Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

16 · 10 · 2024

4 Cálculo I

Topología en $\mathbb{R}$

Elementos de la topología en $\mathbb{R}$

Una topología en un conjunto da un criterio para poder hablar de proximidad entre sus elementos. En $\mathbb{R}$ hay varias topologías, y de ellas sólo una está inducida por el orden de $\mathbb{R}$. Se llama topología natural o usual de $\mathbb{R}$. En este capítulo se van a describir conceptos y propiedades para esa topología natural.

El elemento básico de esta topología en $\mathbb{R}$ es el intervalo. Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, se definen

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \qquad [a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},$$

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, \qquad [a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Se llama intervalo abierto a (a,b), intervalo cerrado a $[a,b]$, y semi abiertos a los otros dos.

A veces se expresan los intervalos señalando el *centro* y el *radio*: se utiliza $(a-r, a+r)$ para indicar el intervalo centrado en a con radio r. Por ejemplo $(7,9) = (8-1, 8+1)$, un intervalo centrado en 8 con radio 1. Así, el intervalo

$$(a-r,\ a+r) \ = \ \{x \in \mathbb{R} : a-r < x < a+r\} \ = \ \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < r\}$$

está formado por los puntos que están a una distancia inferior a r del centro a. Recuérdese que $-7 < z < 7$ es lo mismo que $|z| < 7$; $-5 \leq \alpha \leq 5$ es lo mismo que $|\alpha| \leq 5$; y en general,

$$a-r < x < a+r \ \Leftrightarrow \ -r < x-a < r \ \Leftrightarrow \ |x-a| < r,$$

$$a-r \leq x \leq a+r \ \Leftrightarrow \ -r \leq x-a \leq r \ \Leftrightarrow \ |x-a| \leq r.$$

Gráficamente, los intervalos $(b,c]$ y $(a-r, a+r)$ son:

Ejemplos. **a)** $\{x \in \mathbb{R} : |x+4| \leq 2\} = \{x \in \mathbb{R} : |x-(-4)| \leq 2\} = [-4-2, -4+2] = [-6, -2]$.

b) $\{x \in \mathbb{R} : |6-x| < 10\} = \{x \in \mathbb{R} : |x-6| < 10\} = (6-10, 6+19) = (-4, 16)$.

c) $\{x \in \mathbb{R} : |9+3x| < 12\} = \{x \in \mathbb{R} : |x+3| < 4\} = (-3-4, -3+4) = (-7, 1)$.

Interior, adherencia, frontera, puntos de acumulación y aislados de un conjunto

Para cualquier subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ se llama *complementario* de A al conjunto $A^c = \{x \in \mathbb{R} : x \notin A\}$. También se denota como $\complement A$. Se tienen las relaciones $A \cap A^c = \varnothing$ y $A \cup A^c = \mathbb{R}$.

Definición. Dados $a \in \mathbb{R}$ y $A \subset \mathbb{R}$ se dice que

a) a es un punto interior de A, y se escribe $a \in \mathring{A}$, si algún intervalo $(a-r, a+r)$ está dentro de A, es decir,
$$a \in \mathring{A} \text{ si } \exists r > 0 \;:\; (a-r, a+r) \subset A.$$

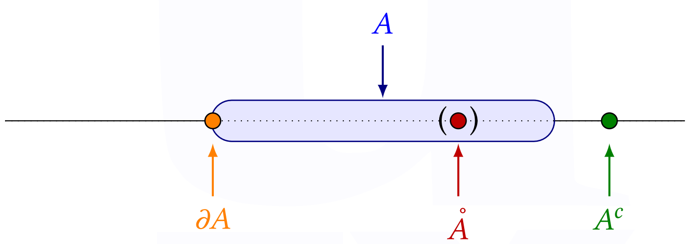
b) a es un punto frontera de A, y se escribe $a \in \partial A$, si cualquier intervalo $(a-r, a+r)$ tiene puntos de A y A^c,
$$a \in \partial A \text{ si } \forall r > 0 \text{ se tiene } \begin{cases} (a-r, a+r) \cap A & \neq \varnothing, \\ (a-r, a+r) \cap A^c & \neq \varnothing. \end{cases}$$

c) a es un punto adherente a A (se dice $a \in \overline{A}$) si $\forall r > 0$ se tiene $(a-r, a+r) \cap A \neq \varnothing$;

d) a es un punto de acumulación de A (y se escribe $a \in A'$) si $\forall r > 0$ se verifica $\big[(a-r, a+r) \setminus \{a\}\big] \cap A \neq \varnothing$;

e) a es un punto aislado de A si $\exists r > 0 \;:\; (a-r, a+r) \cap A = \{a\}$.

Se denotan mediante $\mathring{A}$, ∂A, $\overline{A}$, A' y A^s a los conjuntos de puntos interiores, fronteras, adherentes, de acumulación y aislados del conjunto A.



Ejemplos.

A	$\mathring{A}$	∂A	$\overline{A}$	A'	A^s
$\{2,4,6,8\}$	$\varnothing$	$\{2,4,6,8\}$	$\{2,4,6,8\}$	$\varnothing$	$\{2,4,6,8\}$
$\mathbb{N}$	$\varnothing$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$	$\varnothing$	$\mathbb{N}$
$\mathbb{Q}$	$\varnothing$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\varnothing$
$(0,1)$	$(0,1)$	$\{0,1\}$	$[0,1]$	$[0,1]$	$\varnothing$
$(0,1] \cup \{2\}$	$(0,1)$	$\{0,1,2\}$	$[0,1] \cup \{2\}$	$[0,1]$	$\{2\}$
$\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$	$\varnothing$	$A \cup \{0\}$	$A \cup \{0\}$	$\{0\}$	A

Ejercicio. Escribir correctamente qué significa cada una de las sentencias siguientes, tal y como se hace en el primer apartado:

a) $a \notin \mathring{A} \iff \forall r > 0 \quad (a-r, a+r) \cap A^c \neq \varnothing$

b) $a \notin \partial A \iff \dots$

c) $a \notin \overline{A} \iff \dots$

d) $a \notin A' \iff \dots$

e) $a \notin A^s \iff \dots$

Proposición. *Para cualquier subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ se tiene*

a) $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$;
b) $\overline{A} = \mathring{A} \cup \partial A = A \cup \partial A = A \cup A'$;
c) Si $a \in A$ entonces a es interior o es frontera (pero no puede ser las dos cosas a la vez), es decir, $A \subset \mathring{A} \cup \partial A$;
d) $\partial A = \partial A^c = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.

Ejercicio. Se pueden caracterizar estos conjuntos $\mathring{A}$, $\overline{A}$,... utilizando distancias. Si $x \in \mathbb{R}$ y $A \subset \mathbb{R}$ se define

$$d(x, A) = \inf\{|x-a| : a \in A\}.$$

Es la menor de todas las distancias entres x y los elementos de A. Este valor tiene sentido ya que $\{|x-a| : a \in A\}$ está acotado inferiormente (por 0) y por tanto tiene ínfimo. Además, $d(a, A) = 0$ para todo $a \in A$.

Ejercicio. Comprobar que

1) $x \in A \Rightarrow d(x, A) = 0$, pero la implicación contraria no es cierta en general
2) $x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0$
3) $x \in \mathring{A} \Leftrightarrow d(x, A^c) > 0$
4) $x \in A' \Rightarrow d(x, A) = 0$, y no es cierta en general la implicación contraria
5) $x \in \partial A \Leftrightarrow d(x, A) = d(x, A^c) = 0 \Leftrightarrow x \in \partial A^c$

Definición de la topología en $\mathbb{R}$. Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados

Definición. Se dice que A es abierto si $A = \mathring{A}$, es decir, si todo punto de A es interior. Se dice que A es cerrado si $A = \overline{A}$, es decir todo punto adherente a A pertenece a A.

Hay conjuntos abiertos, conjuntos cerrados, y conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados. Por ejemplo, $\mathbb{N}$ es cerrado y $\mathbb{Q}$ no es ni abierto ni cerrado. El intervalo $(3,7)$ es abierto, $[-2,4]$ es cerrado y $[0,6)$ no es ni abierto ni cerrado. El conjunto $\{1+1/n : n \in \mathbb{N}\}$ no es abierto ni cerrado, pero $\{1+1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$ es cerrado. Se verá más adelante que $\varnothing$ y $\mathbb{R}$ son los únicos que son abiertos y cerrados.

Proposición. *Un conjunto es abierto si y sólo si su complementario es cerrado, es decir, $A = \mathring{A} \Leftrightarrow A^c = \overline{A^c}$, que también se puede escribir como $A = \overline{A} \Leftrightarrow A^c = \mathring{\overline{A^c}}$.*

Demostración. A es abierto $\Leftrightarrow A = \mathring{A} \Leftrightarrow A^c = (\mathring{A})^c = \overline{A^c} \Leftrightarrow A^c$ es cerrado. La única igualdad que necesita demostración es la última, $(\mathring{A})^c = \overline{A^c}$, y se sigue del hecho siguiente:

$$x \in (\mathring{A})^c \iff x \notin \mathring{A} \iff (x-r, x+r) \cap A^c \neq \varnothing \ (\forall r > 0) \iff x \in \overline{A^c}.$$

También se podría haber probado partiendo de un conjunto cerrado: A es cerrado $\Leftrightarrow A = \overline{A} \Leftrightarrow A^c = (\overline{A})^c = \overset{\circ}{\widehat{A^c}} \Leftrightarrow A^c$ es abierto. La última igualdad se sigue de

$$x \in (\overline{A})^c \;\;\Leftrightarrow\;\; x \notin \overline{A} \;\;\Leftrightarrow\;\; (x-r, x+r) \subset A^c \; (\exists r > 0) \;\;\Leftrightarrow\;\; x \in \overset{\circ}{\widehat{A^c}}.$$ □

Las igualdades $(\mathring{A})^c = \overline{A^c}$ y $(\overline{A})^c = \overset{\circ}{\widehat{A^c}}$ que aparecen en la demostración dicen además que $\mathring{A}$ siempre es abierto, y por tanto coincide con su interior. Y $\overline{A}$ es siempre cerrado, luego es igual a su adherencia. Por este motivo no hay doble interior ni doble adherencia.

El paso al complementario $A \longleftrightarrow A^c$ transforma interiores en adherencias, abiertos en cerrados y (leyes de De Morgan) uniones en intersecciones. Más adelante se verá cómo las propiedades que tienen los conjuntos abiertos son similares a las que tienen los conjuntos cerrados siguiendo esta idea de «pasar al complementario»: se cambia abierto por cerrados, unión por intersección,…

Hay muchas propiedades que se pueden expresar de formas distintas mediante el paso al complementario. Son sentencias equivalentes que se escriben negando la propiedad original. Por ejemplo, en el cuadro siguiente se muestran expresiones que coinciden, como 1 y 1'. También coinciden la 2 y 2', etcétera:

1	$x \in A$	1'	$x \notin A^c$
2	$(x-r, x+r) \subset A$	2'	$(x-r, x+r) \cap A^c = \emptyset$
3	$x \in \mathring{A}$	3'	$x \notin \overline{A^c}$
4	$A = \mathring{A}$	4'	$A^c = \overline{A^c}$
5	A es abierto	5'	A^c es cerrado

Definición. Se llama *topología* usual de $\mathbb{R}$ a la colección $\mathfrak{T}$ (se denota con una letra 'T' un poco especial, y a veces se utiliza la letra griega 'tau' τ) formada por el vacío y todos los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$. Se escribe

$$A \in \mathfrak{T} \;\;\Leftrightarrow\;\; A \text{ es abierto o } A = \emptyset.$$

Teorema (propiedades de la topología usual).

a) $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathfrak{T}$

b) $A_i \in \mathfrak{T}$ $(i \in I) \Rightarrow \cup_{i\in I} A_i \in \mathfrak{T}$ (*la unión de conjuntos abiertos es un conjunto abierto*)

c) $A_i \in \mathfrak{T}$ $(i \in I, I$ *finito*$) \Rightarrow \cap_{i\in I} A_i \in \mathfrak{T}$ (*la intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto*)

Demostración. La primera parte es trivial. Para la segunda, si cada A_i es abierto y $a \in \cup_{i\in I} A_i$ entonces para algún valor $j \in I$ se tiene $a \in A_j$. Por ser A_j abierto se tiene $a \in (a-r, a+r) \subset A_j \subset \cup_{i\in I} A_i$. Por último, dada una cantidad finita de abiertos $A_1, \ldots A_n \in \mathfrak{T}$, si $a \in A_1 \cap \ldots \cap A_n$ entonces $a \in (a - r_i, a + r_i) \subset A_i$, ya que cada A_i es abierto. Si $r = \min\{r_1, \ldots, r_n\}$ entonces $a \in (a-r, a+r) \subset A_1 \cap \ldots \cap A_n$. □

En general, la intersección de infinitos conjuntos abiertos no es un conjunto abierto, como por ejemplo

$$(0,\ 1] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0,\ 1 + \frac{1}{n}\right), \qquad \{0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right).$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Proposición. *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es abierto si y sólo si es unión de intervalos abiertos.*

Demostración. Ya se ha visto que si A es unión de intervalos abiertos entonces A es abierto.

Sea entonces A es un conjunto abierto. Para cada $x \in A$ existe un intervalo $(x - r_x,\ x + r_x)$ que verifica (el radio r_x varía con cada punto x)

$$x \in (x - r_x,\ x + r_x) \subset A.$$

Por tanto, tomando uniones,

$$A \ = \ \bigcup_{x \in A} \{x\} \ \subset \ \bigcup_{x \in A} (x - r_x,\ x + r_x) \ \subset \ A$$

y A es unión de intervalos abiertos. □

Como conjuntos cerrados y abiertos se corresponden mediante el paso al complementario (A es cerrado $\Leftrightarrow$ A^c es abierto), utilizando las leyes de De Morgan,

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c, \qquad \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c,$$

se tiene que

Proposición (propiedades de los conjuntos cerrados).

a) $\emptyset, \mathbb{R}$ son cerrados,
b) la intersección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado,
c) la unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Sin embargo, la unión de cerrados puede resultar un conjunto no cerrado, como muestran las igualdades

$$\big(0,\ 1\big] \ = \ \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n},\ 1 \right], \qquad \big(0,\ 1\big) \ = \ \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n},\ 1 - \frac{1}{n} \right].$$

En cursos posteriores se estudian topologías en cualquier conjunto X. Una topología en un conjunto X es una colección $\mathfrak{T}$ de subconjuntos de X, $\mathfrak{T} \subset \mathscr{P}(X)$, que verifica las condiciones del teorema anterior: a) $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$, b) la unión de elementos de $\mathfrak{T}$ es un elemento de $\mathfrak{T}$ y c) la intersección finita de elementos de $\mathfrak{T}$ es un elemento de $\mathfrak{T}$. A los elementos de $\mathfrak{T}$ se les llama abiertos de la topología o, simplemente, abiertos.

Por ejemplo, las topologías con menos y con más abiertos posibles en X se llaman grosera y discreta. La topología grosera sólo tiene como abiertos a $\emptyset$ y X. La topología discreta tiene como abiertos a todos los subconjuntos de X.

En este curso sólo se estudia una topología en $\mathbb{R}$, la usual.

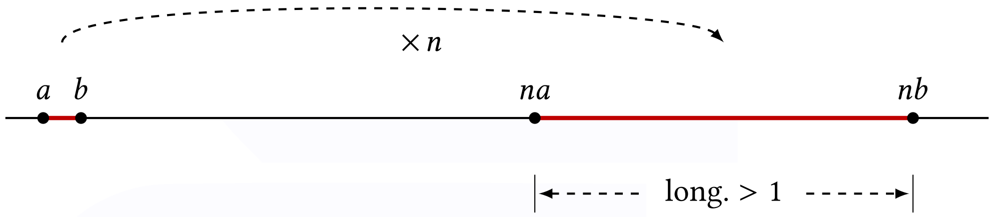
Propiedades topológicas de $\mathbb{R}$

Se puede expresar en términos topológicos la idea de que los números racionales $\mathbb{Q}$ y los números irracionales $\mathbb{I}$ están *por todas partes*: en cada intervalo (a, b) o $(a - r, a + r)$, por pequeño que sea, hay números racionales e irracionales.

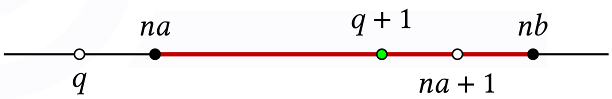
Teorema. *En cada intervalo (a, b) hay números racionales e irracionales.*

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Demostración. Se considera $a, b \in \mathbb{R}$ con $0 < a < b$ (a partir de este caso se consigue fácilmente la demostración si fuera $a < 0 < b$ o bien $a < b < 0$). Se elige $n \in \mathbb{N}$ que verifique $1 < n(b-a)$, es decir $1/n < b-a$. La existencia de este n se puede justificar utilizando la propiedad arquimediana. Con esto se consigue un intervalo $(na,\ nb)$ cuya longitud es mayor que 1.



Como la longitud del intervalo (na, nb) es mayor que 1, debe existir un número entero en dicho intervalo: para ello se elige el mayor entero $q \in \mathbb{Z}$ tal que $q \le na$ (a este número se le llama *parte entera* de na). Así $q \le na < q+1 \le na+1 < nb$.



Por tanto

$$na < q+1 < nb,$$

y así

$$a < \frac{q+1}{n} < b.$$

El número racional $(q+1)/n$ está en el intervalo (a, b).

Para ver que hay números irracionales en (a, b) se considera el mismo razonamiento anterior aplicado al intervalo $(a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2})$. Se encuentra un número racional m/n en él (que verifica $a/\sqrt{2} < m/n < b/\sqrt{2}$) y así $m\sqrt{2}/n \in (a, b)$ es el número irracional buscado. □

Según este resultado, si $a \in \mathbb{R}$, entonces para cualquier $r > 0$ se tiene $(a-r, a+r) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$, y por tanto, $a \in \overline{\mathbb{Q}}$. El mismo razonamiento se puede utilizar para probar que $a \in \overline{\mathbb{I}}$. En definitiva se tiene $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ y $\overline{\mathbb{I}} = \mathbb{R}$ y se dice que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ son *densos* en $\mathbb{R}$. Para una topología en un conjunto X, se dice que $B \subset X$ es denso en X si $\overline{B} = X$.

Corolario. *En cada intervalo (a, b) hay infinitos números racionales e infinitos irracionales.*

El siguiente resultado es equivalente al teorema fundamental del orden en $\mathbb{R}$. Muestra de nuevo la diferencia entre $\mathbb{Q}$ (donde el teorema es falso) y $\mathbb{R}$.

Teorema (Bolzano). *Todo conjunto infinito y acotado de números reales tiene algún punto de acumulación.*

La expresión «conjunto infinito» significa «conjunto con infinitos elementos» o «de cardinal infinito». Por ejemplo, el intervalo $(0, 2)$ es un conjunto infinito.

Este teorema no es cierto en el conjunto de números racionales. Por ejemplo, el conjunto $A = \{1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142, \ldots\}$ tiene infinitos elementos, está acotado, y no tiene puntos de acumulación: ese posible punto de acumulación no está en el conjunto de números racionales.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{R}$ infinito y acotado. En particular A está contenido en un intervalo $A \subset [a, b]$. Se considera el conjunto

$$C = \left\{ x \in [a, b] : \begin{array}{l} \text{a la derecha de } x \text{ hay} \\ \text{infinitos elementos de } A \end{array} \right\}$$

que es acotado superiormente (por ejemplo b es cota superior) y es no vacío, ya que $a \in C$. Sea entonces $d = \sup(C)$. La demostración termina probando que d es punto de acumulación de A.

Para ello se verá que dado $r > 0$ se tiene $(d - r, d + r) \cap A$ es infinito, con lo que resultará que d es punto de acumulación de A. Se tiene

a) a la derecha de $d - r$ hay infinitos elementos de A, ya que en caso contrario $d - r$ sería una cota superior de C menor que d, y

b) a la derecha de $d + r$ hay, como mucho, finitos elementos de A, ya que en caso contrario d no sería cota superior de C.

De a) y b) se sigue que $(d - r, d + r) \cap A$ es infinito. En particular d es punto de acumulación de A. □

Ejemplo. Sea $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Este conjunto A está acotado y por tanto está contenido en un intervalo, por ejemplo $A \subset [-8, 6]$. Sea entonces, como en la demostración,

$$C = \left\{ x \in [-8, 6] : \begin{array}{l} \text{a la derecha de } x \text{ hay} \\ \text{infinitos elementos de } A \end{array} \right\}.$$

En este caso se obtiene $C = [-8, 0]$ y $d = \sup(C) = 0$ es punto de acumulación de A. Si $r > 0$, entonces a la derecha de $d - r$ hay infinitos elementos de A; a la derecha de $d + r$ sólo hay finitos. En este ejemplo casi todos los elementos de A están en el intervalo $(d, d + r)$.

Conjuntos compactos

Se dice que una colección de conjuntos $\{G_i : i \in I\}$ es un recubrimiento abierto de A si cada G_i es abierto y $A \subset \bigcup_{i \in I} G_i$.

Por ejemplo, los intervalos $(0, 3)$ y $(1, 5)$ forman un recubrimiento abierto del conjunto $A = \{2, 3, 4\}$, ya que $A \subset (0, 3) \cup (1, 5)$. Y los intervalos $(-2, 4)$, $(0, 3)$ y $(1, 5)$ también forman un recubrimiento abierto de A:

$$A = \{2, 3, 4\} \subset (-2, 4) \cup (0, 3) \cup (1, 5).$$

Recubrir un conjunto consiste en encontrar otros cuya unión contenga al conjunto inicial. A veces, algunos conjuntos que forman parte de un recubrimiento son redundantes: si se quitan, se sigue teniendo un recubrimiento. En el ejemplo anterior, si se suprime el intervalo $(0, 3)$ se sigue teniendo un recubrimiento de A. Se habla de «extraer un subrecubrimiento» cuando se suprimen elementos de un recubrimiento.

Definición. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se dice compacto si de todo recubrimiento abierto de A se puede extraer un recubrimiento finito (formado por una cantidad finita ellos y que se llama subrecubrimiento finito), es decir,

$$\left. \begin{array}{r} A \subset \bigcup_{i \in I} G_i \\ G_i \text{ abierto } \forall i \in I \end{array} \right\} \Rightarrow A \subset G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \ldots \cup G_{i_n}$$

para alguna elección de $i_1, \cdots, i_n$.

Sea como sea el recubrimiento abierto $\{G_i : i \in I\}$ de A, es suficiente con una cantidad finita de esos conjuntos para seguir recubriendo al conjunto A.

Ejemplos.

1) Todo conjunto finito $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es compacto, ya que de cada recubrimiento de A elegimos un elemento del recubrimiento que contenga a x_1, otro que contenga a x_2, etcétera.

2) Hay conjuntos infinitos como $\mathbb{N}$ que no son compactos: hay recubrimientos como

$$\mathbb{N} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(n - \frac{1}{3},\ n + \frac{1}{3}\right)$$

en los que no se puede quitar ninguno de esos conjuntos, ya que dejaría de ser un recubrimiento de $\mathbb{N}$.
Este ejemplo muestra que *si un conjunto A se puede recubrir por infinitos abiertos $A \subset \cup_{i\in I} G_i$ sin que sobre ninguno de ellos, entonces A no es compacto.*

3) Incluso hay conjuntos acotados que no son compactos, como muestran las siguientes relaciones

$$\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2+n},\ \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2+n}\right)$$

$$\left(0,\ 1\right) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n},\ 1\right)$$

4) En cambio, $\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ sí es compacto. Cualquier abierto que contenga a 0 contiene a todos los términos $1/n$ salvo, a lo sumo, una cantidad finita de términos.

5) $\mathbb{R}$ no es compacto. Para comprobarlo, basta recubrir $\mathbb{R}$ con intervalos de la forma $\left(-n,\ n\right)$.

La caracterización y propiedades de los conjuntos compactos forman un apartado esencial en el análisis de una variable real.

Teorema (Heine-Borel-Lebesgue-Bolzano-Weierstrass) *Para $A \subset \mathbb{R}$ son equivalentes:*

1) *A es compacto.*
2) *Todo subconjunto infinito de A tiene algún punto de acumulación en A.*
3) *A es cerrado y acotado.*

Demostración. La prueba consiste en demostrar las implicaciones 1) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1) y así se tendrá la equivalencia entre todas: 1) $\Leftrightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 3). La implicación 2) $\Rightarrow$ 1) no se hará este curso.

1) $\Rightarrow$ 3). Se trata de ver que si A es compacto, entonces A es cerrado y acotado.

Para ver que A es acotado: se considera el recubrimiento abierto $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(-n,\ n\right)$. Como A es compacto, se puede extraer un subrecubrimiento finito,

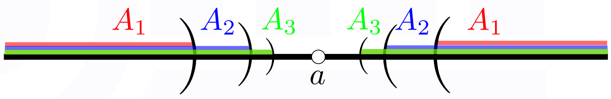
$$A \subset \bigcup_{n=1}^{m} \left(-n,\ n\right) = \left(-m,\ m\right)$$

y A está acotado.

Para ver que A es cerrado se razona por reducción al absurdo. Si A no es cerrado, entonces existe un elemento que verifica $a \in \overline{A}$, $a \notin A$ (todo conjunto cumple $A \subset \overline{A}$ y ambos coinciden sólo cuando A es cerrado). Se consideran los conjuntos

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x \in \mathbb{R} : |x-a| > 1\} && = [a-1,\ a+1]^c \\ A_2 &= \left\{x \in \mathbb{R} : |x-a| > \frac{1}{2}\right\} && = \left[a-\frac{1}{2},\ a+\frac{1}{2}\right]^c \\ A_3 &= \left\{x \in \mathbb{R} : |x-a| > \frac{1}{3}\right\} && = \left[a-\frac{1}{3},\ a+\frac{1}{3}\right]^c \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

que son todos abiertos y verifican $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$



Además forman un recubrimiento abierto $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$, ya que si $x \in A$ entonces $|x-a| > 0$ y así $x \in A_n$ para algún n. De este recubrimiento no es posible extraer un subrecubrimiento finito. Si A estuviera contenido en una unión finita de esos conjuntos $A \subset A_1 \cup \dots \cup A_n$ entonces A estaría contenido en el de subíndice mayor, $A \subset A_n$. Pero entonces se tendría $|x-a| > 1/n$ para todo $x \in A$ y a no sería un elemento de $\overline{A}$, ya que $(a-1/n,\ a+1/n)$ no tendría puntos de A. Se llega entonces a un absurdo.

3) $\Rightarrow$ 2). Es el teorema de Bolzano. Por ser A acotado, cualquier subconjunto $B \subset A$ infinito también lo es. Por el teorema de Bolzano B tiene un punto a de acumulación que verifica $a \in \overline{B} \subset \overline{A} = A$. □

Corolario. *Son conjuntos compactos la unión finita de compactos, la intersección de compactos y los subconjuntos cerrados de compactos.*

Definición. Se dice que a es el máximo de A si $a = \sup(A)$ y además $a \in A$. Se dice que a es el mínimo de A si $a = \inf(A)$ y además $a \in A$. Se denotan $\max(A)$ y $\min(A)$. Por ejemplo, si $A = (0,1]$ entonces no existe mínimo, $\inf(A) = 0$ y $\sup(A) = \max(A) = 1$.

Por las propiedades ya vistas del supremo e ínfimo de un conjunto, ambos números $\inf(A)$ y $\sup(A)$ son elementos de $\overline{A}$. La idea es simple y ya se ha visto: si $d = \sup(A)$, en cada intervalo $(d-\varepsilon, d+\varepsilon)$ hay elementos de A (o no sería el supremo). Por tanto $d = \sup(A) \in \overline{A}$. Lo mismo con $\inf(A)$.

En total $\inf(A), \sup(A) \in \overline{A}$. Y además $A = \overline{A}$ cuando A es cerrado. En consecuencia,

Proposición. *Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto compacto no vacío, entonces A tiene máximo y mínimo.*

Demostración. Como A es acotado y no vacío existen $\inf(A)$ y $\sup(A)$. Por ser cerrado ambos están en A. □

Ejemplo. Para el conjunto $A = [0,\ 1)$ se tiene

$$\begin{aligned} &\inf(A) = \min(A) = 0, \text{ y} \\ &\sup(A) = 1, \end{aligned}$$

pero A no tiene máximo.

Ejemplo. Si $B = [0,\ 1) \cup (2, 8]$ entonces

$$\begin{aligned} \inf(B) &= \min(B) = 0, \text{ y} \\ \sup(B) &= \max(B) = 8. \end{aligned}$$

Se trata de un conjunto que tiene máximo y mínimo aunque no es compacto.

Bernard Placidus Johann Nepomuk **Bolzano** (Rep. Checa, 1781–1848)
Karl Theodor Wilhelm **Weierstrass** (Alemania, 1815–1897)
Heinrich Eduard **Heine** (Alemania, 1821–1881)
Félix Édouard Justin Émile **Borel** (Francia, 1871–1956)
Henri Léon **Lebesgue** (Francia, 1875–1941)

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura