Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

06 · 10 · 2023

3 Cálculo I

Números complejos

Ecuaciones como $x^2 + 1 = 0$ o $x^4 + x + 6$ no tienen soluciones reales. Se puede extender el concepto de número real y añadir las raíces de polinomios como los anteriores. Es un proceso que llevará a la construcción de un cuerpo $\mathbb{C}$ que contiene a $\mathbb{R}$, en el que ecuaciones como $x^4 + x + 6 = 0$ o $x^2 + 1 = 0$ sí tengan soluciones. Se llega a construir un cuerpo $\mathbb{C}$ en el que todo polinomio tiene sus raíces en $\mathbb{C}$ (este resultado se conoce como teorema fundamental del álgebra.)

Números complejos. Definición y propiedades

En $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ se definen las operaciones

- suma: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- producto: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

y la inclusión

$$f : a \in \mathbb{R} \longrightarrow (a, 0) \in \mathbb{R}^2$$

que es inyectiva, aunque no es sobreyectiva.

Es fácil comprobar que la suma es conmutativa, asociativa, tiene a $(0, 0)$ como elemento neutro, y cada elemento (a, b) tiene a $(-a, -b)$ como opuesto. Además, esta suma extiende a la suma de números reales, ya que $f(a) + f(b) = f(a + b)$.

El producto es conmutativo, asociativo, su elemento unidad es $(1, 0)$ y cada elemento no nulo (a, b) tiene a $(a/(a^2 + b^2), -b/(a^2 + b^2))$ como inverso. Además, el producto es distributivo con respecto de la suma y extiende al producto de números reales, es decir, $f(a) \cdot f(b) = f(a \cdot b)$.

El cálculo del inverso con el producto es fácil. Dado (a, b) no nulo, se trata de buscar (x, y) que cumpla

$$(a, b) \cdot (x, y) = (ax - by, ay + bx) = (1, 0).$$

Por tanto

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

y se tiene

$$x = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad y = \frac{-b}{a^2+b^2}.$$

Definición de $\mathbb{C}$. Por todo lo anterior, $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ es un cuerpo conmutativo en el cual $(\mathbb{R},+,\cdot)$ está sumergido. Este cuerpo $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ se denota mediante $\mathbb{C}$ y se llama cuerpo de los números complejos.

Si $i = (0,1)$, entonces $(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0)\cdot(0,1) = a + bi$. Al escribir cada número de esta forma, $(a,b) = a + bi$, las operaciones quedan como

- suma: $(a+bi) + (c+di) = a + c + (b+d)i$
- producto: $(a+bi)\cdot(c+di) = ac - bd + (ad+bc)i$

Por ejemplo, $i^2 = (0+1i)\cdot(0+1i) = -1$.

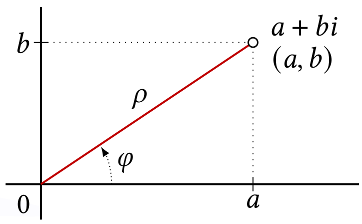
Imposibilidad de un orden compatible en $\mathbb{C}$. Es posible definir en $\mathbb{C}$ un orden, como el lexicográfico, que sea un orden total. Sin embargo, no es posible definir un orden que sea compatible con las operaciones. Se dice que $\mathbb{C}$ no es ordenable.

Para demostrar este hecho se utilizan propiedades de cualquier cuerpo ordenado (0 y 1 son el elemento neutro y unidad de las operaciones):

- $a > 0 \iff -a < 0$, ya que $a > 0 \Rightarrow a - a > 0 - a \Rightarrow 0 > -a$
- $a \neq 0 \iff a^2 > 0$, pues $a > 0 \Rightarrow a\cdot a > 0$ y $-a > 0 \Rightarrow (-a)\cdot(-a) > 0$
- $0 < 1$, consecuencia de las anteriores pues $0 < 1^2 = 1$. Así $-1 < 0 < 1$.

Por tanto, si $\mathbb{C}$ tuviese un orden compatible con las operaciones, entonces cumpliría estas tres condiciones, y se tendría que $i^2 = -1 > 0$, que es falso.

Representación gráfica de los números complejos. Cada número complejo $(a,b) = a + bi$ se puede representar en el plano. Se llama parte real a $\mathrm{Re}(a+bi) = a$ y parte imaginaria a $\mathrm{Im}(a+bi) = b$.



El módulo de $a+bi$ es el número real positivo $\rho = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$. Este módulo es una extensión del valor absoluto en $\mathbb{R}$ y conserva sus propiedades.

Se tiene:

1) $|a+bi| \geq 0$ y $|a+bi| = 0 \Leftrightarrow a+bi = 0$

2) $|a+bi+c+di| \leq |a+bi| + |c+di|$ (desigualdad triangular)

3) $|(a+bi)\cdot(c+di)| = |a+bi|\cdot|c+di|$, en particular, $|-(a+bi)| = |a+bi|$ y $|(a+bi)^{-1}| = |a+bi|^{-1}$ si $a+bi \neq 0$

La demostración de 1) y 3) es un ejercicio sencillo. El apartado 2) tiene una interpretación gráfica simple: al dibujar en el plano los elementos $a+bi$, $c+di$ y su suma $a+bi+c+di$, se obtiene un triángulo. Esta propiedad 2) dice que la suma de dos lados siempre es mayor que el otro lado, de ahí el nombre de desigualdad triangular.

Para el apartado 2) se comienza con la desigualdad inicial y se van escribiendo otras equivalentes:

$$\begin{array}{rcl}
|a+bi+c+di| & \leq & |a+bi|+|c+di| \\
& \Updownarrow & \\
\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} & \leq & \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \\
& \Updownarrow & \\
(a+c)^2+(b+d)^2 & \leq & a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{c^2+d^2} \\
& \Updownarrow & \\
ac+bd & \leq & \sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{c^2+d^2} \\
& \Updownarrow & \\
2abcd & \leq & a^2d^2+b^2c^2 \\
& \Updownarrow & \\
0 & \leq & a^2d^2+b^2c^2-2abcd \\
& \Updownarrow & \\
0 & \leq & (ad-bc)^2.
\end{array}$$

Esta última desigualdad es evidentemente cierta, lo que demuestra que todas lo son.

Escritura en forma polar (módulo-argumento). Si $a+bi\neq 0$, se llama *argumento* de $a+bi$ al número real φ que verifica $-\pi<\varphi\leq\pi$ y

$$a=\rho\cos\varphi=\sqrt{a^2+b^2}\,\cos\varphi$$
$$b=\rho\operatorname{sen}\varphi=\sqrt{a^2+b^2}\,\operatorname{sen}\varphi.$$

Por tanto, cada número $z=a+bi$ puede escribirse como $z=|z|\,(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)$. A veces, este número se escribe como $|z|_\varphi$, indicando su módulo y su argumento de una forma más corta.

Por ejemplo, el número $1+i$ tiene módulo $\rho=2$ y argumento $\varphi=\pi/4$, es decir,

$$\begin{cases} 1=\sqrt{2}\,\cos(\pi/4), \\ 1=\sqrt{2}\,\operatorname{sen}(\pi/4). \end{cases}$$

Por tanto

$$1+i=\sqrt{2}\,\big(\cos(\pi/4)+i\operatorname{sen}(\pi/4)\big).$$

Este número también puede escribirse como $1+i=\sqrt{2}_{\pi/4}$.

Y a la inversa: el número complejo cuyo módulo es $\rho=3$ y argumento $\varphi=\pi/6$ es

$$z=3_{\pi/6}=3\big(\cos(\pi/6)+i\operatorname{sen}(\pi/6)\big)=\frac{3}{2}\big(\sqrt{3}+i\big)=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i.$$

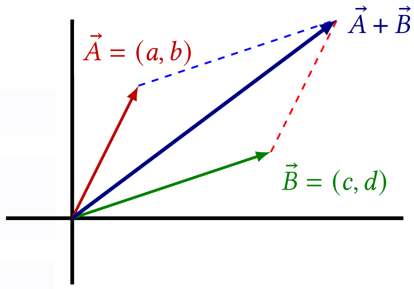
Conjugado de un número complejo. Se llama *conjugado* de $a+bi$ al número $\overline{a+bi}=a-bi$; un número y su conjugado tienen argumentos opuestos φ y $-\varphi$. Si $z=a+bi$ y $w=c+di$, entonces es fácil comprobar que

1) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$
2) $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$
3) $\overline{z/w}=\overline{z}/\overline{w}$ si $w\neq 0$

4) $\bar{\bar{z}} = z$

5) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, y así $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ para $z \neq 0$.

Potencias y raíces complejas



Para escribir la suma de z y w se escriben sus partes reales e imaginarias y se obtiene la suma:

$$\left.\begin{array}{rcl} z & = & a + bi \\ w & = & c + di \end{array}\right\} \Rightarrow z + w = (a + c) + (b + d)i.$$

Gráficamente representa la suma de los vectores (a, b) y (c, d) en $\mathbb{R}^2$.

Para el producto conviene expresar los números complejos con su módulo y argumento. Se escriben

$$\begin{array}{rcccl} z & = & a + bi & = & |z|\,(\cos\varphi_z + i \operatorname{sen}\varphi_z) \\ w & = & c + di & = & |w|\,(\cos\varphi_w + i \operatorname{sen}\varphi_w) \end{array}$$

y así

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a + bi) \cdot (c + di) \\ &= |z|\,(\cos\varphi_z + i \operatorname{sen}\varphi_z) \cdot |w|\,(\cos\varphi_w + i \operatorname{sen}\varphi_w) \\ &= |z| \cdot |w| \Big(\cos\varphi_z \cos\varphi_w - \operatorname{sen}\varphi_z \operatorname{sen}\varphi_w + i(\operatorname{sen}\varphi_z \cos\varphi_w + \cos\varphi_z \operatorname{sen}\varphi_w) \Big) \\ &= |z| \cdot |w| \Big(\cos(\varphi_z + \varphi_w) + i(\operatorname{sen}(\varphi_z + \varphi_w) \Big) \end{aligned}$$

que dice que el módulo del producto es el producto de los módulos y el argumento del producto es la suma de los argumentos. La última igualdad se debe a propiedades de las funciones seno y coseno.

En particular,

$$\begin{array}{rcl} z^2 & = & |z|^2\,(\cos 2\varphi_z + i \operatorname{sen} 2\varphi_z), \\ z^3 & = & |z|^3\,(\cos 3\varphi_w + i \operatorname{sen} 3\varphi_w), \end{array}$$

etcétera.

Ejemplo. Como i tiene módulo 1 y argumento $\pi/2$, cada vez que multipliquemos un número complejo z por i se obtiene otro número complejo que es el resultado de "girar z un ángulo recto en dirección positiva". De la misma forma, si queremos girar un número complejo $\pi/4$ basta multiplicarlo por el número $\cos\pi/4 + i \operatorname{sen}\pi/4$. En general, para girar un número complejo $x + iy$ hay que multiplicarlo por $\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$, y así se gira un ángulo α (en sentido positivo). Al hacer este producto se tiene

$$(x + iy) \cdot (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) = x\cos\alpha - y\operatorname{sen}\alpha + i(x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha).$$

También puede expresarse como

$$(x, y) \cdot (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Estas matrices cuadradas se conocen como matrices de rotación (o de giro).

Esta forma de escribir los números complejos, utilizando el módulo y el argumento, simplifica el cálculo de los productos, potencias y raíces de cualquier orden de un número complejo. Si $z = a + bi = |z|\,(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$ entonces

$$z^n = \Big(|z|(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)\Big)^n = |z|^n\Big(\cos(n\varphi) + i\,\mathrm{sen}(n\varphi)\Big).$$

Ejemplo. Si $z = 1 + i$, el cálculo de $z^6 = (1+i)^6$ se convierte en algo muy simple. Se calculan el módulo y argumento de z, y se tiene

$$z^6 = (1+i)^6 = \Big(\sqrt{2}\,\big(\cos\pi/4 + i\,\mathrm{sen}\,\pi/4\big)\Big)^6 = \sqrt{2}^{\,6}\big(\cos 3\pi/2 + i\,\mathrm{sen}\,3\pi/2\big) = -8i.$$

De forma análoga se puede hacer la operación inversa, el cálculo de raíces.

Ejemplo. ¿Cómo se calcula un número complejo z que verifique $z^3 = i$? (es una forma de decir, ¿cómo se calculan las raíces cúbicas de i?)

Si $z = |z|(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$, entonces, para que se cumpla $z^3 = i$ se ha de verificar $|z|^3(\cos 3\varphi + i\,\mathrm{sen}\,3\varphi) = i$. Por tanto,

$$\begin{cases} |z|^3 &= 1, \\ 3\varphi &= \pi/2. \end{cases}$$

La única solución de la primera ecuación es la raíz cúbica real positiva de 1, es decir, $|z| = 1$. Todas esas raíces cúbicas de i tienen módulo igual a 1.

Las soluciones de la segunda ecuación son

$$\varphi_1 = \frac{\pi/2}{3}, \quad \varphi_2 = \frac{\pi/2 + 2\pi}{3}, \quad \varphi_3 = \frac{\pi/2 + 4\pi}{3}, \quad \varphi_4 = \frac{\pi/2 + 6\pi}{3}\ldots$$

o también

$$\varphi_1 = \frac{\pi/2}{3}, \quad \varphi_2 = \frac{\pi/2}{3} + \frac{2\pi}{3}, \quad \varphi_3 = \frac{\pi/2}{3} + \frac{4\pi}{3}, \quad \varphi_4 = \frac{\pi/2}{3} + \frac{6\pi}{3}\ldots$$

Aparentemente hay muchas soluciones, pero es fácil comprobar que se repiten cíclicamente cada 3, ya que

$$\varphi_4 = \frac{\pi/2 + 6\pi}{3} = \varphi_1 + 2\pi = \varphi_1, \qquad \varphi_5 = \frac{\pi/2 + 8\pi}{3} = \varphi_2 + 2\pi = \varphi_2\ldots$$

Por tanto, las raíces cúbicas de i son los tres números que tienen módulo 1 y argumentos φ_1, φ_2 y φ_3, es decir,

$$z_1 = \frac{\sqrt{3} + i}{2}, \quad z_2 = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}, \quad z_3 = -i.$$

Estas tres soluciones z_1, z_2 y z_3 pueden escribirse en una tabla

	módulo	argumento	
z_1	1	$\frac{\pi/2}{3}$	$z_1 = \big(\cos\frac{\pi/2}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi/2}{3}\big) = (\sqrt{3} + i)/2$
z_2	1	$\frac{\pi/2+2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$	$z_2 = \big(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{6}\big) = (-\sqrt{3} + i)/2$
z_3	1	$\frac{\pi/2+4\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$	$z_3 = \big(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{2}\big) = -i$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Se pueden dibujar estos números z_1, z_2 y z_3 y comprobar cómo están situados equidistantes en la misma circunferencia.

Teorema (fórmula de De Moivre). *Todo número complejo no nulo tiene exactamente n raíces complejas de orden n* (aquí $n = 2, 3, 4\ldots$) *En otras palabras, cada número complejo tiene* 2 *raíces cuadradas,* 3 *raíces cúbicas...*

Este teorema contrasta con lo que ocurre en $\mathbb{R}$. Cada número real positivo tiene una única raíz cuadrada real positiva. Y los números negativos no tienen raíces cuadradas reales.

Demostración. Dado un número complejo $z = |z|\,(\cos\varphi_z + i\,\mathrm{sen}\,\varphi_z)$, se trata de encontrar cuántos números complejos w cumplen la ecuación $w^n = z$ (es decir, w es una raíz n-ésima de z). Como $w = |w|\,\big(\cos\varphi_w + i\,\mathrm{sen}\,\varphi_w\big)$, la ecuación $w^n = z$ se escribe como

$$|w|^n\big(\cos(n\varphi_w) + i\,\mathrm{sen}(n\varphi_w)\big) = |z|\,(\cos\varphi_z + i\,\mathrm{sen}\,\varphi_z).$$

Por tanto, se trata de encontrar números w para los cuales se cumplan

$$\begin{aligned} |w| &= \sqrt[n]{|z|} \\ n\varphi_w &= \varphi_z. \end{aligned}$$

La primera igualdad sólo tiene una solución (sólo hay un número real positivo que sea la raíz n-ésima de $|z|$). De la segunda igualdad se deduce que debe cumplirse una de las n condiciones siguientes (para valores mayores se empiezan a repetir)

$$\varphi_w = \frac{\varphi_z}{n}, \quad \varphi_w = \frac{\varphi_z + 2\pi}{n}, \quad \varphi_w = \frac{\varphi_z + 4\pi}{n}, \ldots, \quad \varphi_w = \frac{\varphi_z + 2(n-1)\pi}{n}.$$

□

Se conoce como *formula de De Moivre* a la expresión que da las n raíces de $|z|(\cos\varphi_z + i\,\mathrm{sen}\,\varphi_z)$, que son

$$\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi_z + 2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\varphi_z + 2k\pi}{n}\right), \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Ejemplo. Si $z = 27i$ entonces se pueden calcular fácilmente los números que verifican $w^3 = z$, es decir, $w = \sqrt[3]{z}$. Estos números son w_1, w_2 y w_3. Todos tienen como módulo $\sqrt[3]{27} = 3$. Sus argumentos son $\frac{\pi/2}{3}$, $\frac{\pi/2+2\pi}{3}$ y $\frac{\pi/2+4\pi}{3}$. Así, por ejemplo,

$$w_1 = 3\Big(\cos(\pi/6) + i\,\mathrm{sen}(\pi/6)\Big) = \frac{3}{2}\Big(\sqrt{3} + i\Big)$$

que es un número que tiene módulo 3 y con argumento $\pi/6$ (es decir, 30 grados). Su representación gráfica es fácil.

Ejemplo. Las soluciones z de $(1+i)^4 = z^4$ son

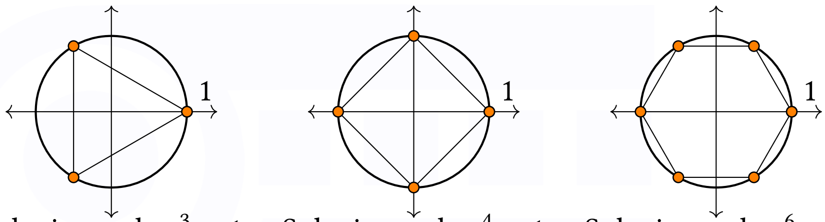
$$z_1 = 1 + i,\ z_2 = 1 - i,\ z_3 = -1 + i,\ z_4 = -1 - i.$$

Raíces de la unidad

Dado $n = 2, 3, 4\ldots$, se llaman raíces n-ésimas de la unidad a los números complejos que verifican $z^n = 1$. En total hay n números que verifican esa ecuación. Son números cuyo módulo es 1, se sitúan equidistantes en la circunferencia de radio 1 y además el número 1 siempre es uno de ellos.

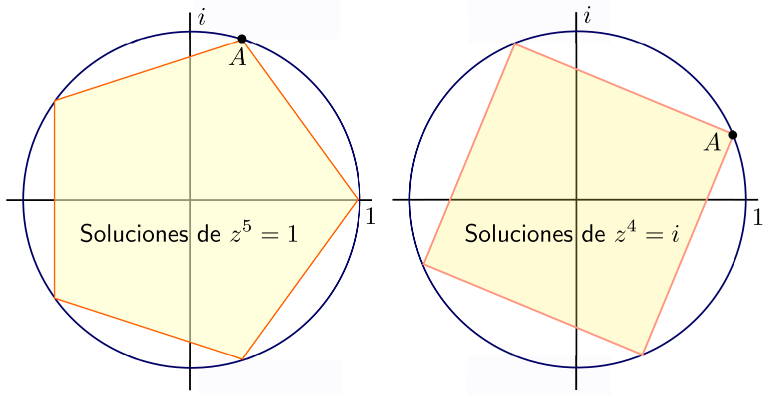
El caso $n = 2$ es muy simple: las raíces cuadradas de la unidad son las soluciones de la ecuación $z^2 = 1$. Hay dos soluciones que son $z = \pm 1$.

Para $n = 3$, las raíces cúbicas de la unidad son los números que cumplen $z^3 = 1$, es decir, su módulo es 1 y su argumento es un ángulo que multiplicado por tres sale 0 o $2\pi/3$ o $4\pi/3$. Forman un triángulo equilátero, con vértices sobre la circunferencia de radio 1. Uno de esos vértices está en el punto $z = 1$.



Soluciones de $z^3 = 1$ Soluciones de $z^4 = 1$ Soluciones de $z^6 = 1$

En general, $z^n = 1$ representa los vértices de un polígono regular de n lados, comenzando en $z = 1$. Estos vértices están en la circunferencia de radio 1.



$A = \cos(2\pi/5) + i\,\mathrm{sen}(2\pi/5)$ $A = \cos(\pi/8) + i\,\mathrm{sen}(\pi/8)$

Para otros números, como i, resulta fácil representar sus raíces utilizando la fórmula de De Moivre.

Raíces de polinomios

El teorema fundamental del álgebra dice que cada polinomio con coeficientes reales o complejos

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

tiene alguna raíz en $\mathbb{C}$. Si $r \in \mathbb{C}$ es raíz entonces

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0$$

y el polinomio es divisible por $(x - r)$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \left(b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0\right)(x - r).$$

A su vez se puede aplicar el mismo argumento (el cálculo de una raíz) a este polinomio

$$b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0.$$

Reiterando este proceso

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n(x-r_1)(x-r_2)\cdot \ldots \cdot (x-r_n)$$

donde $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son las n raíces del polinomio.

Ejemplo. El polinomio $(x-i)(x-(1+i)) = x^2-(1+2i)x+i-1$ tiene como raíces a $r_1 = i$ y $r_2 = 1+i$.

Polinomios con coeficientes reales. En un caso especial en el que ocurre lo siguiente: si r es raíz de un polinomio con coeficientes reales, entonces, aplicando las propiedades del conjugado,

$$\begin{aligned} 0 &= a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = \overline{a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0} \\ &= a_n\overline{r^n} + a_{n-1}\overline{r^{n-1}} + \ldots + a_1\overline{r} + a_0 = a_n\overline{r}^n + a_{n-1}\overline{r}^{n-1} + \ldots + a_1\overline{r} + a_0 \end{aligned}$$

y entonces el conjugado $\overline{r}$ de r también es raíz del mismo polinomio.

Ejemplo. Si $3-5i$ es raíz de algún polinomio con coeficientes reales entonces $3+5i$ es raíz del mismo polinomio. Ese polinomio tiene al menos como factor $x^2-6x+34 = (x-(3-5i))(x-(3+5i))$. Este último polinomio de grado 2 es el polinomio de menor grado con coeficientes reales que tiene a ambos números como raíces.

En general, cada pareja de raíces del tipo $a+bi$ y su conjugada generan un factor de grado 2 del polinomio del que sean raíces:

$$\Big(x-(a+bi)\Big)\Big(x-(a-bi)\Big) \;=\; x^2-2ax+a^2+b^2 \;=\; (x-a)^2+b^2.$$

Ejemplo. El polinomio $x^3-3x^2-6x-20$ tiene como raíces $x_1 = 5,\ x_2 = -1+i\sqrt{3}$ y $x_3 = -1-i\sqrt{3}$. Al ser un polinomio con coeficientes reales, las raíces complejas van en parejas (un número y su conjugado). Se tiene entonces

$$\begin{aligned} x^3-3x^2-6x-20 &= (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\ &= (x-5)\Big(x-(-1+i\sqrt{3})\Big)\Big(x-(-1-i\sqrt{3})\Big) \\ &= (x-5)\,(x^2+2x+4) \\ &= (x-5)\,\Big((x+1)^2+3\Big) \end{aligned}$$

Como consecuencia, todo polinomio con coeficientes reales de grado impar tiene alguna raíz real.

La fórmula de Euler

Se conoce así a la famosa expresión que demostró Euler,

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\ \operatorname{sen}\varphi,$$

que establece que todo número complejo z se puede expresar como

$$z = \rho\big(\cos\varphi + i\ \operatorname{sen}\varphi\big) = \rho e^{i\varphi},$$

donde ρ y φ son el módulo y argumento de z. En particular, para $\varphi = \pi$ y $\rho = 1$, se tiene

$$e^{i\pi} = -1$$

o, lo que es lo mismo,

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Una fórmula que relaciona a los cinco números más famosos de las matemáticas. Para muchos la "ecuación más bella de las matemáticas".

Como curiosidad, si se aplica el logaritmo (complejo) se obtiene $i\pi = \log(-1)$.

Otra curiosidad, como $i = e^{i\pi/2}$, entonces $i^i = \left(e^{i\pi/2}\right)^i = e^{-\pi/2}$, un número real. Su valor es aproximadamente $0.207879\ldots$ Convendría leer
`https://math.stackexchange.com/questions/191572/prove-that-ii-is-a-real-number`
sobre este tema.

Algunas fórmulas trigonométricas

Ya se ha visto que $(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^n = \cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi$. Por otra parte, se puede utilizar el desarrollo del binomio de Newton:

$$(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^n = \binom{n}{0}\cos^n\varphi + \binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\cdot(i\operatorname{sen}\varphi) + \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\cdot(i\operatorname{sen}\varphi)^2 \ + \ldots$$

Igualando ambas expresiones se obtienen numerosas fórmulas trigonométricas.

• En el caso $n = 2$ se tiene

$$\begin{aligned}\cos 2\varphi + i\operatorname{sen} 2\varphi = (\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)^2 &= \binom{2}{0}\cos^2\varphi + \binom{2}{1}\cos\varphi\cdot i\operatorname{sen}\varphi + \binom{2}{2}(i\operatorname{sen}\varphi)^2 \\ &= \cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi + i\,2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi.\end{aligned}$$

Igualando la parte real e imaginaria de ambas expresiones se llega a

$$\left\{\begin{array}{lcl}\cos 2\varphi &=& \cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi \\ \operatorname{sen} 2\varphi &=& 2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\end{array}\right.$$

La primera de ellas se puede escribir también como

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - (1 - \cos^2\varphi) = -1 + 2\cos^2\varphi.$$

Así

$$\cos^2\varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2},$$

una fórmula útil en muchas ocasiones, por ejemplo en el cálculo de primitivas.

• En el caso $n = 3$ es similar,

$$\begin{aligned}\cos 3\varphi + i\operatorname{sen} 3\varphi &= (\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)^3 \\ &= \binom{3}{0}\cos^3\varphi + \binom{3}{1}\cos^2\varphi\cdot i\operatorname{sen}\varphi + \binom{3}{2}\cos\varphi\cdot(i\operatorname{sen}\varphi)^2 + \binom{3}{3}(i\operatorname{sen}\varphi)^3 \\ &= \cos^3\varphi - 3\operatorname{sen}^2\varphi\cos\varphi + i\,(3\cos^2\varphi\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}^3\varphi).\end{aligned}$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Por tanto (igualando de nuevo la parte real e imaginaria)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \cos 3\varphi &=& \cos^3\varphi - 3\cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi \\ \operatorname{sen} 3\varphi &=& 3\cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}^3\varphi. \end{array} \right.$$

Ejercicio. Identifica qué está mal en el siguiente razonamiento

$$-1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1}\,\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Para leer: «El matemático que inventó los números complejos» (`https://goo.gl/E4r6nw`)

Abraham **de Moivre** (Francia, 1667–1754)
Johann Carl Friedrich **Gauss** (Alemania, 1777–1855)
Évariste **Galois** (Francia, 1811–1832)

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura