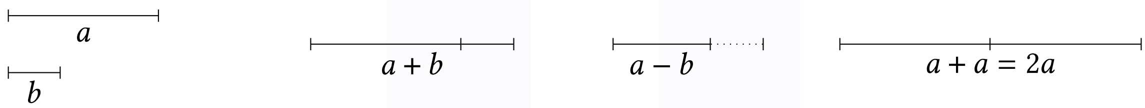
Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

06 · 10 · 2023

1 Cálculo I

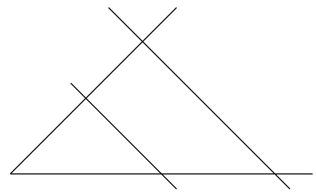
Tales, Pitágoras, Euclides...

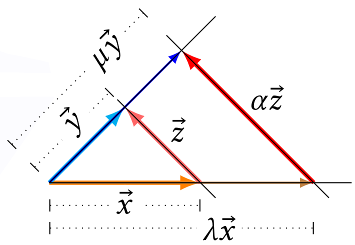
Si se consideran ciertas magnitudes a y b, no es difícil imaginar cómo son algunas operaciones entre ellas, como la suma o la resta. Basta con un dibujo:



¿Cómo hacer una magnitud $a \cdot b$?

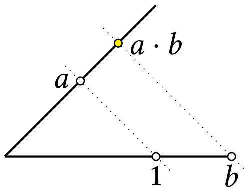
El primer teorema de Tales muestra la proporcionalidad de ciertas magnitudes atravesadas por rectas paralelas. Si dos rectas que se cortan se atraviesan por rectas paralelas, la proporción entre los lados se mantiene constante. Si por ejemplo en alguno de los lados la longitud del mayor segmento es el doble que la del segmento menor, entonces esta proporción "doble" también se tendrá en los otros lados. Para esbozar una demostración se consideran dos vectores x e y sobre las rectas que se cortan. Como estas rectas tienen distintas direcciones, estos vectores no son proporcionales. Al cortar esas rectas con dos rectas paralelas se obtienen los elementos del dibujo de la derecha. Como $z = y - x$ y $\alpha z = \mu y - \lambda x$ (son vectores que tienen la misma dirección) entonces, escribiendo $\alpha z = \alpha y - \alpha x$ se tiene $0 = (\mu - \alpha)y - (\lambda - \alpha)x$. Así $\alpha = \lambda = \mu$.





Primer teorema de Tales

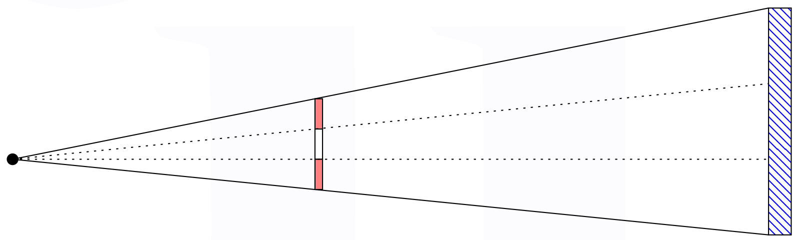
Con este resultado se pueden medir longitudes como altura de árboles, de edificios,... sabiendo cómo es la sombra de una longitud conocida. Si con un objeto conocido, por ejemplo una vara que mida 1 metro, tiene una sombra sobre el suelo que mide 0.25 metros, la misma relación tendrá cada objeto con su sombra. Un árbol cuya sombra mida 4 metros debe tener una altura de 16 metros. Un edificio cuya sombra tenga 32 metros tendrá una altura de 128 metros. Estas alturas pueden medirse sin necesidad de subirse ni a ese árbol ni a ese edificio.



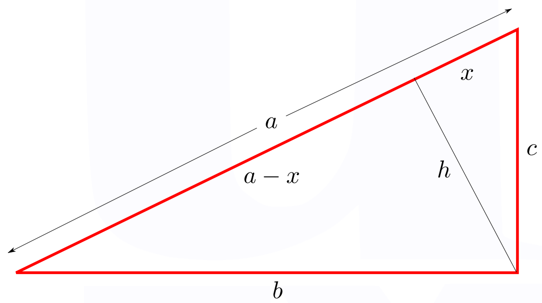
Este resultado permite además conocer cómo conseguir una magnitud que sea el producto $a \cdot b$ de dos conocidas: para ello se marca las magnitud a en una recta y las magnitudes 1 (la unidad) y b en otra recta que se corte con la anterior. Al trazar rectas paralelas como en el dibujo, se alcanza el valor $a \cdot b$.

Con el teorema de Tales es posible dividir cualquier magnitud en un número fijado de partes iguales. Por ejemplo, si tenemos cierta magnitud, al repetirla tres veces se obtiene un segmento con tres trozos iguales. Con este segmento, dibujando líneas paralelas se puede dividir cualquier otro segmento en tres partes idénticas. Esta idea sirve para entender que dada cualquier magnitud x es posible encontrar $2x, 3x, 4x, \ldots$ así como $x/2, x/3, x/4, \ldots$. En resumen, es posible calcular la cantidad $\frac{p}{q}x$ para p y q números enteros.

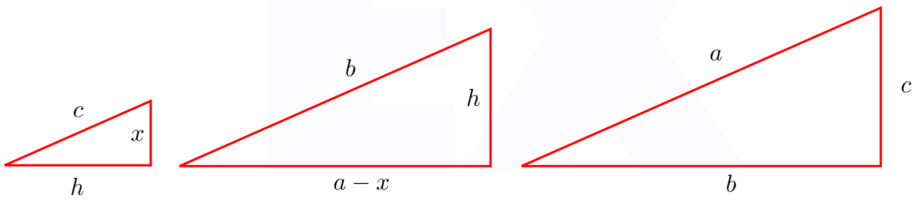
Con un dibujo puede verse cómo dividir un objeto, como el muro azul de la parte derecha, en tres partes iguales. Para ello se eligen tres objetos idénticos y se coloca un observador en el punto de corte de las rectas que unen las partes de arriba y abajo del muro y de la pila de los tres objetos iguales, tal y como muestra el dibujo. El resto de líneas dividen al muro en tres partes iguales.



Como corolario del teorema de Tales se obtiene el conocido teorema de Pitágoras. Dado un triángulo rectángulo de lados a, b y c



se pueden considerar los triángulos rectángulos que contiene

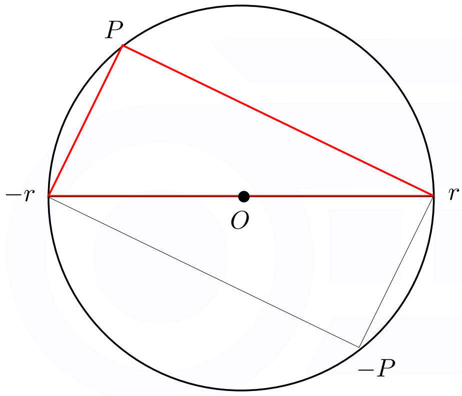


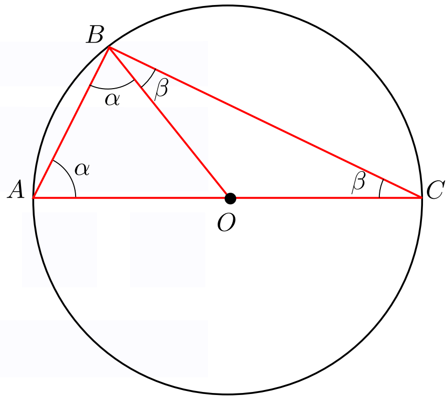
que son todos semejantes: es fácil ver que los tres triángulos tienen los mismos ángulos. Aplicando el teorema de Tales se obtienen las relaciones de proporcionalidad

$$\frac{b}{c} = \frac{h}{x} = \frac{a-x}{h}, \quad \frac{a}{c} = \frac{c}{x} = \frac{b}{h}, \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{h} = \frac{b}{a-x}.$$

Como $ax = c^2$ y $a(a-x) = b^2$ se tiene $a^2 = b^2 + c^2$, que se conoce como teorema de Pitágoras. Se pueden obtener otros resultados a partir de las igualdades anteriores, como el teorema de la altura,...

El segundo teorema de Tales dice que al unir un punto de una circunferencia con los extremos de un diámetro se obtiene un ángulo recto:

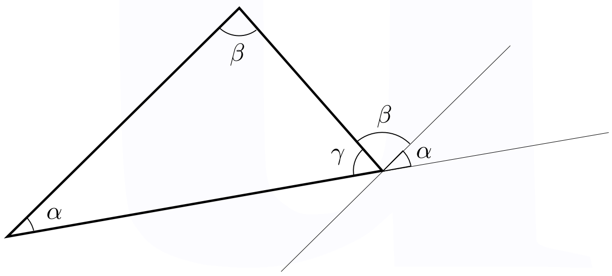




El ángulo que está en el vértice P es recto. Basta considerar su punto simétrico $-P$ y considerar el rectángulo de vértices $P, r, -P, -r$ cuyos cuatro ángulos son rectos.

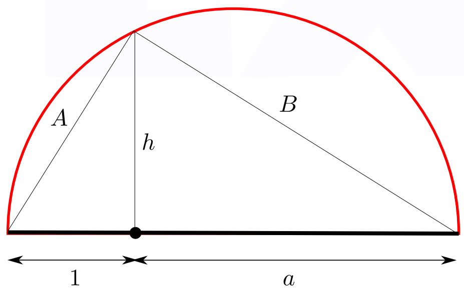
Otra demostración es la siguiente: los triángulos OAB y OBC son isósceles y así tienen dos ángulos iguales (α en el primero y β en el segundo). Considerando los ángulos del triángulo ABC se tiene $\alpha + \alpha + \beta + \beta = \pi$ y entonces $\alpha + \beta = \pi/2$.

La suma de los tres ángulos α, β, γ de un triángulo es $\alpha+\beta+\gamma = \pi$. Euclides hizo una demostración que casi no necesita explicación:



En el vértice del ángulo γ se ha trazado una paralela al lado opuesto del triángulo.

Estos resultados permiten hacer cálculos de magnitudes para hallar la raíz cuadrada de una longitud dada. Se considera una magnitud a.



Se añade una unidad y se traza el semicírculo que tiene a $1 + a$ como diámetro. Se considera la altura h en el punto de unión de los segmentos de longitudes 1 y a. Se obtienen tres triángulos rectángulos. Aplicando el teorema de Pitágoras,

$$A^2 = 1 + h^2, \quad B^2 = a^2 + h^2, \quad (1 + a)^2 = A^2 + B^2$$

y por tanto

$$h^2 = a,$$

es decir, h es la raíz cuadrada de a.

Si se hace el mismo razonamiento añadiendo una cantidad l a la magnitud a se obtiene

$$h^2 = a \cdot l,$$

que se conoce como teorema de la altura.

El teorema de Pitágoras permite considerar longitudes un tanto “misteriosas”. La diagonal d de un cuadrado de lado 1 verifica $d^2 = 2$. La diagonal de un rectángulo de lados a y b verifica $d^2 = a^2 + b^2$. Comienzan a aparecer números que no son expresiones p/q con p y q números enteros.

También se puede hacer una medición haciendo girar una rueda durante una o varias vueltas completas y comprobar qué relación tiene esa longitud con respecto a su diámetro. Esta cantidad, que conocemos como π, es muy parecida a $22/7$. Pero no es igual. De hecho π tampoco puede escribirse como p/q donde p y q son números enteros.

Puede verse en `http://goo.gl/Il1a4B` y en `http://goo.gl/ROCDzw` información sobre $\sqrt{2}$ y π. Números que no se pueden escribir como fracciones p/q. Aparecen números cuya expresión decimal no es ni finita ni periódica, como el número e,

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718281828459045\ldots$$

y expresiones como la fórmula de Leibniz

$$\pi = 4 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \right) = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots \right) = 3.1415926535\ldots$$

La constante γ de Euler,

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right) = 0.577215664901\ldots$$

se sospecha que es irracional aunque aún no se ha encontrado una demostración.

Elementos de Euclides. Es un conjunto de libros escrito sobre el año 300 a.C. en Alejandría. Después de la Biblia es el libro con más ediciones. En estos libros se establecen postulados como

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

- cosas iguales a una misma cosa son iguales entre si, o
- el todo es mayor que la parte.

Y se establecen axiomas (del griego αξιωμα, lo que parece justo o que se considera evidente, sin necesidad de demostración) como

- dos puntos determinan una recta, o también,
- todos los ángulos rectos son iguales entre sí, o el más famoso de todos,
- por un punto exterior a una recta se puede trazar una única recta paralela.

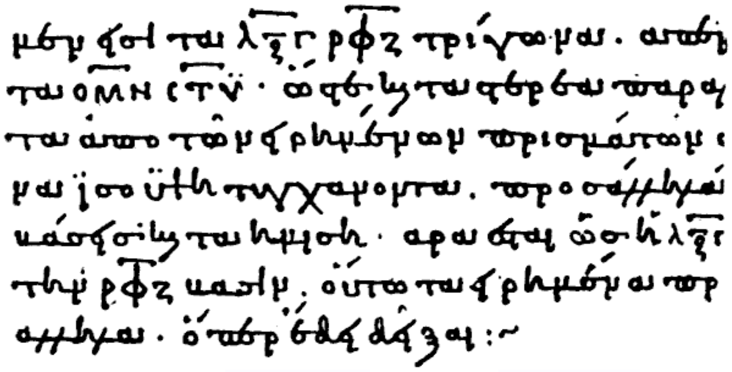
Como ya se ha visto, de este último se sigue que la suma de ángulos de un triángulo es π. A partir de estos axiomas se pueden demostrar otros resultados o Teoremas (del griego θεωρημα, proposición que se puede demostrar a partir de axiomas u otros teoremas)

iw rꜥ m pt ḥnꜥ iꜥḥ

(... sol en cielo junto con luna)

El sol está en el cielo junto a la Luna

(antiguo Egipto)



(texto de Euclides)

因為　神愛世界上人，甚至於拏伊个獨養兒子撥伊拉，以致凡係相信伊个人，免脫滅亡咾得著永生。

(Confucio)

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad : \quad n > \nu \implies |x_n - a| < \varepsilon$

Si $(x - r, x + r) \cap A \neq \emptyset$ para cada $r > 0$, entonces $x \in \overline{A}$

(Cálculo I)

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura