (17) de la proposition 6 qui contrôle la déviation de la bijection $\overline{\Psi}(\alpha) : \overline{G} \rightarrow \overline{G}$ à être un automorphisme. De même, nous allons appliquer la formule (4) du lemme 4 qui contrôle la déviation de l'application $\overline{\Psi} : \Pi \rightarrow \text{Sym}(\overline{G} : \mathbb{R})$ à être un homomorphisme.

$$\begin{aligned} L &= \overline{\Psi}(\alpha) \left(\overline{\Psi}(\beta)(F_x(\gamma, \zeta))F_x(\beta, \gamma\zeta) \right) F_x(\alpha, \beta\gamma\zeta) \\ &= \overline{\Psi}(\alpha) \circ \overline{\Psi}(\beta)(F_x(\gamma, \zeta))[\overline{\Psi}(\alpha)(F_x(\beta, \gamma\zeta))F_x(\alpha, \beta\gamma\zeta)] \\ &\quad c_x(\Psi(\beta)(f(\gamma, \zeta)), f(\beta, \gamma\zeta))(\Psi(\alpha))^*(c_x(\Psi(\beta)(f(\gamma, \zeta)), f(\beta, \gamma\zeta)))^{-1} \\ &= i_{F_x(\alpha, \beta)} \circ \overline{\Psi}(\alpha\beta)(F_x(\gamma, \zeta))[F_x(\alpha, \beta)F_x(\alpha\beta, \gamma\zeta)K_{x, \overline{\Psi}}(\alpha, \beta, \gamma\zeta)] \\ &\quad c_x(\Psi(\beta)(f(\gamma, \zeta)), f(\beta, \gamma\zeta))(\Psi(\alpha))^*(c_x(\Psi(\beta)(f(\gamma, \zeta)), f(\beta, \gamma\zeta)))^{-1} \\ &= F_x(\alpha, \beta)[\overline{\Psi}(\alpha\beta)(F_x(\gamma, \zeta))F_x(\alpha\beta, \gamma\zeta)]K_{x, \Psi}(\alpha, \beta, \gamma\zeta) \\ &\quad c_x(\Psi(\beta)(f(\gamma, \zeta)), f(\beta, \gamma\zeta))(\Psi(\alpha))^*(c_x(\Psi(\beta)(f(\gamma, \zeta)), f(\beta, \gamma\zeta)))^{-1} \\ &= [F_x(\alpha, \beta)F_x(\alpha\beta, \gamma)F_x(\alpha\beta\gamma, \zeta)]K_{x, \overline{\Psi}}(\alpha\beta, \gamma, \zeta)K_{x, \overline{\Psi}}(\alpha, \beta, \gamma\zeta) \\ &\quad c_x(\Psi(\beta)(f(\gamma, \zeta)), f(\beta, \gamma\zeta))(\Psi(\alpha))^*(c_x(\Psi(\beta)(f(\gamma, \zeta)), f(\beta, \gamma\zeta)))^{-1}. \end{aligned}$$

2) Dans ce second développement de l'expression L , à côté des expressions (17) et (18) nous allons utiliser le fait que les bijections $\overline{\Psi}(\alpha)$ fixent les points de $\mathbb{R} = \text{Ker}(p)$ et que pour tous $\overline{g} \in \overline{G}$ et $\overline{z} \in Z(\overline{G})$ on a : $\overline{\Psi}(\alpha)(\overline{g} \overline{z}) = \overline{\Psi}(\alpha)(\overline{g})\overline{\Psi}(\alpha)(\overline{z})$ (cf. lemme 4).

$$\begin{aligned} L &= \overline{\Psi}(\alpha) \left(\overline{\Psi}(\beta)(F_x(\gamma, \zeta))F_x(\beta, \gamma\zeta) \right) F_x(\alpha, \beta\gamma\zeta) \\ &= \overline{\Psi}(\alpha) \left(K_{x, \overline{\Psi}}(\beta, \gamma, \zeta)F_x(\beta, \gamma)F_x(\beta\gamma, \zeta) \right) F_x(\alpha, \beta\gamma\zeta) \\ &= \overline{\Psi}(\alpha) \left(F_x(\beta, \gamma)F_x(\beta\gamma, \zeta) \right) F_x(\alpha, \beta\gamma\zeta)\overline{\Psi}(\alpha)(K_{x, \overline{\Psi}}(\beta, \gamma, \zeta)) \\ &= \overline{\Psi}(\alpha)(F_x(\beta, \gamma))[\overline{\Psi}(\alpha)(F_x(\beta\gamma, \zeta))F_x(\alpha, \beta\gamma\zeta)]\overline{\Psi}(\alpha)(K_{x, \overline{\Psi}}(\beta, \gamma, \zeta)) \\ &\quad c_x(f(\beta, \gamma), f(\beta\gamma, \zeta))(\Psi(\alpha))^*(c_x)(f(\beta, \gamma), f(\beta\gamma, \zeta))^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \overline{\Psi}(\alpha)(F_x(\beta, \gamma))[K_{x, \overline{\Psi}}(\alpha, \beta\gamma, \zeta)F_x(\alpha, \beta\gamma)F_x(\alpha\beta\gamma, \zeta)]\overline{\Psi}(\alpha)(K_{x, \overline{\Psi}}(\beta, \gamma, \zeta)) \\
 &\quad c_x(f(\beta, \gamma), f(\beta\gamma, \zeta))(\Psi(\alpha))^*(c_x)(f(\beta, \gamma), f(\beta\gamma, \zeta))^{-1} \\
 &= [\overline{\Psi}(\alpha)(F_x(\beta, \gamma))F_x(\alpha, \beta\gamma)]F_x(\alpha\beta\gamma, \zeta)\overline{\Psi}(\alpha)(K_{x, \overline{\Psi}}(\beta, \gamma, \zeta))K_{x, \overline{\Psi}}(\alpha, \beta\gamma, \zeta) \\
 &\quad c_x(f(\beta, \gamma), f(\beta\gamma, \zeta))(\Psi(\alpha))^*(c_x)(f(\beta, \gamma), f(\beta\gamma, \zeta))^{-1} \\
 &= [F_x(\alpha, \beta)F_x(\alpha\beta, \gamma)F_x(\alpha\beta\gamma, \zeta)]\overline{\Psi}(\alpha)(K_{x, \overline{\Psi}}(\beta, \gamma, \zeta))K_{x, \overline{\Psi}}(\alpha, \beta, \gamma) \\
 &\quad K_{x, \overline{\Psi}}(\alpha, \beta\gamma, \zeta) \\
 &\quad c_x(f(\beta, \gamma), f(\beta\gamma, \zeta))(\Psi(\alpha))^*(c_x)(f(\beta, \gamma), f(\beta\gamma, \zeta))^{-1}.
 \end{aligned}$$

La formule de différence (21) s'obtient maintenant par comparaison des deux développements de l'élément L dans le groupe \overline{G} . ■

Observons que puisque d'après la formule (19) on sait que la cochaîne $K_{x, \overline{\Psi}} : \Pi^3 \rightarrow Z(\overline{G})$ est égale à la somme,

$$K_{x, \overline{\Psi}} = \varphi_*(K_{x, \overline{\Psi}}) + (s_x)_*(K_{\Psi, f}) \in Z(\overline{G}) \simeq \mathbb{R} \oplus Z(G)$$

et puisque la cochaîne image $s_x^*(K_{\Psi, f}) : \Pi^3 \xrightarrow{K_{\Psi, f}} Z(G) \xrightarrow{s_x} Z(\overline{G})$ est un 3-cocycle, l'expression (21) établie dans la proposition 8 permet de déduire le corollaire :

COROLLAIRE 4. *Pour toute classe de cohomologie bornée $x \in H_b^2(G, \mathbb{R})$ le cobord de la cochaîne bornée de composition $\varphi_*(K_{x, \overline{\Psi}}) = c_{x, \overline{\Psi}} : \Pi^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est égal à,*

$$d(c_{x, \overline{\Psi}})(\alpha, \beta, \gamma, \zeta) = c_{x, \overline{\Psi}}(\beta, \gamma, \zeta) - c_{\Psi(\alpha)_b(x), \overline{\Psi}}(\beta, \gamma, \zeta) \tag{22}$$

Notons qu'en conséquence de la proposition 8 et de son corollaire 4, si on suppose que la classe de cohomologie bornée $x \in H_b^2(G, \mathbb{R})$ est Π -invariante comme dans [3] et [4], on retrouve le fait que $K_{x, \overline{\Psi}} : \Pi^3 \rightarrow Z(\overline{G})$ est un 3-cocycle et que la cochaîne de composition $\varphi_*(K_{x, \overline{\Psi}}) = c_{x, \overline{\Psi}} : \Pi^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est un 3-cocycle borné qui représente par conséquent un élément de l'espace de cohomologie bornée $H_b^3(\Pi, \mathbb{R})$. Si l'on suppose enfin que $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(C)$ provient d'une extension de groupes, nous avons démontré dans [3] que l'application linéaire

$$\begin{array}{ccc}
 \delta : H_b^2(G, \mathbb{R})^\Pi & \longrightarrow & H_b^3(\Pi, \mathbb{R}) \\
 x & \longmapsto & [\varphi_*(K_{x, \overline{\Psi}})]
 \end{array}$$

appelée opérateur de transgression rend la suite (1) exacte.

4.4. UN REPRÉSENTANT CANONIQUE DE LA CLASSE DE COHOMOLOGIE $[\theta]$. Dans ce paragraphe, étant donnée une représentation extérieure $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(C)$ nous munissons l'espace d'homologie ℓ_1 -réduite $\overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ de la structure de Π -module de Banach induite par θ . Et, pour tout noyau abstrait (Ψ, f) de la représentation extérieure θ nous nous proposons de démontrer que la cochaîne bornée $\theta_{\Psi, f} : \Pi^3 \rightarrow Z_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ qui est définie par l'expression,

$$\theta_{\Psi, f}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{m}_2(\Psi(\alpha)(f(\beta, \gamma)), f(\alpha, \beta\gamma)) - \mathbf{m}_2(f(\alpha, \beta), f(\alpha\beta, \gamma)) \quad (23)$$

induit un 3-cocycle borné $\overline{\theta}_{\Psi, f} : \Pi^3 \xrightarrow{\theta_{\Psi, f}} Z_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}) \rightarrow \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ où $\mathbf{m}_2 : G^2 \rightarrow Z_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ désigne la 2-cochaîne définie par la formule (13). Nous montrerons dans la section suivante que la classe de cohomologie induite par ce cocycle ne dépend pas du noyau abstrait (Ψ, f) .

D'abord, rappelons que puisque pour tout 2-cobord borné $db \in B_b^2(G, \mathbb{R})$ on a,

$$\langle db, \mathbf{m}_2(g, h) \rangle = 0, \quad \forall g, h \in G$$

(cf. aff. 5) il en résulte que pour tout 2-cocycle borné $c \in Z_b^2(G, \mathbb{R})$ la 3-cochaîne bornée de composition $\varphi_*(K_{x, \overline{\Psi}}) = c_{x, \overline{\Psi}} : \Pi^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par la formule (20) peut être exprimée par le crochet de dualité,

$$c_{x, \overline{\Psi}}(\alpha, \beta, \gamma) = \langle c, \theta_{\Psi, f}(\alpha, \beta, \gamma) \rangle = \langle c_x, \theta_{\Psi, f}(\alpha, \beta, \gamma) \rangle \quad (24)$$

où c_x désigne l'unique 2-cocycle borné homogène qui représente la classe de cohomologie bornée $x = [c] \in H_b^2(G, \mathbb{R})$.

PROPOSITION 9. La cochaîne bornée $\overline{\theta}_{\Psi, f} : \Pi^3 \xrightarrow{\theta_{\Psi, f}} Z_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}) \rightarrow \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ qui est induite en homologie ℓ_1 -réduite par l'expression (23) est un 3-cocycle.

Démonstration. Notons que puisque la cochaîne $\mathbf{m}_2 : G^2 \rightarrow Z_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ annule le cobord des cochaînes bornées $b : G \rightarrow \mathbb{R}$ il en résulte immédiatement que :

$$\langle db, \theta_{\Psi, f} \rangle = 0 \quad \text{et que} \quad \langle db, d_{\Pi}(\theta_{\Psi, f}) \rangle = 0$$

où d_{Π} désigne la différentielle définie sur le complexe des cochaînes non homogènes définies sur le groupe Π à valeurs dans le Π -module de Banach $\overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$. Par conséquent, pour démontrer que la cochaîne $\overline{\theta}_{\Psi, f} : \Pi^3 \rightarrow \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ est un 3-cocycle, il suffit de démontrer que pour toute classe de

cohomologie bornée $x = [c_x] \in H_b^2(G, \mathbb{R})$ et pour tous les éléments α, β, γ et $\zeta \in \Pi$ le crochet de dualité,

$$\langle c_x, d_{\Pi}(\theta_{\Psi, f})(\alpha, \beta, \gamma, \zeta) \rangle,$$

est nul.

En effet, par définition de la différentielle d_{Π} on peut écrire :

$$\begin{aligned} \langle c_x, d_{\Pi}(\theta_{\Psi, f})(\alpha, \beta, \gamma, \zeta) \rangle &= \langle c_x, \Psi(\alpha)_*(\theta_{\Psi, f}(\beta, \gamma, \zeta)) \rangle \\ &\quad - \langle c_x, \theta_{\Psi, f}(\alpha\beta, \gamma, \zeta) \rangle \\ &\quad + \langle c_x, \theta_{\Psi, f}(\alpha, \beta\gamma, \zeta) \rangle - \langle c_x, \theta_{\Psi, f}(\alpha, \beta, \gamma\zeta) \rangle \\ &\quad + \langle c_x, \theta_{\Psi, f}(\alpha, \beta, \gamma) \rangle \\ &= \langle \Psi(\alpha)^*(c_x), \theta_{\Psi, f}(\beta, \gamma, \zeta) \rangle - c_{x, \bar{\Psi}}(\alpha\beta, \gamma, \zeta) \\ &\quad + c_{x, \bar{\Psi}}(\alpha, \beta\gamma, \zeta) - c_{x, \bar{\Psi}}(\alpha, \beta, \gamma\zeta) + c_{x, \bar{\Psi}}(\alpha, \beta, \gamma) \\ &= [\langle \Psi(\alpha)^*(c_x), \theta_{\Psi, f}(\beta, \gamma, \zeta) \rangle - c_{x, \bar{\Psi}}(\beta, \gamma, \zeta)] \\ &\quad + [c_{x, \bar{\Psi}}(\beta, \gamma, \zeta) - c_{x, \bar{\Psi}}(\alpha\beta, \gamma, \zeta) + c_{x, \bar{\Psi}}(\alpha, \beta\gamma, \zeta) \\ &\quad - c_{x, \bar{\Psi}}(\alpha, \beta, \gamma\zeta) + c_{x, \bar{\Psi}}(\alpha, \beta, \gamma)] \\ &= [\langle \Psi(\alpha)^*(c_x), \theta_{\Psi, f}(\beta, \gamma, \zeta) \rangle - c_{x, \bar{\Psi}}(\beta, \gamma, \zeta)] \\ &\quad + d(c_{x, \bar{\Psi}})(\alpha, \beta, \gamma, \zeta). \end{aligned}$$

Ainsi, si on applique la formule (22) du corollaire 4 qui nous donne :

$$d(c_{x, \bar{\Psi}})(\alpha, \beta, \gamma, \zeta) = c_{x, \bar{\Psi}}(\beta, \gamma, \zeta) - c_{\Psi_b(\alpha)(x), \bar{\Psi}}(\beta, \gamma, \zeta), \forall x \in H_b^2(G, \mathbb{R})$$

on déduit finalement que le crochet de dualité $\langle c_x, d_{\Pi}(\theta_{\Psi, f})(\alpha, \beta, \gamma, \zeta) \rangle$ est nul et que la 2-chaîne $d_{\Pi}(\theta_{\Psi, f})(\alpha, \beta, \gamma, \zeta) \in \overline{B_2^{\ell_1}}(G, \mathbb{R})$. Donc, si on passe dans le Π -module de Banach d'homologie ℓ_1 -réduite $\overline{H_2^{\ell_1}}(G, \mathbb{R})$ on obtient $d_{\Pi}(\overline{\theta}_{\Psi, f})(\alpha, \beta, \gamma, \zeta) = 0$. ■

4.5. LA CLASSE DE COHOMOLOGIE BORNÉE $[\overline{\theta}_{\Psi, f}]$ EST BIEN DÉFINIE. Dans ce paragraphe, nous nous proposons de démontrer que la classe de cohomologie $[\overline{\theta}_{\Psi, f}] \in H_b^3(\Pi, \overline{H_2^{\ell_1}}(G, \mathbb{R}))$ définie par l'expression (23) à partir du noyau abstrait (Ψ, f) ne dépend que de la représentation extérieure $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(C)$.

Pour cela, considérons deux noyaux abstraits (Ψ, f) et (Ψ', f') associés à la représentation extérieure $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(C)$. Observons que puisque pour

tout $\alpha \in \Pi$ les automorphismes $\Psi(\alpha)$ et $\Psi'(\alpha)$ représentent le même automorphisme extérieur $\theta(\alpha) \in \text{Out}(C)$, il existe une application $h : \Pi \rightarrow G$ telle que pour tout $\alpha \in \Pi$, $\Psi'(\alpha) = i_{h(\alpha)} \circ \Psi(\alpha)$. Ainsi, par définition des défauts f et $f' : \Pi^2 \rightarrow G$ il existe une cochaîne abélienne $z : \Pi^2 \rightarrow Z(G)$ qui les relie avec l'application $h : \Pi \rightarrow G$ dans la relation :

$$f'(\alpha, \beta)h(\alpha\beta)z(\alpha, \beta) = h(\alpha)\Psi(\alpha)(h(\beta))f(\alpha, \beta), \quad \forall \alpha, \beta \in \Pi. \tag{25}$$

Rappelons que dans le lemme 4, à partir des données précédentes nous avons construit des familles de bijections $\bar{\Psi} : \Pi \rightarrow \text{Sym}(\bar{G}, \mathbb{R})$ et $\bar{\Psi}' : \Pi \rightarrow \text{Sym}(\bar{G}, \mathbb{R})$ (cf. formule (16)) dont le défaut pour qu'elles soient des homomorphismes est donné respectivement par les applications, $F_x = s_x \circ f$ et $F'_x = s_x \circ f' : \Pi^2 \rightarrow \bar{G}$ (cf. l'assertion 4 du lemme 4).

Le lemme suivant joue un rôle crucial pour comparer les deux classes de cohomologie bornée $[\bar{\theta}_{\Psi, f}]$ et $[\bar{\theta}_{\Psi', f'}]$ dans le groupe $H_b^3(\Pi, \bar{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}))$.

LEMME 5. Avec les notations ci-dessus on a les propositions suivantes :

1. Il existe une application $h_0 : \Pi \rightarrow \bar{G}$ telle que pour tout $\alpha \in \Pi$, $i_{h_0(\alpha)} \circ \bar{\Psi}(\alpha) = \bar{\Psi}'(\alpha)$.
2. Il existe une cochaîne abélienne $\bar{b} : \Pi^2 \rightarrow Z(\bar{G})$ telle que pour tous α et $\beta \in \Pi$,

$$\bar{b}(\alpha, \beta)F'_x(\alpha, \beta)h_0(\alpha\beta) = h_0(\alpha)\bar{\Psi}(\alpha)(h_0(\beta))F_x(\alpha, \beta).$$

3. La cochaîne réelle $\varphi_*(\bar{b}) : \Pi^2 \xrightarrow{\bar{b}} Z(\bar{G}) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ est égale au crochet de dualité $\varphi_*(\bar{b}) = \langle c_x, \lambda \rangle$ où $\lambda : \Pi^2 \rightarrow Z_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ est une cochaîne bornée qui associe à chaque couple $(\alpha, \beta) \in \Pi^2$ un 2-cycle qui représente une classe d'homologie ℓ_1 -réduite donnée par l'expression :

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(\alpha, \beta) &= \bar{\mathbf{m}}_2(h(\alpha), \Psi(\alpha)(h(\beta))) + \bar{\mathbf{m}}_2(\Psi(\alpha)(h(\beta)), f(\alpha, \beta)) \\ &\quad - \bar{\mathbf{m}}_2(f'(\alpha, \beta), h(\alpha\beta)) \in \bar{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}) \end{aligned} \tag{26}$$

et où $\bar{\mathbf{m}}_2 : G^2 \rightarrow Z_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ désigne la cochaîne définie par l'expression (13).

Démonstration. 1) Puisque pour tout $\alpha \in \Pi$ on sait que, $\Psi'(\alpha) = i_{h(\alpha)} \circ \Psi(\alpha)$, en posant $h_0(\alpha) = s_x \circ h(\alpha) \in \bar{G}$ la formule (16) qui définit la famille de

bijections $\bar{\Psi}' : \Pi \rightarrow \text{Sym}(\bar{G}, \mathbb{R})$ permet de voir que pour tout élément $\bar{g} \in \bar{G}$ on a

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}'(\alpha)(\bar{g}) &= s_x(\Psi'(\alpha)(p(\bar{g}))\varphi(\bar{g})) \\ &= s_x(i_{h(\alpha)} \circ \Psi(\alpha)(p(\bar{g}))\varphi(\bar{g})) \\ &= s_x \circ p(i_{h_0(\alpha)} \circ \bar{\Psi}(\alpha)(\bar{g}))\varphi(\bar{g}). \end{aligned}$$

En remarquant que l'application $s_x \circ p : \bar{G} \rightarrow \bar{G}$ commute avec la conjugaison dans le groupe \bar{G} (cf. aff. 4), on déduit que $\bar{\Psi}'(\alpha) = i_{h_0(\alpha)} \circ \bar{\Psi}(\alpha)$.

2) Observons que si pour tous les éléments α et β du groupe Π on compose l'expression $\bar{\Psi}'(\alpha) = i_{h_0(\alpha)} \circ \bar{\Psi}(\alpha)$ avec $\bar{\Psi}'(\beta) = i_{h_0(\beta)} \circ \bar{\Psi}(\beta)$, on obtient par application de la formule (4) du lemme 4 qu'on a

$$\bar{\Psi}'(\alpha) \circ \bar{\Psi}'(\beta) = i_{h_0(\alpha)\bar{\Psi}(\alpha)(h_0(\beta))F_x(\alpha,\beta)} \circ \bar{\Psi}(\alpha\beta).$$

D'autre part, puisque on a $\bar{\Psi}'(\alpha) \circ \bar{\Psi}'(\beta) = i_{F'_x(\alpha,\beta)} \circ \bar{\Psi}'(\alpha\beta) = i_{F'_x(\alpha,\beta)h_0(\alpha\beta)} \circ \bar{\Psi}(\alpha\beta)$ on en déduit l'égalité des automorphismes intérieurs :

$$i_{h_0(\alpha)\bar{\Psi}(\alpha)(h_0(\beta))F_x(\alpha,\beta)} = i_{F'_x(\alpha,\beta)h_0(\alpha\beta)}.$$

Un automorphisme intérieur n'étant défini qu'à un élément du centre près, il existe donc une cochaîne abélienne $\bar{b} : \Pi^2 \rightarrow Z(\bar{G})$ qui réalise la relation recherchée,

$$\bar{b}(\alpha, \beta)F'_x(\alpha, \beta)h_0(\alpha\beta) = h_0(\alpha)\bar{\Psi}(\alpha)(h_0(\beta))F_x(\alpha, \beta), \quad \forall \alpha, \beta \in \Pi.$$

3) Pour pouvoir écrire la 2-cochaîne réelle $\varphi_*(\bar{b}) : \Pi^2 \rightarrow \mathbb{R}$ au moyen d'un crochet de dualité, nous allons développer dans le groupe \bar{G} les deux membres de la relation établie dans 2) comme suit.

a) Premièrement, notons que puisque le 2-cocycle $c_x : G^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est égal au défaut de la section $s_x : G \rightarrow \bar{G}$ on peut écrire,

$$\begin{aligned} \bar{b}(\alpha, \beta)F'_x(\alpha, \beta)h_0(\alpha\beta) &= \bar{b}(\alpha, \beta)s_x \circ f'(\alpha, \beta)s_x \circ h(\alpha\beta) \\ &= \bar{b}(\alpha, \beta)c_x(f'(\alpha, \beta), h(\alpha\beta))s_x(f'(\alpha, \beta)h(\alpha\beta)). \end{aligned}$$

b) D'autre part, si l'on exprime la bijection $\bar{\Psi}(\alpha)$ à l'aide de (16) et si on

utilise la propriété $\varphi \circ s_x = 0$ on obtient :

$$\begin{aligned}
h_0(\alpha)\overline{\Psi}(\alpha)(h_0(\beta))F_x(\alpha, \beta) &= s_x \circ h(\alpha)s_x(\Psi(\alpha)(h(\beta)))s_x \circ f(\alpha, \beta)j \\
&\quad \circ \varphi \circ s_x(h(\beta)) \\
&= c_x(h(\alpha), \Psi(\alpha)(h(\beta))) \\
&\quad s_x(h(\alpha)\Psi(\alpha)(h(\beta)))s_x(f(\alpha, \beta)) \\
&= c_x(h(\alpha), \Psi(\alpha)(h(\beta)))c_x(\Psi(\alpha)(h(\beta)), f(\alpha, \beta)) \\
&\quad s_x(h(\alpha)\Psi(\alpha)(h(\beta)))f(\alpha, \beta).
\end{aligned}$$

Ainsi, si maintenant on applique l'expression (25) qui relie les défauts respectifs f et f' des relèvements ensemblistes Ψ et Ψ' de la représentation extérieure $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(C)$ i.e.,

$$f'(\alpha, \beta)h(\alpha\beta)z(\alpha, \beta) = h(\alpha)\Psi(\alpha)(h(\beta))f(\alpha, \beta), \quad z(\alpha, \beta) \in Z(G), \forall \alpha, \beta \in \Pi$$

on pourra alors réécrire l'élément $h_0(\alpha)\overline{\Psi}(\alpha)(h_0(\beta))F_x(\alpha, \beta)$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
h_0(\alpha)\overline{\Psi}(\alpha)(h_0(\beta))F_x(\alpha, \beta) &= c_x(h(\alpha), \Psi(\alpha)(h(\beta)))c_x(\Psi(\alpha)(h(\beta)), f(\alpha, \beta)) \\
&\quad s_x(f'(\alpha, \beta)h(\alpha\beta)z(\alpha, \beta)).
\end{aligned}$$

c) Et, puisque pour tous $g \in G$ et $z \in Z(G)$ on sait que $s_x(gz) = s_x(g) \cdot s_x(z) \in \overline{G}$ (cf. aff. 4) on déduit de ce qui précède que

$$\begin{aligned}
\overline{b}(\alpha, \beta) &= c_x(h(\alpha), \Psi(\alpha)(h(\beta))) + c_x(\Psi(\alpha)(h(\beta)), f(\alpha, \beta)) \\
&\quad - c_x(f'(\alpha, \beta), h(\alpha\beta)) + s_x(z(\alpha, \beta)) \\
&= \langle c_x, \lambda(\alpha, \beta) \rangle + s_x(z(\alpha, \beta))
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\lambda(\alpha, \beta) &= \mathbf{m}_2(h(\alpha), \Psi(\alpha)(h(\beta))) \\
&\quad + \mathbf{m}_2(\Psi(\alpha)(h(\beta)), f(\alpha, \beta)) \\
&\quad - \mathbf{m}_2(f'(\alpha, \beta), h(\alpha\beta)).
\end{aligned}$$

Enfin, si on applique le quasi-morphisme homogène $\varphi : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$ sur la dernière expression de l'élément $\overline{b}(\alpha, \beta) \in Z(\overline{G})$ on obtient $\varphi_*(\overline{b})(\alpha, \beta) = \langle c_x, \lambda(\alpha, \beta) \rangle$ car $\varphi \circ s_x = 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = t$. ■

Pour finir cette section nous allons démontrer la proposition suivante qui affirme que la classe de cohomologie bornée $[\theta_{\Psi, f}] \in H_b^3(\Pi, \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}))$ ne dépend pas du noyau abstrait choisi (Ψ, f) .

PROPOSITION 10. *Le cobord de la cochaîne bornée $\bar{\lambda} : \Pi^2 \rightarrow \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ qui est définie par l'expression (26) est égal à $d\bar{\lambda} = \bar{\theta}_{\Psi', f'} - \bar{\theta}_{\Psi, f}$.*

En conséquence, la classe de cohomologie bornée $[\theta_{\Psi, f}] \in H_b^3(\Pi, \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}))$ ne dépend que de la représentation extérieure $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(C)$.

Démonstration. Pour démontrer que le cobord $d\bar{\lambda} : \Pi^3 \rightarrow \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ est égal à la différence $\bar{\theta}_{\Psi', f'} - \bar{\theta}_{\Psi, f}$ nous développerons ci-dessous le produit

$$L' = h_0(\alpha)\bar{\Psi}(\alpha)[h_0(\beta)\bar{\Psi}(\beta)(h_0(\gamma))F_x(\beta, \gamma)]F_x(\alpha, \beta\gamma)$$

dans le groupe \overline{G} de deux façons.

1) Dans le premier développement de l'élément $L' \in \overline{G}$, nous allons utiliser l'expression $\bar{\Psi}(\alpha) \circ \bar{\Psi}(\beta) = i_{F_x(\alpha, \beta)} \circ \bar{\Psi}(\alpha\beta)$ (cf. lemme 4) et la formule (17) de la proposition 6 qui contrôle la déviation de la bijection $\bar{\Psi}(\alpha) : \overline{G} \rightarrow \overline{G}$ à être un homomorphisme.

$$\begin{aligned} L' &= h_0(\alpha)\bar{\Psi}(\alpha)[h_0(\beta)\bar{\Psi}(\beta)(h_0(\gamma))F_x(\beta, \gamma)]F_x(\alpha, \beta\gamma) \\ &= h_0(\alpha)\bar{\Psi}(\alpha)(h_0(\beta))[\bar{\Psi}(\alpha)(\bar{\Psi}(\beta)(h_0(\gamma))F_x(\beta, \gamma))]F_x(\alpha, \beta\gamma) \\ &\quad [c_x(h(\alpha), \Psi(\beta)(h(\gamma)))f(\beta, \gamma)(\Psi(\alpha))^*(c_x)(h(\beta), \Psi(\beta)(h(\gamma)))f(\beta, \gamma))^{-1}] \\ &= h_0(\alpha)\bar{\Psi}(\alpha)(h_0(\beta))[\bar{\Psi}(\alpha) \circ \bar{\Psi}(\beta)(h_0(\gamma))\bar{\Psi}(\alpha)(F_x(\beta, \gamma))]F_x(\alpha, \beta\gamma) \\ &\quad [c_x(\Psi(\beta)(h(\gamma)), f(\beta, \gamma))(\Psi(\alpha))^*(c_x)(\Psi(\beta)(h(\gamma)), f(\beta, \gamma))^{-1}] \\ &\quad [c_x(h(\alpha), \Psi(\beta)(h(\gamma)))f(\beta, \gamma)(\Psi(\alpha))^*(c_x)(h(\beta), \Psi(\beta)(h(\gamma)))f(\beta, \gamma))^{-1}] \\ &= [h_0(\alpha)\bar{\Psi}(\alpha)(h_0(\beta))F_x(\alpha, \beta)][\bar{\Psi}(\alpha\beta)(h_0(\gamma))F_x(\alpha, \beta)^{-1}] \\ &\quad [\bar{\Psi}(\alpha)(F_x(\beta, \gamma))]F_x(\alpha, \beta\gamma) \\ &\quad [c_x(\Psi(\beta)(h(\gamma)), f(\beta, \gamma))(\Psi(\alpha))^*(c_x)(\Psi(\beta)(h(\gamma)), f(\beta, \gamma))^{-1}] \\ &\quad [c_x(h(\alpha), \Psi(\beta)(h(\gamma)))f(\beta, \gamma)(\Psi(\alpha))^*(c_x)(h(\beta), \Psi(\beta)(h(\gamma)))f(\beta, \gamma))^{-1}]. \end{aligned}$$

Pour poursuivre ce développement de l'élément $L' \in \overline{G}$ nous allons utiliser l'expression de la cochaîne abélienne $\bar{b} : \Pi^2 \rightarrow Z(\overline{G})$ du lemme 5 et l'expression (18) i.e.

$$K_{x, \bar{\Psi}}(\alpha, \beta, \gamma) = \bar{\Psi}(\alpha)(F_x(\beta, \gamma))F_x(\alpha, \beta\gamma)F_x(\alpha\beta, \gamma)^{-1}F_x(\alpha, \beta)^{-1}$$

associée au noyau abstrait (Ψ, f) .

$$\begin{aligned}
L' &= [\bar{b}(\alpha, \beta)F'_x(\alpha, \beta)h_0(\alpha\beta)][\bar{\Psi}(\alpha\beta)(h_0(\gamma))F_x(\alpha, \beta)^{-1}] \\
&\quad [K_{x, \bar{\Psi}}(\alpha, \beta, \gamma)F_x(\alpha, \beta)F_x(\alpha\beta, \gamma)] \\
&\quad [c_x(\Psi(\beta)(h(\gamma)), f(\beta, \gamma))(\Psi(\alpha))^*(c_x)(\Psi(\beta)(h(\gamma)), f(\beta, \gamma))^{-1}] \\
&\quad [c_x(h(\alpha), \Psi(\beta)(h(\gamma))f(\beta, \gamma))(\Psi(\alpha))^*(c_x)(h(\beta), \Psi(\beta)(h(\gamma))f(\beta, \gamma))^{-1}] \\
&= [\bar{b}(\alpha, \beta)K_{x, \bar{\Psi}}(\alpha, \beta, \gamma)]F'_x(\alpha, \beta)[h_0(\alpha\beta)\bar{\Psi}(\alpha\beta)(h_0(\gamma))F_x(\alpha\beta, \gamma)] \\
&\quad [c_x(\Psi(\beta)(h(\gamma)), f(\beta, \gamma))(\Psi(\alpha))^*(c_x)(\Psi(\beta)(h(\gamma)), f(\beta, \gamma))^{-1}] \\
&\quad [c_x(h(\alpha), \Psi(\beta)(h(\gamma))f(\beta, \gamma))(\Psi(\alpha))^*(c_x)(h(\beta), \Psi(\beta)(h(\gamma))f(\beta, \gamma))^{-1}] \\
&= [\bar{b}(\alpha, \beta)\bar{b}(\alpha\beta, \gamma)K_{x, \bar{\Psi}}(\alpha, \beta, \gamma)][F'_x(\alpha, \beta)F'_x(\alpha\beta, \gamma)h_0(\alpha\beta\gamma)] \\
&\quad [c_x(\Psi(\beta)(h(\gamma)), f(\beta, \gamma))(\Psi(\alpha))^*(c_x)(\Psi(\beta)(h(\gamma)), f(\beta, \gamma))^{-1}] \\
&\quad [c_x(h(\alpha), \Psi(\beta)(h(\gamma))f(\beta, \gamma))(\Psi(\alpha))^*(c_x)(h(\beta), \Psi(\beta)(h(\gamma))f(\beta, \gamma))^{-1}].
\end{aligned}$$

2) Dans le deuxième développement de l'élément $L' \in \bar{G}$, nous allons utiliser la formule (18) qui donne l'expression des cochaînes $K_{x, \bar{\Psi}}$ et $K_{x, \bar{\Psi}'}$: $\Pi^3 \rightarrow Z(\bar{G})$ et le fait que la bijection $\bar{\Psi}(\alpha) : \bar{G} \rightarrow \bar{G}$ vérifie la relation $\bar{\Psi}(\alpha)(\bar{g} \bar{z}) = \bar{\Psi}(\alpha)(\bar{g})\bar{\Psi}(\alpha)(\bar{z})$ pour tous $\bar{g} \in \bar{G}$ et $\bar{z} \in Z(\bar{G})$ (cf. lemme 4). De même, nous allons utiliser l'existence de $h_0 : \Pi \rightarrow \bar{G}$ tel que pour tout $\alpha \in \Pi$, $\bar{\Psi}'(\alpha) = i_{h_0(\alpha)} \circ \bar{\Psi}(\alpha)$ prouvée dans le lemme 5.

$$\begin{aligned}
L' &= h_0(\alpha)\bar{\Psi}(\alpha)[h_0(\beta)\bar{\Psi}(\beta)(h_0(\gamma))F_x(\beta, \gamma)]F_x(\alpha, \beta\gamma) \\
&= h_0(\alpha)\bar{\Psi}(\alpha)[\bar{b}(\beta, \gamma)F'_x(\beta, \gamma)h_0(\beta\gamma)]F_x(\alpha, \beta\gamma) \\
&= \bar{\Psi}(\alpha)(\bar{b}(\beta, \gamma))[h_0(\alpha)\bar{\Psi}(\alpha)(F'_x(\beta, \gamma)h_0(\beta\gamma))]F_x(\alpha, \beta\gamma) \\
&= \bar{\Psi}(\alpha)(\bar{b}(\beta, \gamma))[h_0(\alpha)\bar{\Psi}(\alpha)(F'_x(\beta, \gamma))\bar{\Psi}(\alpha)(h_0(\beta\gamma))F_x(\alpha, \beta\gamma) \\
&\quad [c_x(f'(\beta, \gamma), h(\beta\gamma))(\Psi(\alpha))^*(c_x)(f'(\beta, \gamma), h(\beta\gamma))^{-1}] \\
&= \bar{\Psi}(\alpha)(\bar{b}(\beta, \gamma))[h_0(\alpha)\bar{\Psi}(\alpha)(F'_x(\beta, \gamma))h_0(\alpha)^{-1}] \\
&\quad [h_0(\alpha)\bar{\Psi}(\alpha)(h_0(\beta\gamma))F_x(\alpha, \beta\gamma) \\
&\quad [c_x(f'(\beta, \gamma), h(\beta\gamma))(\Psi(\alpha))^*(c_x)(f'(\beta, \gamma), h(\beta\gamma))^{-1}] \\
&= \bar{\Psi}(\alpha)(\bar{b}(\beta, \gamma))[\bar{\Psi}'(\alpha)(F'_x(\beta, \gamma))][\bar{b}(\alpha, \beta\gamma)F'_x(\alpha, \beta\gamma)h_0(\alpha\beta\gamma)] \\
&\quad [c_x(f'(\beta, \gamma), h(\beta\gamma))(\Psi(\alpha))^*(c_x)(f'(\beta, \gamma), h(\beta\gamma))^{-1}] \\
&= \bar{\Psi}(\alpha)(\bar{b}(\beta, \gamma))\bar{b}(\alpha, \beta\gamma)[K_{x, \bar{\Psi}'}(\alpha, \beta, \gamma)F'_x(\alpha, \beta)F'_x(\alpha\beta, \gamma)]h_0(\alpha\beta\gamma) \\
&\quad [c_x(f'(\beta, \gamma), h(\beta\gamma))(\Psi(\alpha))^*(c_x)(f'(\beta, \gamma), h(\beta\gamma))^{-1}].
\end{aligned}$$

3) Si on simplifie par $F'_x(\alpha, \beta)F'_x(\alpha\beta, \gamma)h_0(\alpha\beta\gamma) \in \overline{G}$ qui apparaît dans les deux développements précédents de $L' \in \overline{G}$ on pourra écrire dans le sous-groupe abélien additif $(Z(\overline{G}), +)$ que :

$$\begin{aligned}
 K_{x, \overline{\Psi}}(\alpha, \beta, \gamma) &= K_{x, \overline{\Psi}'}(\alpha, \beta, \gamma) + \overline{\Psi}(\alpha)(\overline{b}(\beta, \gamma)) - \overline{b}(\alpha\beta, \gamma) + \overline{b}(\alpha, \beta\gamma) \\
 &\quad - \overline{b}(\alpha, \beta) + c_x(f'(\beta, \gamma), h(\beta\gamma)) \\
 &\quad - (\Psi(\alpha))_*(c_x)(f'(\beta, \gamma), h(\beta\gamma)) - c_x(\Psi(\beta)(h(\gamma)), f(\beta, \gamma)) \\
 &\quad + (\Psi(\alpha))_*(c_x)(\Psi(\beta)(h(\gamma)), f(\beta, \gamma)) \\
 &\quad - c_x(h(\beta), \Psi(\beta)(h(\gamma)))f(\beta, \gamma) \\
 &\quad + (\Psi(\alpha))_*(c_x)(h(\beta), \Psi(\beta)(h(\gamma)))f(\beta, \gamma) \\
 &= K_{x, \overline{\Psi}'}(\alpha, \beta, \gamma) + \overline{\Psi}(\alpha)(\overline{b}(\beta, \gamma)) - \overline{b}(\alpha\beta, \gamma) + \overline{b}(\alpha, \beta\gamma) \\
 &\quad - \overline{b}(\alpha, \beta) - \langle c_x, \lambda(\beta, \gamma) \rangle + \langle (\Psi(\alpha))^*(c_x), \lambda(\beta, \gamma) \rangle
 \end{aligned}$$

où $\lambda : \Pi^2 \rightarrow Z(\overline{G})$ désigne la cochaîne définie dans le lemme 5 par, $\varphi_*(\overline{b}) = \langle c_x, \lambda \rangle$.

Enfin, puisque le quasi-morphisme homogène $\varphi : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$ est $\overline{\Psi}$ -invariant (cf. lemme 4),

$$\varphi(\overline{\Psi}(\alpha)(\overline{g})) = \varphi(\overline{g}), \quad \forall \alpha \in \Pi, \overline{g} \in \overline{G}$$

et que pour tous α, β et $\gamma \in \Pi$ on a $\varphi(K_{x, \overline{\Psi}}(\alpha, \beta, \gamma)) = \langle c_x, \theta_{\psi, f}(\alpha, \beta, \gamma) \rangle$ on obtient,

$$\begin{aligned}
 \langle c_x, \theta_{\psi, f}(\alpha, \beta, \gamma) - \theta_{\Psi', f'}(\alpha, \beta, \gamma) \rangle &= \varphi(K_{x, \overline{\Psi}}(\alpha, \beta, \gamma)) - \varphi(K_{x, \overline{\Psi}'}(\alpha, \beta, \gamma)) \\
 &= \langle c_x, \lambda(\beta, \gamma) \rangle - \langle c_x, \lambda(\alpha\beta, \gamma) \rangle \\
 &\quad + \langle c_x, \lambda(\alpha, \beta\gamma) \rangle - \langle c_x, \lambda(\alpha, \beta) \rangle \\
 &\quad - \langle c_x, \lambda(\beta, \gamma) \rangle \\
 &\quad + \langle c_x, (\Psi(\alpha))_*(\lambda)(\beta, \gamma) \rangle \\
 &= - \langle c_x, \lambda(\alpha\beta, \gamma) \rangle + \langle c_x, \lambda(\alpha, \beta\gamma) \rangle \\
 &\quad - \langle c_x, \lambda(\alpha, \beta) \rangle \\
 &\quad + \langle c_x, (\Psi(\alpha))_*(\lambda)(\beta, \gamma) \rangle \\
 &= \langle c_x, d\lambda(\alpha, \beta, \gamma) \rangle .
 \end{aligned}$$

Ainsi, en passant dans l'espace d'homologie ℓ_1 -réduite $\overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ on déduit de ce qui précède qu'on a finalement $\overline{\theta}_{\Psi, f} - \overline{\theta}_{\Psi', f'} = d\overline{\lambda}$. ■

5. EXPRESSION DE LA DIFFÉRENTIELLE d_3

Considérons une extension de groupes discrets $1 \longrightarrow G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \longrightarrow 1$ et fixons une section ensembliste $s : \Pi \rightarrow \Gamma$ pour l'homomorphisme surjectif σ . Rappelons qu'un noyau abstrait (Ψ_s, f) peut être associé à la section $s : \Pi \rightarrow \Gamma$ par les expressions suivantes,

$$f(\alpha, \beta) = s(\alpha)s(\beta)[s(\alpha\beta)]^{-1}, \quad \Psi_s(\alpha)(g) = s(\alpha)gs(\alpha)^{-1}, \quad \forall \alpha, \beta \in \Pi, g \in G.$$

Ainsi, puisque pour tous les éléments α et $\beta \in \Pi$ on a $\Psi_s(\alpha) \circ \Psi_s(\beta) = i_{f(\alpha, \beta)} \circ \Psi_s(\alpha\beta)$ on déduit que l'application $\Psi_s : \Pi \rightarrow \text{Aut}(G)$ induit un homomorphisme au niveau des automorphismes extérieurs qu'on notera $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(C)$.

Dans le reste de cette section on pose $\Psi := \Psi_s$.

Rappelons aussi que dans la section 4, en munissant l'espace d'homologie ℓ_1 -réduite $\overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ par la structure de Π -module de Banach qui est induite par $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(C)$, nous avons démontré que pour tout noyau abstrait (Ψ, f) l'expression (23),

$$\begin{aligned} \overline{\theta}_{\Psi, f}(\alpha, \beta, \gamma) &= \overline{\mathbf{m}}_2(\Psi(\alpha)(f(\beta, \gamma), f(\alpha, \beta\gamma))) \\ &\quad - \overline{\mathbf{m}}_2(f(\alpha, \beta), f(\alpha\beta, \gamma)), \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \Pi \end{aligned}$$

définit un 3-cocycle borné $\overline{\theta}_{\Psi, f} : \Pi^3 \longrightarrow \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ dont la classe de cohomologie bornée associée $[\overline{\theta}_{\Psi, f}] \in H_b^3(\Pi, \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}))$ dépend seulement de $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(C)$.

De même, rappelons que dans le théorème principal A de la section 3 nous avons démontré que l'expression (13)

$$\mathbf{m}_2(g, h) = (g, h) - \mathbf{m}(g) + \mathbf{m}(gh) - \mathbf{m}(h) = (g, h) - \mathbf{m} \circ \partial_2(g, h), \quad \forall g, h \in G$$

induit un 2-cocycle borné homogène $\overline{\mathbf{m}}_2 : G^2 \rightarrow \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ qui représente une classe de cohomologie bornée $\mathbf{g}_2 \in H_b^2(G, \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}))$ unique pour la relation suivante,

$$x \cup \mathbf{g}_2 = x, \quad \forall x \in H_b^2(G, \mathbb{R}).$$

5.1. LA DIFFÉRENTIELLE d_{3, ℓ_1} ENVOIE \mathbf{g}_2 SUR $[\theta]$. Soient $1 \longrightarrow G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \longrightarrow 1$ une extension de groupes discrets et $s : \Pi \rightarrow \Gamma$ une section ensembliste de l'homomorphisme surjectif σ . Puisque pour tout élément $\gamma \in \Gamma$

on a $\sigma(\gamma) = \sigma(s \circ \sigma(\gamma))$ on peut définir une application $h : \Gamma \rightarrow G$ en posant pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$\gamma = h(\gamma).s \circ \sigma(\gamma).$$

Il résulte de la définition de l'application $h : \Gamma \rightarrow G$ que

$$h(g) = g, \quad \forall g \in G.$$

PROPOSITION 11. *L'image réciproque $\sigma^*(\bar{\theta}_{\psi,f}) : \Gamma^3 \rightarrow \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ est égale au cobord de la chaîne bornée $\bar{T} : \Gamma^2 \rightarrow \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ qui est définie par l'expression,*

$$\begin{aligned} \bar{T}(\gamma_1, \gamma_2) = & \overline{\mathbf{m}}_2(f(\sigma(\gamma_1), \sigma(\gamma_2)), h(\gamma_1\gamma_2)^{-1}) \\ & - \overline{\mathbf{m}}_2(\Psi(\sigma(\gamma_1))(h(\gamma_2)^{-1}), h(\gamma_1)^{-1}). \end{aligned} \quad (27)$$

En conséquence, la classe de cohomologie bornée $\sigma_b([\theta_{\psi,f}]) \in H_b^3(\Gamma, \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}))$ est nulle.

Tout le reste de la section sera consacré à la démonstration de la proposition 11.

Soit $x \in H_b^2(G, \mathbb{R})$ une classe de cohomologie bornée et $0 \rightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{j} \overline{G} \xrightarrow{s_x} G \xrightarrow{p} 1$ l'extension centrale qui lui est associée (cf. 3.4.2). Posons,

$$h_x = s_x \circ h : \Gamma \rightarrow \overline{G} \quad \text{et} \quad F_x = s_x \circ f : \Pi^2 \rightarrow \overline{G}$$

les relèvements respectifs sur \overline{G} des applications $h : \Gamma \rightarrow G$ et $f : \Pi \times \Pi \rightarrow G$.

AFFIRMATION 7. *Avec les notations ci-dessus la chaîne non abélienne $F_x(\sigma, \sigma) : \Gamma^2 \rightarrow \overline{G}$ s'écrit sous la forme,*

$$\begin{aligned} F_x(\sigma(\gamma_1), \sigma(\gamma_2)) = & \overline{\Psi}(\sigma(\gamma_1))(h_x(\gamma_2)^{-1})h_x(\gamma_1)^{-1}h_x(\gamma_1\gamma_2) \\ & \langle c_x, T(\gamma_1, \gamma_2) \rangle \end{aligned} \quad (28)$$

où $T : \Gamma^2 \rightarrow Z_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ est un représentant de la 2-cochaîne bornée $\bar{T} : \Gamma \rightarrow \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ définie par l'expression (27) et où $\overline{\Psi} : \Pi \rightarrow \text{Sym}(\overline{G}, \mathbb{R})$ désigne la famille de bijections définies dans le lemme 4 par l'expression (16).

Démonstration. Avant d'établir l'expression (28) nous allons d'abord exprimer l'application $f(\sigma, \sigma) : \Gamma^2 \longrightarrow G$ en fonction des applications $\Psi : \Pi \longrightarrow \text{Aut}(G)$ et $h : \Gamma \longrightarrow G$.

D'abord observons que pour tous les éléments γ_1 et $\gamma_2 \in \Gamma$ on peut écrire

$$\begin{aligned} f(\sigma(\gamma_1), \sigma(\gamma_2)) &= s \circ \sigma(\gamma_1) s \circ \sigma(\gamma_2) s \circ \sigma(\gamma_1 \gamma_2)^{-1} \\ &= [s(\sigma(\gamma_1)) h(\gamma_2)^{-1} s(\sigma(\gamma_1))^{-1}] s \circ \sigma(\gamma_1) \gamma_2 s \circ \sigma(\gamma_1 \gamma_2)^{-1} \\ &= \Psi(\sigma(\gamma_1))(h(\gamma_2)^{-1}) h(\gamma_1)^{-1} h(\gamma_1 \gamma_2). \end{aligned}$$

Ensuite, développons l'expression $s_x \circ f(\sigma(\gamma_1), \sigma(\gamma_2)) \in \overline{G}$ tout en utilisant le fait que le défaut de la section $s_x : G \rightarrow \overline{G}$ est égal à l'unique 2-cocycle borné homogène $c_x : G^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ qui représente la classe de cohomologie $x \in H_b^2(G, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} F_x(\sigma(\gamma_1), \sigma(\gamma_2)) &= s_x \circ f(\sigma(\gamma_1), \sigma(\gamma_2)) \\ &= s_x[\Psi(\sigma(\gamma_1))(h(\gamma_2)^{-1}) h(\gamma_1)^{-1} h(\gamma_1 \gamma_2)] \\ &= s_x[\Psi(\sigma(\gamma_1))(h(\gamma_2)^{-1})] s_x[h(\gamma_1)^{-1} h(\gamma_1 \gamma_2)] \\ &\quad c_x(\Psi(\sigma(\gamma_1))(h(\gamma_2)^{-1}), h(\gamma_1)^{-1} h(\gamma_1 \gamma_2))^{-1} \\ &= s_x[\Psi(\sigma(\gamma_1))(h(\gamma_2)^{-1})] s_x(h(\gamma_1)^{-1}) s_x(h(\gamma_1 \gamma_2)) \\ &\quad c_x(\Psi(\sigma(\gamma_1))(h(\gamma_2)^{-1}), h(\gamma_1)^{-1} h(\gamma_1 \gamma_2))^{-1} \\ &\quad c_x(h(\gamma_1)^{-1}, h(\gamma_1 \gamma_2))^{-1}. \end{aligned}$$

Par conséquent, si on se rappelle que la bijection $\overline{\Psi}(\alpha) : \overline{G} \longrightarrow \overline{G}$ est définie par la formule (16),

$$\overline{\Psi}(\alpha)(\overline{g}) = s_x(\Psi(\alpha)(p(\overline{g}))) \varphi(\overline{g})$$

et que $\varphi \circ s_x = 0$, on pourra réécrire l'expression précédente sous la forme :

$$\begin{aligned} F_x(\sigma(\gamma_1), \sigma(\gamma_2)) &= \overline{\Psi}(\sigma(\gamma_1))(h_x(\gamma_2)^{-1}) s_x(h(\gamma_1)^{-1}) s_x(h(\gamma_1 \gamma_2)) k(\gamma_1, \gamma_2) \\ &= \overline{\Psi}(\sigma(\gamma_1))(h_x(\gamma_2)^{-1}) h_x(\gamma_1)^{-1} h_x(\gamma_1 \gamma_2) k(\gamma_1, \gamma_2) \end{aligned}$$

où $k : \Gamma^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ désigne la cochaîne bornée définie par,

$$k(\gamma_1, \gamma_2) = -c_x(h(\gamma_1)^{-1}, h(\gamma_1 \gamma_2)) - c_x(\Psi(\sigma(\gamma_1))(h(\gamma_2)^{-1}), h(\gamma_1)^{-1} h(\gamma_1 \gamma_2)).$$

Il est clair que pour aboutir à la formule (28), il suffit qu'on démontre que la 2-cochaîne bornée $k : \Gamma^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est égale au crochet de dualité, $k(\gamma_1, \gamma_2) = \langle$

$c_x, T(\gamma_1, \gamma_2) \rangle$, où $T : \Gamma^2 \longrightarrow Z_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ désigne un représentant de la cochaîne bornée \bar{T} qui est définie par l'expression (27).

En effet, puisque $c_x : G^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est un 2-cocycle borné homogène ceci nous permet d'écrire pour tous $\alpha = \Psi(\sigma(\gamma_1))(h(\gamma_2)^{-1}), \beta = h(\gamma_1)^{-1}$ et $\gamma = h(\gamma_1\gamma_2) \in G$ qu'on a :

$$\begin{aligned}
 0 &= dc_x(\alpha, \beta, \gamma) = dc_x(\Psi(\sigma(\gamma_1))(h(\gamma_2)^{-1}), h(\gamma_1)^{-1}, h(\gamma_1\gamma_2)) \\
 &= c_x(h(\gamma_1)^{-1}, h(\gamma_1\gamma_2)) - c_x(\Psi(\sigma(\gamma_1))(h(\gamma_2)^{-1})h(\gamma_1)^{-1}, h(\gamma_1\gamma_2)) \\
 &\quad + c_x(\Psi(\sigma(\gamma_1))(h(\gamma_2)^{-1}), h(\gamma_1)^{-1}h(\gamma_1\gamma_2)) \\
 &\quad - c_x(\Psi(\sigma(\gamma_1))(h(\gamma_2)^{-1}), h(\gamma_1)^{-1}) \\
 &= [c_x(h(\gamma_1)^{-1}, h(\gamma_1\gamma_2)) + c_x(\Psi(\sigma(\gamma_1))(h(\gamma_2)^{-1}), h(\gamma_1)^{-1}h(\gamma_1\gamma_2))] \\
 &\quad - [c_x(\Psi(\sigma(\gamma_1))(h(\gamma_2)^{-1})h(\gamma_1)^{-1}, h(\gamma_1\gamma_2)) \\
 &\quad \quad + c_x(\Psi(\sigma(\gamma_1))(h(\gamma_2)^{-1}), h(\gamma_1)^{-1})] \\
 &= -k(\gamma_1, \gamma_2) - [c_x(\Psi(\sigma(\gamma_1))(h(\gamma_2)^{-1})h(\gamma_1)^{-1}, h(\gamma_1\gamma_2)) \\
 &\quad \quad + c_x(\Psi(\sigma(\gamma_1))(h(\gamma_2)^{-1}), h(\gamma_1)^{-1})].
 \end{aligned}$$

Enfin, en remarquant que le 2-cocycle borné c_x est homogène il en résulte que pour tous g et $h \in G$ on a $c_x(gh^{-1}, h) = -c_x(g, h^{-1})$. De même, en remarquant que nous avons établi au début de cette démonstration que

$$\Psi(\sigma(\gamma_1))(h(\gamma_2)^{-1})h(\gamma_1)^{-1} = f(\sigma(\gamma_1), \sigma(\gamma_2))h(\gamma_1\gamma_2)^{-1}$$

ceci entraîne :

$$\begin{aligned}
 k(\gamma_1, \gamma_2) &= -[c_x(f(\sigma(\gamma_1), \sigma(\gamma_2))h(\gamma_1\gamma_2)^{-1}, h(\gamma_1\gamma_2)) \\
 &\quad + c_x(\Psi(\sigma(\gamma_1))(h(\gamma_2)^{-1}), h(\gamma_1)^{-1})] \\
 &= -[-c_x(f(\sigma(\gamma_1), \sigma(\gamma_2)), h(\gamma_1\gamma_2)^{-1}) \\
 &\quad + c_x(\Psi(\sigma(\gamma_1))(h(\gamma_2)^{-1}), h(\gamma_1)^{-1})].
 \end{aligned}$$

D'où, pour tous les éléments γ_1 et $\gamma_2 \in \Gamma$ on a

$$k(\gamma_1, \gamma_2) = \langle c_x, T(\gamma_1, \gamma_2) \rangle .$$

■

Démonstration de la proposition 11. Pour établir l'égalité : $\sigma^*(\bar{\theta}_{\Psi, f}) = d\bar{T}$, nous allons développer l'expression de la cochaîne bornée réelle $\langle c_x, \sigma^*(\theta_{\Psi, f}) \rangle$.

Pour cela, nous allons utiliser la formule (28) établie dans l'affirmation précédente et le fait que $F_x = s_x \circ f : \Pi^2 \rightarrow \overline{G}$ contrôle la déviation de l'application $\overline{\Psi} : \Pi \rightarrow \text{Sym}(\overline{G}, \mathbb{R})$ à être un homomorphisme (cf. lemme 4 formule (4)).

D'abord, pour tous γ_1, γ_2 et $\gamma_3 \in \Gamma$ appliquons l'expression (28) au couple $\gamma_1\gamma_2$ et γ_3 :

$$\begin{aligned} F_x(\sigma(\gamma_1\gamma_2), \sigma(\gamma_3)) &= \overline{\Psi}(\sigma(\gamma_1)\sigma(\gamma_2))(h_x(\gamma_3)^{-1})h_x(\gamma_1\gamma_2)^{-1} \\ &\quad h_x(\gamma_1\gamma_2\gamma_3) < c_x, T(\gamma_1\gamma_2, \gamma_3) > \\ &= F_x(\sigma(\gamma_1), \sigma(\gamma_2))^{-1}\overline{\Psi}(\sigma(\gamma_1)) \circ \overline{\Psi}(\sigma(\gamma_2))(h_x(\gamma_3)^{-1}) \\ &\quad [F_x(\sigma(\gamma_1), \sigma(\gamma_2))h_x(\gamma_1\gamma_2)^{-1}] \\ &\quad h_x(\gamma_1\gamma_2\gamma_3) < c_x, T(\gamma_1\gamma_2, \gamma_3) > \\ &= F_x(\sigma(\gamma_1), \sigma(\gamma_2))^{-1}\overline{\Psi}(\sigma(\gamma_1)) \circ \overline{\Psi}(\sigma(\gamma_2))(h_x(\gamma_3)^{-1}) \\ &\quad [\overline{\Psi}(\sigma(\gamma_1))(h_x(\gamma_2)^{-1})h_x(\gamma_1)^{-1}]h_x(\gamma_1\gamma_2\gamma_3) \\ &\quad < c_x, T(\gamma_1, \gamma_2) > < c_x, T(\gamma_1\gamma_2, \gamma_3) > . \end{aligned}$$

Observons que si on multiplie la dernière ligne ci-dessus par l'élément $F_x(\sigma(\gamma_1), \sigma(\gamma_2))$ (depuis la gauche) on obtient l'expression,

$$\begin{aligned} F_x(\sigma(\gamma_1), \sigma(\gamma_2))F_x(\sigma(\gamma_1\gamma_2), \sigma(\gamma_3)) &= \overline{\Psi}(\sigma(\gamma_1))[\overline{\Psi}(\sigma(\gamma_2))(h_x(\gamma_3)^{-1})] \\ &\quad \overline{\Psi}(\sigma(\gamma_1))(h_x(\gamma_2)^{-1})h_x(\gamma_1)^{-1}h_x(\gamma_1\gamma_2\gamma_3) \\ &\quad < c_x, T(\gamma_1, \gamma_2) < c_x, T(\gamma_1\gamma_2, \gamma_3) > . \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant le fait que la déviation de la bijection $\overline{\Psi}(\sigma(\gamma_1)) : \overline{G} \rightarrow \overline{G}$ à être un homomorphisme est contrôlée par l'expression (11), $\forall \bar{g}, \bar{h} \in \overline{G}$,

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}(\sigma(\gamma_1))(\bar{g})\overline{\Psi}(\sigma(\gamma_1))(\bar{h}) &= \overline{\Psi}(\sigma(\gamma_1))(\bar{g}\bar{h})[(\Psi_s(\sigma(\gamma_1)))^*(c_x)(p(\bar{g}), p(\bar{h}))] \\ &\quad [c_x(p(\bar{g}), p(\bar{h}))^{-1}] \end{aligned}$$

on pourra écrire,

$$\begin{aligned} F_x(\sigma(\gamma_1), \sigma(\gamma_2))F_x(\sigma(\gamma_1\gamma_2), \sigma(\gamma_3)) &= \overline{\Psi}(\sigma(\gamma_1))[\overline{\Psi}(\sigma(\gamma_2))(h_x(\gamma_3)^{-1})h_x(\gamma_2)^{-1}] \\ &\quad h_x(\gamma_1)^{-1}h_x(\gamma_1\gamma_2\gamma_3) < c_x, T(\gamma_1, \gamma_2) > \\ &\quad < c_x, T(\gamma_1\gamma_2, \gamma_3) > X(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \quad (29) \end{aligned}$$

où $X : \Gamma^3 \rightarrow \mathbb{R}$ désigne la cochaîne bornée réelle définie par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} X(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) &= (\Psi_s(\sigma(\gamma_1)))^*(c_x)(\Psi_s(\sigma(\gamma_2))(h(\gamma_3)^{-1}), h(\gamma_2)^{-1}) \\ &\quad - c_x(\Psi_s(\sigma(\gamma_2))(h(\gamma_3)^{-1}), h(\gamma_2)^{-1}). \end{aligned}$$

Remarquons que dans l'expression (29) si on applique la formule (28) on pourra remplacer l'élément $\overline{\Psi}(\sigma(\gamma_2))(h_x(\gamma_3)^{-1})h_x(\gamma_2)^{-1}$ (mis entre crochets dans (29)) par l'élément $F_x(\sigma(\gamma_2), \sigma(\gamma_3))h_x(\gamma_2\gamma_3)^{-1} < c_x, T(\gamma_2, \gamma_3) >^{-1}$ on obtient :

$$\begin{aligned}
 F_x(\sigma(\gamma_1), \sigma(\gamma_2))F_x(\sigma(\gamma_1\gamma_2), \sigma(\gamma_3)) &= \overline{\Psi}(\sigma(\gamma_1))[F_x(\sigma(\gamma_2), \sigma(\gamma_3))h_x(\gamma_2\gamma_3)^{-1} \\
 &\quad < c_x, T(\gamma_2, \gamma_3) >^{-1}] \\
 &\quad h_x(\gamma_1)^{-1}h_x(\gamma_1\gamma_2\gamma_3) < c_x, T(\gamma_1, \gamma_2) > \\
 &\quad < c_x, T(\gamma_1\gamma_2, \gamma_3) > X(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \\
 &= \overline{\Psi}(\sigma(\gamma_1))[F_x(\sigma(\gamma_2), \sigma(\gamma_3))h_x(\gamma_2\gamma_3)^{-1}] \\
 &\quad h_x(\gamma_1)^{-1}h_x(\gamma_1\gamma_2\gamma_3) < c_x, T(\gamma_2, \gamma_3) >^{-1} \\
 &\quad < c_x, T(\gamma_1, \gamma_2) > < c_x, T(\gamma_1\gamma_2, \gamma_3) > \\
 &\quad X(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \tag{30} \\
 &= \overline{\Psi}(\sigma(\gamma_1))(F_x(\sigma(\gamma_2), \sigma(\gamma_3))) \\
 &\quad [\overline{\Psi}(\sigma(\gamma_1))(h_x(\gamma_2\gamma_3)^{-1})h_x(\gamma_1)^{-1} \\
 &\quad \quad \quad h_x(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)] \\
 &\quad Y(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) < c_x, T(\gamma_2, \gamma_3) >^{-1} \\
 &\quad < c_x, T(\gamma_1, \gamma_2) > < c_x, T(\gamma_1\gamma_2, \gamma_3) > \\
 &\quad X(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3).
 \end{aligned}$$

où $Y : \Gamma^3 \rightarrow \mathbb{R}$ désigne la cochaîne bornée réelle définie par l'expression,

$$\begin{aligned}
 Y(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) &= c_x(f(\sigma(\gamma_2), \sigma(\gamma_3)), h(\gamma_2\gamma_3)^{-1}) \\
 &\quad - (\Psi_s(\sigma(\gamma_1)))^*(c_x)(f(\sigma(\gamma_2), \sigma(\gamma_3)), h(\gamma_2\gamma_3)^{-1})
 \end{aligned}$$

déduite de la formule (17) qui contrôle la déviation de la bijection $\overline{\Psi}(\sigma(\gamma_1)) : \overline{G} \rightarrow \overline{G}$ à être un homomorphisme.

Ci-dessous, pour développer l'expression de la cochaîne abélienne

$$\sigma^*(K_{x, \overline{\Psi}}) : \Gamma^3 \rightarrow Z(\overline{G})$$

qui est égale à,

$$\begin{aligned}
 \overline{\Psi}(\sigma(\gamma_1))(F_x(\sigma(\gamma_2), \sigma(\gamma_3)))F_x(\sigma(\gamma_1), \sigma(\gamma_2\gamma_3))F_x(\sigma(\gamma_1\gamma_2), \sigma(\gamma_3))^{-1} \\
 F_x(\sigma(\gamma_1), \sigma(\gamma_2))^{-1}
 \end{aligned}$$

nous allons remplacer l'élément $\overline{\Psi}(\sigma(\gamma_1))(h_x(\gamma_2\gamma_3)^{-1})h_x(\gamma_1)^{-1}h_x(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)$ (mis entre crochets dans (30)) par l'élément

$$F_x(\sigma(\gamma_1), \sigma(\gamma_2\gamma_3)) < c_x, T(\gamma_1, \gamma_2\gamma_3) >^{-1}$$

pour obtenir :

$$\begin{aligned} F_x(\sigma(\gamma_1), \sigma(\gamma_2))F_x(\sigma(\gamma_1\gamma_2), \sigma(\gamma_3)) &= \overline{\Psi}(\sigma(\gamma_1))(F_x(\sigma(\gamma_2), \sigma(\gamma_3)) \\ &\quad F_x(\sigma(\gamma_1), \sigma(\gamma_2\gamma_3))) \\ &< c_x, T(\gamma_1, \gamma_2\gamma_3) >^{-1} < c_x, T(\gamma_1, \gamma_2) > \\ &< c_x, T(\gamma_2, \gamma_3) >^{-1} < c_x, T(\gamma_1\gamma_2, \gamma_3) > \\ &X(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)Y(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3). \end{aligned} \quad (31)$$

Mais comme la représentation extérieure $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(C)$ est définie à partir d'une extension de groupes, son 3-cocycle d'obstruction $K_{\Psi, f}$ est nul. Ainsi, si on applique la formule (19) qui donne

$$K_{x, \overline{\Psi}} = \varphi_*(K_{x, \overline{\Psi}}) + (s_x)_*(K_{\Psi, f}) \in Z(\overline{G}) \simeq \mathbb{R} \oplus Z(G)$$

on en déduit qu'en fait la cochaîne $K_{x, \overline{\Psi}} = \varphi_*(K_{x, \overline{\Psi}}) : \Pi^3 \rightarrow \mathbb{R}$. D'autre part, en utilisant simultanément l'expression (31) et l'expression (20) de la proposition 7 on peut écrire dans le groupe commutatif additif $(Z(\overline{G}), +)$ que :

$$\begin{aligned} < c_x, \sigma^*(\theta_{\Psi, f})(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) > &= \varphi(K_{x, \overline{\Psi}}(\sigma(\gamma_1), \sigma(\gamma_2), \sigma(\gamma_3))) \\ &= K_{x, \overline{\Psi}}(\sigma(\gamma_1), \sigma(\gamma_2), \sigma(\gamma_3)) \\ &= < c_x, T(\gamma_1, \gamma_2\gamma_3) > - < c_x, T(\gamma_1, \gamma_2) > \quad (32) \\ &\quad + < c_x, T(\gamma_2, \gamma_3) > - < c_x, T(\gamma_1\gamma_2, \gamma_3) > \\ &\quad - X(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) - Y(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3). \end{aligned}$$

Il devient maintenant clair que pour achever la preuve de la proposition 11 il suffit qu'on démontre que le second membre de l'expression (32) est égal au crochet de dualité

$$< c_x, dT(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) > .$$

En effet, si on fait la somme des deux cochaînes $X : \Gamma^3 \rightarrow \mathbb{R}$ et $Y : \Gamma^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tout en appliquant l'expression (27) qui définit la cochaîne \overline{T} on voit facilement que pour tous les éléments γ_1, γ_2 et $\gamma_3 \in \Gamma$ on a,

$$X(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) + Y(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = < c_x, T(\gamma_2, \gamma_3) - \left(\Psi_s(\sigma(\gamma_1)) \right)_* (T(\gamma_2, \gamma_3)) > .$$

Maintenant, grâce à cette remarque on peut réécrire le second membre de l'expression (32) sous la forme :

$$\begin{aligned} \langle c_x, \sigma^*(\theta_{\Psi, f})(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \rangle &= \langle c_x, T(\gamma_1, \gamma_2 \gamma_3) \rangle - \langle c_x, T(\gamma_1, \gamma_2) \rangle \\ &\quad + \langle c_x, T(\gamma_2, \gamma_3) \rangle - \langle c_x, T(\gamma_1 \gamma_2, \gamma_3) \rangle \\ &\quad - \langle c_x, T(\gamma_2, \gamma_3) - \left(\Psi_s(\sigma(\gamma_1)) \right)_* (T)(\gamma_2, \gamma_3) \rangle \\ &= \langle c_x, T(\gamma_1, \gamma_2 \gamma_3) \rangle - \langle c_x, T(\gamma_1, \gamma_2) \rangle \\ &\quad - \langle c_x, T(\gamma_1 \gamma_2, \gamma_3) \rangle \\ &\quad + \langle c_x, \left(\Psi_s(\sigma(\gamma_1)) \right)_* (T)(\gamma_2, \gamma_3) \rangle \\ &= \langle c_x, dT(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \rangle . \end{aligned}$$

Finalement, en passant dans l'espace d'homologie ℓ_1 -réduite $\overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ nous obtenons l'expression recherchée $\sigma^*(\overline{\theta}_{\Psi, f}) = d\overline{T}$. ■

Le résultat de la proposition 11 nous permet maintenant de déduire les deux corollaires importants suivants.

COROLLAIRE 5. *La restriction de la cochaîne bornée $\overline{T} : \Gamma^2 \rightarrow \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ sur le sous-groupe normal $i(G) \subset \Gamma$ représente la classe de cohomologie bornée \mathfrak{g}_2 ,*

$$[i^*(\overline{T})] = [\overline{\mathfrak{m}}_2] = \mathfrak{g}_2 \in H_b^2(G, \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})).$$

Démonstration. En effet, puisque pour tout $g \in G$ on a $h(g) = g$; donc en évaluant la cochaîne $\overline{T} : \Gamma^2 \rightarrow \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ sur tous les couples d'éléments $(g_1, g_2) \in i(G) \times i(G) \subset \Gamma \times \Gamma$ on voit aisément que $i^*(\overline{T})(g_1, g_2) = -\overline{\mathfrak{m}}_2(g_2^{-1}, g_1^{-1})$.

D'autre part, puisque pour toute classe de cohomologie bornée $x = [c_x] \in H_b^2(G, \mathbb{R})$ et pour tout couple d'éléments g_1 et $g_2 \in G$ on a les deux relations,

$$c_x(g_1^{-1}, g_2^{-1}) = -c_x(g_1, g_2) \quad \text{et} \quad \langle c_x, \mathfrak{m}_2(g_1, g_2) \rangle = c_x(g_1, g_2)$$

on en déduit l'égalité $i^*(\overline{T})(g_1, g_2) = -\overline{\mathfrak{m}}_2(g_2^{-1}, g_1^{-1}) = \overline{\mathfrak{m}}_2(g_1, g_2)$ qui entraîne l'égalité en cohomologie : $[i^*(\overline{T})] = [\overline{\mathfrak{m}}_2] = \mathfrak{g}_2$. ■

COROLLAIRE 6. *La classe de cohomologie bornée $\mathfrak{g}_2 \in H_b^2(G, \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}))$ est invariante par l'action définie par la représentation extérieure $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(C)$ associée à l'extension de groupes $1 \rightarrow G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \rightarrow 1$.*

Démonstration. On procède comme dans la démonstration de la proposition 4 rappelée ci-dessus (cf. section 3) et qui correspond au corollaire 2 de [6].

Plus précisément, il suffit qu'on regarde la 2-cochaîne bornée $\bar{T} : \Gamma^2 \rightarrow \bar{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ qui est définie par l'expression (27) comme étant une 3-cochaîne homogène Γ -invariante :

$$\bar{T} \in (\mathcal{L}(\mathbb{R}[\Gamma^3], \bar{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})))^\Gamma \simeq \mathcal{L}(\mathbb{R}[\Gamma^2], \bar{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})).$$

Ensuite, en utilisant l'homomorphisme composé

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}(\mathbb{R}[\Gamma^3], \bar{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})))^\Gamma &\hookrightarrow (\mathcal{L}(\mathbb{R}[\Gamma^3], \bar{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})))^G \\ &\xrightarrow{i^*} (\mathcal{L}(\mathbb{R}[G^3], \bar{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})))^G \simeq \mathcal{L}(\mathbb{R}[G^2], \bar{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})) \end{aligned}$$

on déduit que l'image de la cochaîne \bar{T} via la composition de ces deux morphismes induit une 2-cochaîne Π -invariante sur le groupe G . Ainsi, comme d'après le corollaire 5 on sait que $i^*(\bar{T}) = \bar{\mathbf{m}}_2$ est un 2-cocycle ceci implique que finalement la classe de cohomologie bornée $\mathbf{g}_2 = [\bar{\mathbf{m}}_2] \in H_b^2(G, \bar{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}))^\Pi$ est Π -invariante. ■

Si on désigne par $(E_{r, \ell_1}^{p,q}, d_{r, \ell_1})$ la suite spectrale de Hochschild-Serre associée à l'extension $1 \rightarrow G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \rightarrow 1$ en cohomologie bornée à coefficients dans le Π -module de Banach $\bar{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$, on voit que la classe \mathbf{g}_2 induit un élément du terme $E_{3, \ell_1}^{0,2}$, et que la classe $[\theta]$ induit aussi un élément du terme $E_{3, \ell_1}^{3,0}$.

Pour justifier ces deux faits observons que puisque le terme $E_{2, \ell_1}^{0,2} = E_{3, \ell_1}^{0,2}$ (cf. lemme 4) et puisque la classe de cohomologie $\mathbf{g}_2 \in E_{2, \ell_1}^{0,2} \xrightarrow{\sim} H_b^2(G, \bar{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}))^\Pi$, donc \mathbf{g}_2 représente une classe de cohomologie qu'on notera aussi $\mathbf{g}_2 \in E_{3, \ell_1}^{0,2}$. De même, puisque le terme $E_{2, \ell_1}^{3,0} = E_{3, \ell_1}^{3,0}$ (cf. lemme 4) avec $E_{2, \ell_1}^{3,0} \xrightarrow{\sim} H_b^3(\Pi, \bar{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}))$ donc la classe de cohomologie $[\theta] \in H_b^3(\Pi, \bar{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}))$ représente une classe de cohomologie qu'on notera aussi $[\theta] \in E_{3, \ell_1}^{3,0}$.

Rappelons aussi que d'après la définition des termes $E_3^{n,0}$ et $E_3^{n,2}$ (cf. 3.2.1) on a :

$$E_3^{n,0} = \frac{Z_3^{n,0}}{Z_2^{n+1,-1} + B_2^{n,0}} \quad \text{et} \quad E_3^{n,2} = \frac{Z_3^{n,2}}{Z_2^{n+1,1} + B_2^{n,2}}.$$

Ainsi, puisque la différentielle totale $d_* = d_\Pi + (-1)^p d_U$ du complexe différentiel double filtré verticalement,

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \quad K^{p,q} := C_b^p(\Pi, U^q) \quad \text{où} \quad U^q := \mathcal{L}_G(\mathbb{R}[\Gamma^{q+1}], V)$$

envoie le sous-espace $Z_3^{n,2}$ dans le sous-espace $Z_3^{n+3,0}$ (i.e. $d_{n+2}(Z_3^{n,2}) \subseteq Z_3^{n+3,0}$) nous avons défini la différentielle $d_3^{n,2} : E_3^{n,2} \rightarrow E_3^{n+3,0}$ en passant aux espaces quotients par l'expression (cf. 3.2.1),

$$\forall x \in Z_3^{n,2}, \quad d_3^{n,2}([x]) := [d_{n+2}(x)].$$

Donc, si en particulier on prend $V = \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ et $n = 0$ on voit que la différentielle $d_{3,\ell_1}^{0,2} : E_{3,\ell_1}^{0,2} \rightarrow E_{3,\ell_1}^{3,0}$ est induite par la différentielle totale $d_3 : Z_3^{0,2} \rightarrow Z_3^{3,0}$ où

$$\begin{aligned} Z_3^{0,2} &:= \{x \in F_v^0 \text{Tot}(K^{*,*})^2 ; d_2(x) \in F_v^3 \text{Tot}(K^{*,*})^3\} \\ &= \{x \in \text{Tot}(K^{*,*})^2 ; d_2(x) \in C_b^3(\Pi, U^0)\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Z_3^{3,0} &:= \{x \in F_v^3 \text{Tot}(K^{*,*})^3 ; d_3(x) \in F_v^6 \text{Tot}(K^{*,*})^4\} \\ &= \{x \in C_b^3(\Pi, U^0) ; d_3(x) = 0\}. \end{aligned}$$

Avec les discussions précédentes on peut maintenant démontrer le théorème principal B.

THÉORÈME PRINCIPAL B. *La différentielle $d_{3,\ell_1}^{0,2} : E_{3,\ell_1}^{0,2} \rightarrow E_{3,\ell_1}^{3,0}$ de la suite spectrale de Hochschild-Serre associée à l'extension de groupes discrets $1 \rightarrow G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \rightarrow 1$ en cohomologie bornée à coefficients dans le Π -module de Banach $\overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$, envoie la classe $\mathbf{g}_2 \in E_{3,\ell_1}^{0,2}$ sur la classe $[\theta] \in E_{3,\ell_1}^{3,0}$.*

Démonstration. D'abord, notons que la cochaîne bornée $\overline{T} : \Gamma^2 \rightarrow \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ (cf. pr. 11) peut être vue comme élément de l'espace vectoriel $C_b^0(\Pi, U^2)$ parce que on a :

$$\begin{aligned} \overline{T} &\in \mathcal{L}(\mathbb{R}[\Gamma^2], \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})) \simeq (\mathcal{L}(\mathbb{R}[\Gamma^3], \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})))^\Gamma \\ &\Rightarrow \overline{T} \in (\mathcal{L}(\mathbb{R}[\Gamma^3], \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})))^G = U^2. \end{aligned}$$

Ainsi, comme le cobord $d_2 \overline{T} = \sigma^*(\overline{\theta}_{\psi,f})$ (cf. pr. 11) induit un élément de l'espace vectoriel $C_b^3(\Pi, U^0)$ il s'ensuit que la cochaîne bornée $\overline{T} \in Z_3^{0,2}$, son cobord $d_2 \overline{T} \in Z_3^{3,0}$ et que par conséquent

$$d_{3,\ell_1}^{0,2}([\overline{T}]) = [d_2 \overline{T}] \in E_{3,\ell_1}^{3,0}.$$

D'autre part, puisque d'après les corollaires 5 et 6, la restriction de la cochaîne bornée $\bar{T} : \Gamma^2 \rightarrow \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ au sous-groupe normal $i(G) \subset \Gamma$ représente la classe de cohomologie bornée Π -invariante $\mathbf{g}_2 \in E_{3,\ell_1}^{0,2} = E_{2,\ell_1}^{0,2} \xrightarrow{\sim} H_b^2(G, \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}))^\Pi$, et comme d'après la proposition 10 le cobord de la cochaîne bornée $\bar{T} : \Gamma^2 \rightarrow \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ représente la classe de cohomologie bornée $[\theta] \in E_{3,\ell_1}^{3,0} \xrightarrow{\sim} H_b^3(\Pi, \overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R}))$ on conclut finalement que la différentielle $d_{3,\ell_1}(\mathbf{g}_2) = [\theta] \in E_{3,\ell_1}^{3,0}$. ■

5.2. PREUVE DU THÉORÈME PRINCIPAL C. Soit $1 \longrightarrow G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \longrightarrow 1$ une extension de groupes discrets et $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(C)$ sa représentation extérieure. D'après [6], il existe trois suites spectrales de Hochschild-Serre en cohomologie bornée à coefficients dans les Π -modules de Banach $H_b^2(G, \mathbb{R})$, $\overline{H}_2^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$ et \mathbb{R} (qui est trivial) dont les termes sont désignés respectivement par $(E_{r,\infty}^{p,q}, d_{r,\infty}^{p,q})$, $(E_{r,\ell_1}^{p,q}, d_{r,\ell_1}^{p,q})$ et $(E_r^{p,q}, d_r^{p,q})$. Rappelons aussi qu'au paragraphe 3.3 nous avons fait remarquer que les différentielles de ces trois suites spectrales commutent avec le cup-produit dans la relation suivante,

$$d_r^{p+p',q+q'}(x_\infty^{p,q} \cup x_{\ell_1}^{p',q'}) = d_{r,\infty}^{p,q}(x_\infty^{p,q}) \cup x_{\ell_1}^{p',q'} + (-1)^{p+q} x_\infty^{p,q} \cup d_{r,\ell_1}^{p',q'}(x_{\ell_1}^{p',q'}).$$

De même, notons que l'identité établie dans le théorème principal A,

$$x = x \cup \mathbf{g}_2, \quad \forall x \in H_b^2(G, \mathbb{R})$$

permet d'obtenir un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} \cup_{\mathbf{g}_2} : E_{2,\infty}^{n,0} &\rightarrow E_2^{n,2} \\ x_\infty &\rightarrow x_\infty \cup \mathbf{g}_2 \end{aligned}$$

dont le morphisme inverse associe à tout vecteur $x \in E_2^{n,2}$ un unique vecteur $x_\infty \in E_{2,\infty}^{n,0}$ tel que, $x = x_\infty \cup \mathbf{g}_2$.

Finalement, observons que puisque en cohomologie bornée réelle le terme $E_2^{n,2}$ se surjecte sur le terme $E_3^{n,2}$ (cf. lemme 3) et comme on a aussi $E_2^{n+3,0} = E_3^{n+3,0}$ (cf. lemme 3), on en déduit que la différentielle $d_3^{n,2} : E_3^{n,2} \rightarrow E_3^{n+3,0}$ transforme l'expression $x = x_\infty \cup \mathbf{g}_2$ comme suit,

$$\begin{aligned} d_3^{n,2}(x) &= d_3^{n,2}(x_\infty \cup \mathbf{g}_2) \\ &= d_{3,\infty}^{n,0}(x_\infty) \cup \mathbf{g}_2 + (-1)^n x_\infty \cup d_{3,\ell_1}^{0,2}(\mathbf{g}_2) \\ &= 0 \cup \mathbf{g}_2 + (-1)^n x_\infty \cup [\theta] = (-1)^n x \cup [\theta]. \end{aligned}$$

COROLLAIRE A. L'opérateur de transgression $\delta : H_b^2(G, \mathbb{R})^\Pi \rightarrow H_b^3(\Pi, \mathbb{R})$ associé à la représentation extérieure $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(C)$ de l'extension $1 \rightarrow G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \rightarrow 1$ est égal à la différentielle $d_3^{0,2} : E_3^{0,2} \rightarrow E_3^{3,0}$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que d'après la proposition 7 et l'expression (22) (cf. cor. 4), si $c_x : G^2 \rightarrow \mathbb{R}$ désigne un 2-cocycle borné homogène invariant par $\theta : \Pi \rightarrow \text{Out}(C)$ il en résulte que pour tout noyau abstrait (Ψ, f) de θ l'expression suivante (cf. (20)),

$$\begin{aligned} \varphi_*(K_{x, \bar{\Psi}}) &= \langle c_x, \theta_{\Psi, f}(\alpha, \beta, \gamma) \rangle \\ &= c_x(\Psi(\alpha)(f(\beta, \gamma), f(\alpha, \beta\gamma)) - c_x(f(\alpha, \beta), f(\alpha\beta, \gamma))) \end{aligned}$$

définit un 3-cocycle réel borné sur le groupe Π qui représente à la fois les classes de cohomologie bornée : $\delta([c_x]) = [\varphi_*(K_{x, \bar{\Psi}})]$ (cf. [3] et [4]) et $d_3([c_x]) = (-1)^0[c_x] \cup [\theta]$. ■

REMERCIEMENTS

Je remercie le référé anonyme de l'article pour ses précieuses remarques qui m'ont permis de refaire l'article et de le compléter par des paragraphes visant à clarifier les passages de certaines démonstrations, et par conséquent rendent le contenu de l'article indépendant et auto suffisant. Je tiens aussi à le remercier pour ses questions intéressantes qui seront développées dans de futures papiers.

RÉFÉRENCES

- [1] C. BAVARD, Longueur stable des commutateurs, *Enseign. Math. (2)* **37**, no. 1-2 (1991), 109–150.
- [2] G. BESSON, “Sur la Cohomologie Bornée”, Sém. de cohomologie bornée, E.N.S. de Lyon, 1988.
- [3] A. BOUARICH, “Suites Exactes en Cohomologie Bornée Réelle”, Thèse, Université Paul Sabatier, Toulouse III, 1994.
- [4] A. BOUARICH, Suites exactes en cohomologie bornée réelle des groupes discrets, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **320**, no. 11 (1995), 1355–1359.
- [5] A. BOUARICH, Exactitude à gauche du foncteur $H_b^n(-, \mathbb{R})$ de cohomologie bornée réelle, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* **10**, no. 2 (2001), 255–270.
- [6] A. BOUARICH, Suites spectrales de Hochschild-Serre à coefficients dans un espace semi-normé, *Extracta Mathematicae* **20**, no. 3 (2005), 307–340.
- [7] A. BOUARICH, Sur une classe de cohomologie bornée de degré deux universelle, en préparation.

- [8] R. BROOKS, Some remarks on bounded cohomology, *Ann. of Math. Stud.* **97** (1981), 53–63.
- [9] H. BREZIS, “Analyse Fonctionnelle. Théorie et Applications”, Masson, Paris, 1983.
- [10] K.S. BROWN, “Cohomology of Groups”, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [11] GREENLEAF, “Invariant Means on Topological Groups and their Applications”, Van Nostrand Mathematical Studies No. 16, Van Nostrand Reinhold Co., New York-Toronto, Ont.-London, 1969.
- [12] M. GROMOV, Volume and bounded cohomology, *Publ. Math. IHES* **56** (1982), 5–99.
- [13] A. GROTHENDIECK, “Produits Tensoriels Topologiques et Espaces Nucléaires”, Mem. Amer. Math. Soc. 1955, no. 16, Providence, 1955.
- [14] A. GUICHARDET, “Cohomologie des Groupes Topologiques et des Algèbres de Lie”, Cedic-Nathan, Paris, 1980.
- [15] N. IVANOV, Foundations of the theory of bounded cohomology, *J. Soviet Math.* **37** (1987), 1090–1115.
- [16] N. IVANOV, Second bounded cohomology group, *J. Soviet Math.* **52, No.1** (1990), 2822–2824.
- [17] S. MACLANE, “Homology”, Springer-Verlag, Berlin, 1963.
- [18] S. MATSUMOTO, S. MORITA, Bounded cohomology of certain groups of homeomorphisms, *Proc. Amer. Math. Soc.* **94, no. 3** (1985), 539–544.
- [19] J. MCCLEARY, “User’s Guide To Spectral Sequence”, Mathematics Lecture Series, 12. Publish or Perish, Inc., Wilmington, DE, 1985.
- [20] Y. MITSUMATSU, Bounded cohomology and l_1 -homology of surfaces, *Topology* **23, no. 4** (1984), 465–471.
- [21] N. MONOD, M. BURGER, Continuous bounded cohomology and applications to rigidity theory, *Geom. Funct. Anal.* **12, no. 2** (2002), 219–280.
- [22] A. NOSKOV, Bounded cohomology of discrete groups with coefficients, *Leningrad Math. J.* **2, no. 5** (1991), 1067–1084.
- [23] A. NOSKOV, The Hochschild-Serre spectral sequence for bounded cohomology, *Contemporary Mathematics* **131, Part 1** (1992), 613–629.
- [24] T. SOMA, The zero-norme subspace of bounded cohomology, *Comment. Math. Helv.* **72, no. 4** (1997), 582–592.
- [25] K. YOSIDA, Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1966.