7

Cálculo I

Funciones reales de variable real
Cálculo diferencial

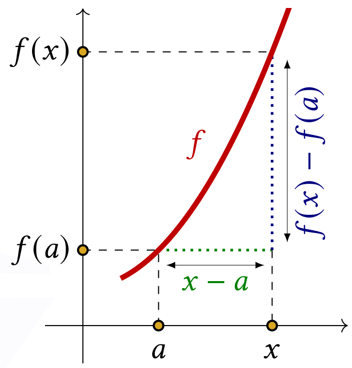
Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

30 · 01 · 2024

«El método para la determinación de la tangente nunca falla; puede incluso hacerse extensivo a una gran cantidad de muy bellos problemas; con su ayuda hallaremos los centros de gravedad de figuras que estén limitadas por curvas y rectas, así como también de cuerpos y muchas otras cosas más sobre las cuales tal vez informemos en otra ocasión, si encontramos tiempo libre para ello». *Pierre de Fermat*

Derivada de una función en un punto

La derivada de una función en un punto indica cómo varía la función al pasar por dicho punto. Ese «cómo varía» puede traducirse por cuánto crece o decrece, cuál es su velocidad, en términos físicos. En definitiva, ese valor de la derivada es una medida de la variación de la función. Si en cada instante x la posición de un objeto viene dada por $f(x)$, entonces el espacio recorrido entre los instantes a y x es $f(x)-f(a)$. La velocidad media en ese trayecto es



$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Para medir la velocidad instantánea en a será necesario hacer estas mediciones a medida que x se acerca al punto a.

Definición. Se dice que un conjunto A es un entorno de a si $a \in \mathring{A}$. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un entorno de $a \in \mathbb{R}$. Se dice que f es derivable o diferenciable en a si existe

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a),$$

que se llama derivada de f en a y se denota mediante $f'(a),\ \dot{f}(a),\ df(a),\ Df(a),\ \dfrac{df}{dx}(a),\dots$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Nota. Es posible definir la derivada de f en $a \in A \cap A'$. En ese caso es posible que se deba hablar sólo de la derivada por la izquierda o por la derecha. Es necesario revisar resultados que pueden ser diferentes para $a \in \mathring{A}$ y para $a \in A \cap A'$. Por ejemplo, la función $f(x) = x$ tiene en $[0,1]$ máximo y mínimo pero su derivada no se anula nunca. Ya se verá que en puntos interiores del dominio, cada máximo o mínimo anula a su derivada.

Ejemplo. Cualquier función constante es derivable en todos los puntos, y su derivada es cero: si $f(x) = k$ para todo x, entonces

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{0}{x - a} = 0.$$

Ejemplo. Las funciones $x \longrightarrow x$, $x \longrightarrow x^2$, $x \longrightarrow x^3, \ldots$ son derivables en todos los puntos. Además se pueden calcular fácilmente sus derivadas en cualquier punto. Por ejemplo:

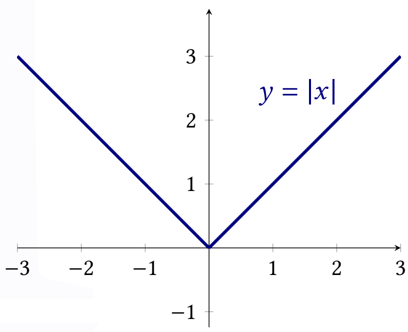
$$\begin{aligned}
f(x) = x \quad &\Rightarrow \quad f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{x - a} = 1,\\
f(x) = x^2 \quad &\Rightarrow \quad f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a} (x + a) = 2a,\\
f(x) = x^3 \quad &\Rightarrow \quad f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim_{x \to a} (x^2 + ax + a^2) = 3a^2,\\
f(x) = x^4 \quad &\Rightarrow \quad f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^4 - a^4}{x - a} = \lim_{x \to a} (x^3 + ax^2 + a^2x + a^3) = 4a^3,\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Ejemplo: existen funciones continuas en un punto y no derivables en dicho punto. Esto muestra que ser continua no es suficiente para ser diferenciable.

La función $f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow |x|$ es continua en todo $\mathbb{R}$. En particular es continua en 0. Sin embargo esta función no es diferenciable en 0 pues

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

no existe. Por la derecha vale 1 y por la izquierda vale -1. Se podría hablar de derivadas laterales, y en este caso se tendría $f'_-(0) = -1$ y $f'_+(0) = 1$.



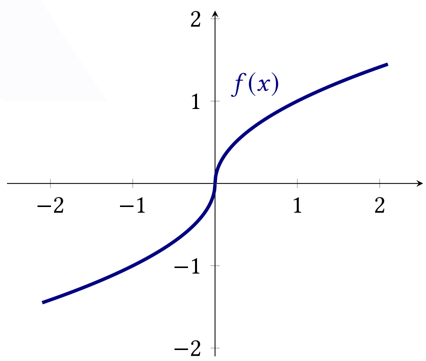
Esta función $f(x) = |x|$ sí es derivable en cualquier otro punto $a \neq 0$. Su derivada es $f'(a) = 1$ si $a > 0$ y $f'(a) = -1$ si $a < 0$.

Ejemplo. La función

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

es diferenciable para $a \neq 0$. Por ejemplo, si $a > 0$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{(x - a)\left(\sqrt{x} + \sqrt{a}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

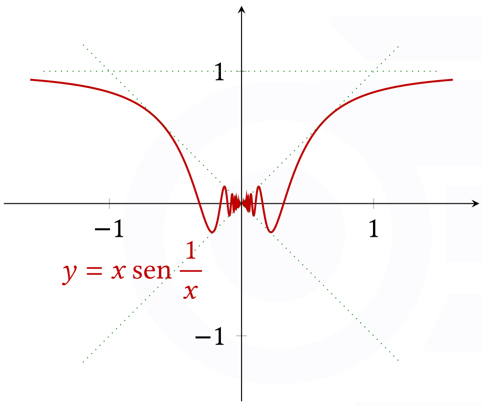


Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Sin embargo, esta función no es derivable en $a = 0$. Para los valores $x \geq 0$ se tiene

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = 1/\sqrt{x}$$

y no existe la derivada en 0.



Ejemplo. La función

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

es continua en cualquier punto. Si $a \neq 0$ la continuidad es evidente; la desigualdad

$$|f(x) - f(0)| \;=\; \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \;\leq\; |x| \;=\; |x - 0|$$

muestra que también es continua en $a = 0$.

Sin embargo, esta función no es derivable en $a = 0$ porque

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \;=\; \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x},$$

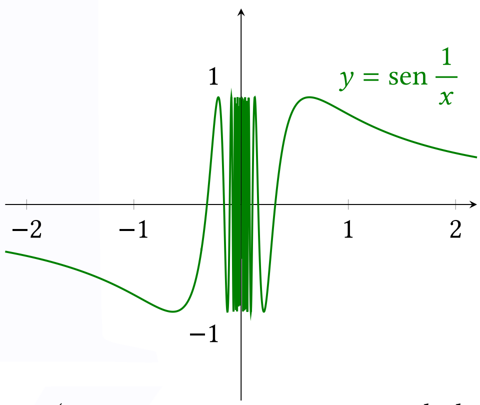
y este límite no existe.

Ejemplo. La función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

no es continua en $a = 0$, ya que

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$



no existe. Por tanto, la función no es derivable en ese punto (esto es como consecuencia de la proposición que se verá a continuación).

Ejemplo. La función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

es continua y derivable sólo en $a = 0$. En el resto no es ni derivable ni continua.

Proposición. *Si f es derivable en a, entonces f es continua en a.*

Demostración. Como f es derivable en a entonces

$$0 \;=\; 0 \cdot f'(a) \;=\; \lim_{x \to a} (x - a) \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \;=\; \lim_{x \to a} (x - a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \;=\; \lim_{x \to a} f(x) - f(a)$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

y por tanto, f es continua en a. □

Suele decirse que las funciones continuas son aquellas cuya gráfica es de «una sola pieza», o que «no está rota». Las funciones diferenciables son aquellas que además tienen una gráfica sin «picos», que es una «curva suave». Habría que matizar ambas apreciaciones después de algunos ejemplos vistos sobre funciones continuas y diferenciables.

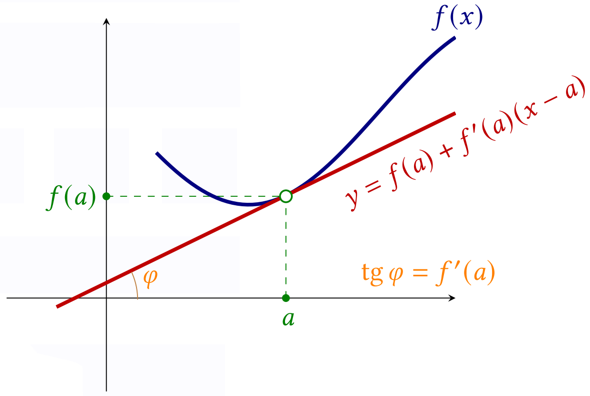
Proposición. *Si f es derivable en a entonces la gráfica de f tiene una recta tangente en el punto $(a, f(a))$. Esa recta y f coinciden en a y sus derivadas en a también coinciden.*

Demostración. Por definición de derivabilidad de f en a se tiene

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a),$$

y por tanto

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} = 0.$$



Si se define $r(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$, una función cuya gráfica es una recta, se cumple

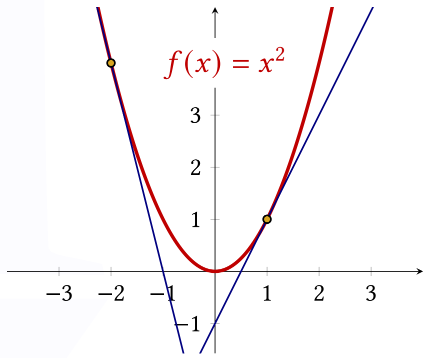
$$r(a) = f(a), \quad r'(a) = f'(a), \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x) - r(x)}{x - a} = 0.$$

Se dice que $f(x)$ y $r(x)$ (función polinómica de grado menor o igual que 1) tienen un contacto de orden 1. Gráficamente, esto significa que la gráfica de f, es decir, la curva $y = f(x)$, tiene recta tangente en el punto $(a, f(a))$. □

Ejemplo. La función $f(x) = x^2$ es derivable en cualquier punto. En cada punto $(a, f(a)) = (a, a^2)$ de la gráfica, la recta tangente es

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) = a^2 + 2a(x - a).$$

Por ejemplo, la recta tangente a la gráfica de f en $(1, 1)$ es la recta de ecuación $y = 1 + 2(x - 1)$. En el punto $(0, 0)$ la recta tangente es $y = 0$. Y en el punto $(-2, 4)$ la recta tangente es $y = 4 - 4(x + 2)$.



Proposición (álgebra de derivadas). *Si f y g son derivables en a, entonces también lo son las funciones λf, $f + g$ y fg. Si además $g(a) \neq 0$ también es derivable la función f/g. Se verifica en estos casos*

- $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
- $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$

Demostración.

$$\begin{aligned}(f + g)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= f'(a) + g'(a)\end{aligned}$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

$$(\lambda f)'(a) = \lim_{x\to a}\frac{(\lambda f)(x)-(\lambda f)(a)}{x-a} = \lambda\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lambda f'(a)$$

$$\begin{aligned}(fg)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}g(x) + \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\cdot f(a)\\ &= f'(a)g(a)+f(a)g'(a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f/g)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{(f/g)(x)-(f/g)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{g(a)f(x)-f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x-a)}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(x)}{g(a)g(x)(x-a)}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(a)g(x)(x-a)}\cdot g(a) - f(a)\cdot\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{g(a)g(x)(x-a)}\\ &= \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}\end{aligned}$$

□

Proposición (regla de la cadena), *Si f es derivable en a y g es derivable en $f(a)$, entonces $g\circ f$ es derivable en a y se tiene*

$$(g\circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big)\cdot f'(a).$$

Demostración. Por definición de derivada se tiene

$$\begin{aligned}(g\circ f)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\ &= g'(f(a))\cdot f'(a).\end{aligned}$$

Esta demostración sería correcta si se pudiera garantizar que $f(x)-f(a)\neq 0$ para $x\neq 0$. Por este motivo hay que dar un pequeño rodeo para conseguir la prueba en el caso más general.

Sea U un entorno de a en el que está definida f y sea V un entorno de $f(a)$ en el que está definida la función g. Se considera la función

$$h : y\in V \longrightarrow h(y) = \begin{cases}\dfrac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)} & \text{si} \quad y\neq f(a)\\ g'(f(a)) & \text{si} \quad y = f(a)\end{cases}$$

Esta función es continua en $f(a)$ porque

$$\lim_{y\to f(a)}\frac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)} = g'(f(a)).$$

Además

$$\big(y-f(a)\big)h(y) = g(y)-g(f(a)),$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

igualdad evidentemente cierta para $y \neq f(a)$ (por definición de la función h); si $y = f(a)$ entonces ambos términos son iguales a 0.

En particular, para cada $x \in U$ se tiene

$$\big(f(x) - f(a)\big)h(f(x)) \;=\; g(f(x)) - g(f(a))$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(a) &= \lim_{x \longrightarrow a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} \;=\; \lim_{x \longrightarrow a} \frac{\big(f(x) - f(a)\big)h(f(x))}{x - a} \\ &= \lim_{x \longrightarrow a} h(f(x)) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= g'(f(a)) \cdot f'(a).\end{aligned}$$

□

Como curiosidad, para entender mejor esta demostración de la regla de la cadena, y qué es el razonamiento heurístico, se pueden leer

`https://calculoinfinitesimal.wordpress.com/tag/regla-de-la-cadena`

`http://es.wikipedia.org/wiki/Heurística`

`http://lema.rae.es/drae/?val=heurística`

Funciones elementales y sus derivadas

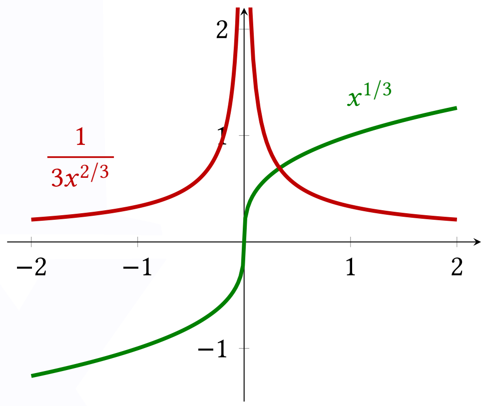
Estas reglas de derivación ya vistas permiten conocer derivadas de funciones que son suma, producto, composición,... de funciones elementales, que tienen derivadas conocidas. Puede verse en las hojas de ejemplos y ejercicios cómo se pueden calcular las derivadas de algunas de estas funciones elementales como $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ o e^x.

Definición. Se dice que $f : A \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable si es derivable en todos los puntos de A. En ese caso, a la función $f' : x \in A \longrightarrow f'(x)$ se le llama función derivada de f.

Derivadas de funciones potenciales. Las funciones del tipo $f(x) = x^p$ con $p \in \mathbb{R}$ tienen su conjunto de definición $\mathbb{R}_+$ que es ampliable según sea el valor de p. Las inversas de las funciones potenciales son funciones potenciales.

La derivada de $f(x) = x^p$ es $f'(x) = px^{p-1}$.

En algunos casos la función derivada tiene un conjunto de definición distinto. Por ejemplo, si $f(x) = x^{1/3}$ entonces $f'(x) = 1/3x^{2/3}$, que no está definida en 0.



Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas. Las funciones $f(x) = a^x$ (con $0 < a \neq 1$) son derivables en todo $\mathbb{R}$. Su derivada es $f'(x) = a^x \log a$. En el caso especial $f(x) = e^x$ se tiene $f'(x) = e^x$. Además, $a^x = e^{\log a^x} = e^{x \log a}$, que es otra forma que recordar cómo es la derivada de a^x a partir de la derivada de e^x: $(a^x)' = (e^{x \log a})' = e^{x \log a} \log a = a^x \log a$.

Las funciones logarítmicas, inversas de las exponenciales, $f : x \in \mathbb{R}_+ \longrightarrow \log_a x$ tienen como derivada $f'(x) = 1/(x \log a)$. En el caso especial $f(x) = \log x$ se tiene $f'(x) = 1/x$.

Como se muestra más adelante (pág. 8), al ser funciones inversas unas de otras (y todas derivables), las derivadas se pueden calcular unas a partir de las otras utilizando la regla de la cadena:

a) si $f(x) = \log x$ y $g(x) = e^x$ entonces $x = (g \circ f)(x)$

$$x \xrightarrow{f} \log x \xrightarrow{g} e^{\log x} = x$$

y derivando se tiene

$$1 \;=\; (g \circ f)'(x) \;=\; g'(f(x))f'(x) \;=\; e^{\log x}\log'(x).$$

Por tanto,

$$\log'(x) = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}.$$

b) lo mismo para las funciones $f(x) = \log_a x$ y $g(x) = a^x$.

Derivadas de funciones trigonométricas. La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es derivable en todo $\mathbb{R}$ y se tiene $f'(x) = \cos x$. Esto dice que (es la definición de derivada)

$$\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x - a} \;=\; \cos a$$

para cada $a \in \mathbb{R}$. En el caso especial $a = 0$ se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \;=\; 1.$$

La inversa de $f(x) = \operatorname{sen} x$ es la función $g : x \in (-1, 1) \longrightarrow \operatorname{arcsen} x$ tiene como derivada

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Esta derivada se puede calcular a partir de la derivada de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ utilizando la regla de la cadena, ya que $x = (f \circ g)(x)$:

$$\begin{aligned}
1 &= (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos(\operatorname{arcsen} x) \cdot \operatorname{arcsen}'(x) \\
&= \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen} x)} \cdot \operatorname{arcsen}'(x) \\
&= \sqrt{1 - x^2} \cdot \operatorname{arcsen}'(x)
\end{aligned}$$

Derivadas de las demás funciones elementales. Conocidas estas derivadas y las reglas que permiten conocer las derivadas de sus sumas, productos, composiciones,… se obtienen las derivadas de las funciones elementales (resultado de operar y componer funciones elementales básicas). Por ejemplo, aplicando la regla del cociente y la regla de la cadena se pueden calcular la derivadas de las funciones

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad g(x) = \cos x^2.$$

Como curiosidad, y esto no es fácil de probar, estas dos funciones no son la derivada de ninguna función elemental.

Ejemplo. La función $\cos x$ puede derivarse utilizando las reglas de derivación a partir de las igualdades

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{o} \quad \cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}\,.$$

Ejemplo. La derivada de la función $\operatorname{tg} x$ se obtiene haciendo

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}'(x) &= \left(\frac{\operatorname{sen}}{\cos}\right)'(x) = \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.\end{aligned}$$

Algunas técnicas más para calcular derivadas

- **Derivadas de funciones inversas**. Hay funciones como $f(x) = x^3$ cuya inversa no es derivable en 0. En las hojas de ejemplos y ejercicios pueden verse algunos resultados sobre la existencia, continuidad y derivabilidad de la función inversa f^{-1} de una función f. Por ejemplo, si I es un intervalo y f es derivable en I con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, entonces f es estrictamente monótona y f^{-1} es derivable. Al aplicar la regla de la cadena en la igualdad $f(f^{-1}(x)) = x$, se tiene

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

  Ejemplos:

  a) Si $f(x) = x^2$, entonces $\left(f^{-1}(x)\right)' = (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

  b) Si $f(x) = e^x$, entonces $\left(f^{-1}(x)\right)' = (\log x)' = \dfrac{1}{e^{\log x}} = \dfrac{1}{x}$.

  c) Si $f(x) = \log x$, entonces $\left(f^{-1}(x)\right)' = (e^x)' = \dfrac{1}{1/e^x} = e^x$.

  d) Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $\left(f^{-1}(x)\right)' = (\operatorname{arcsen} x)' = \dfrac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

- **Derivando expresiones conocidas**. Conociendo la derivada de $\operatorname{sen} x$ se puede calcular la derivada de $\cos x$. Para ello se parte de alguna relación conocida entre ambas funciones, como $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Derivando, $2 \operatorname{sen} x \cos x - 2\cos x\,(\cos x)' = 0$, y así $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.

- **Derivación logarítmica**. Para una función como $f(x) = x^x$, cuya derivada puede resultar complicada, se aplica alguna función antes de derivar que simplifique los cálculos. En expresiones que sean exponenciales una buena idea es aplicar el logaritmo antes de derivar:

$$f(x) = x^x \;\Rightarrow\; \log f(x) = \log x^x = x \log x \underset{\text{derivando}}{\Rightarrow} \frac{f'(x)}{f(x)} = \log x + x\frac{1}{x} = 1 + \log x.$$

  Por tanto, $f'(x) = f(x)(1 + \log x) = x^x(1 + \log x)$.

  Otra forma de hacer esto mismo: $x^x = e^{x \log x}$ y así $(x^x)' = e^{x\log x}(x \log x)' = x^x(1+\log x)$.

  En general, cualquier expresión $f(x)^{g(x)}$ puede escribirse como

$$f(x)^{g(x)} = e^{\log(f(x)^{g(x)})} = e^{g(x)\log f(x)}$$

  y así

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(e^{g(x)\log f(x)}\right)' = f(x)^{g(x)}\left(g(x)\log f(x)\right)'.$$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos

Sea $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \mathring{A}$. Se dice que f en el punto a es

- creciente si $\exists\, \varepsilon > 0 \;:\; a-\varepsilon < x < a < y < a+\varepsilon \;\Rightarrow\; f(x) \le f(a) \le f(y)$,
- estrictamente creciente si $\exists\, \varepsilon > 0 \;:\; a-\varepsilon < x < a < y < a+\varepsilon \;\Rightarrow\; f(x) < f(a) < f(y)$,
- decreciente si $\exists\, \varepsilon > 0 \;:\; a-\varepsilon < x < a < y < a+\varepsilon \;\Rightarrow\; f(x) \ge f(a) \ge f(y)$,
- estrictamente decreciente si $\exists\, \varepsilon > 0 \;:\; a-\varepsilon < x < a < y < a+\varepsilon \;\Rightarrow\; f(x) > f(a) > f(y)$.

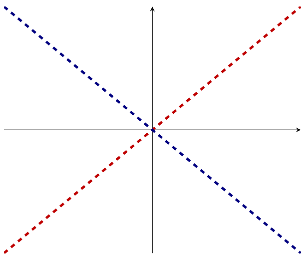
Se dice que f tiene (o alcanza) en a un

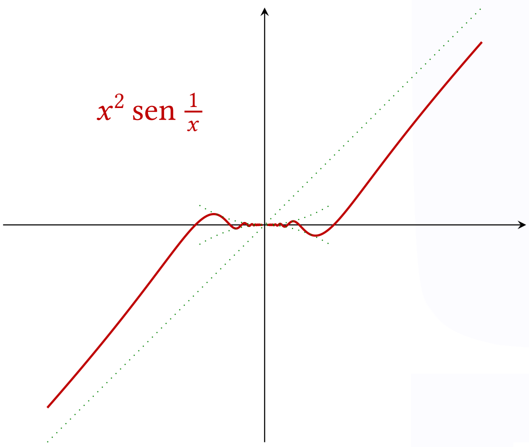
- mínimo relativo si $\exists\, \varepsilon > 0 \;:\; f(a) \le f(x) \quad \forall x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$,
- mínimo relativo estricto si $\exists\, \varepsilon > 0 \;:\; f(a) < f(x) \quad \forall x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon),\ x \ne a$,
- máximo relativo si $\exists\, \varepsilon > 0 \;:\; f(a) \ge f(x) \quad \forall x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$,
- máximo relativo estricto si $\exists\, \varepsilon > 0 \;:\; f(a) > f(x) \quad \forall x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon),\ x \ne a$.

Ejemplos. **a**) La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es creciente en $a = 0$.
b) La función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

es continua en $a = 0$ y no cumple ninguna de las condiciones anteriores.





Ejemplo. La función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \ne 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

es continua en cualquier punto. En $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ porque es elemental, y en $a = 0$ porque $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. También es derivable en todo $\mathbb{R}$. En $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ porque es elemental en un entorno de cualquier $a \ne 0$. En $a = 0$ no es elemental, pero

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0,$$

aunque en $a = 0$ la función no tiene ni máximo ni mínimo.

Este ejemplo muestra además una función f que es derivable cuya función derivada f' no es continua, ya que

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \ne 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Proposición (crecimiento, decrecimiento, extremos y derivada). *Sea $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $a \in \mathring{A}$. Entonces*

a) *si f es creciente en a, entonces $f'(a) \geq 0$,*
b) *si f es decreciente en a, entonces $f'(a) \leq 0$,*
c) *si $f'(a) > 0$ entonces f es estrictamente creciente en a,*
d) *si $f'(a) < 0$ entonces f es estrictamente decreciente en a,*
e) *si f alcanza un extremo relativo (máximo o mínimo) en a entonces $f'(a) = 0$.*

Demostración. La idea consiste en ver cómo son los signos del numerador y denominador en las proximidades del punto a de la expresión

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

a) Si f es creciente en a, entonces para todos los puntos x de un cierto intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ se verifica $f(x) \leq f(a)$ si $x < a$ y también $f(a) \leq f(x)$ si $a < x$. Como consecuencia, para $0 < |x - a| < \varepsilon$ se tiene

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

pues numerador y denominador tienen el mismo signo, tanto para los valores $x < a$ como para los valores $a < x$. Por tanto

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

La misma demostración para el apartado b).

c) Si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) > 0$$

entonces se elige ε suficientemente pequeño para que $0 \notin \Big(f'(a) - \varepsilon, f'(a) + \varepsilon\Big)$, por ejemplo, vale con $\varepsilon = f'(a)/2$. Por tanto, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \Big(f'(a) - \varepsilon, f'(a) + \varepsilon\Big).$$

De aquí se sigue que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > f'(a) - \varepsilon > 0$$

y f es estrictamente creciente en a. Similar demostración para d).

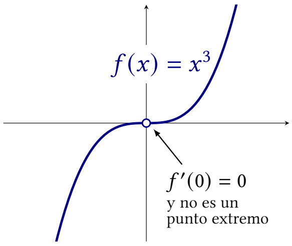
e) Si f alcanza un mínimo relativo en a, entonces $\exists\, \varepsilon > 0 \ : \ |x - a| < \varepsilon \ \Rightarrow \ f(a) \leq f(x)$. Por tanto

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = 0$$

ya que los cocientes son negativos para $x < a$ y positivos para $x > a$. □

Ejercicio: poner ejemplos que muestren que en todos los apartados de este resultado todas las implicaciones contrarias son falsas.

Ejemplo. La función $f(x) = x^3$ es diferenciable en todo punto, es estrictamente creciente en $a = 0$ y $f'(0) = 0$. Esto muestra que la proposición anterior no da una equivalencia entre crecimiento y tener derivada estrictamente mayor que cero.



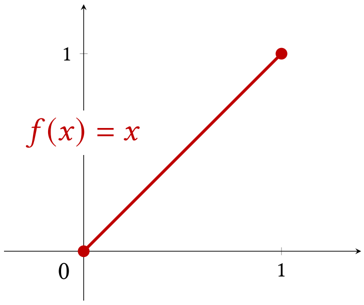
Ejemplo. La función ya vista anteriormente

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

verifica $f'(0) = 0$ pero en 0 no alcanza ningún máximo ni mínimo. Es más, en ese punto la función no es ni creciente ni decreciente. Tampoco se trata de un punto de inflexión.

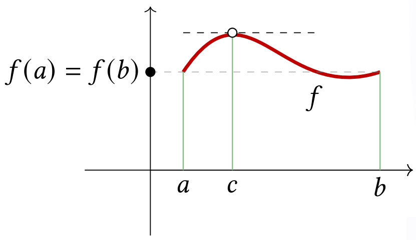
Ejemplo. La función $f : x \in [0,1] \longrightarrow x \in \mathbb{R}$ es derivable en todos los puntos (en los extremos habría que hablar de derivada por la izquierda o por la derecha). El máximo y el mínimo se alcanzan en los extremos del intervalo $[0, 1]$.

Sin embargo, $f'(x) = 1$ en todos los puntos. ¿No contradice este ejemplo la proposición anterior?



Teoremas sobre funciones derivables

Las propiedades vistas anteriormente son propiedades locales: ocurren para un punto y sus proximidades. Hay resultados que tratan de propiedades globales, que ocurren en un cierto conjunto. Una de estas propiedades globales es el próximo resultado.



Teorema (de Rolle). *Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$, diferenciable en (a,b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$* (en algún punto la recta tangente es horizontal).

Demostración. Como f es continua en el compacto $[a,b]$, f alcanza el máximo y el mínimo absoluto en dicho intervalo.

Si alguno es un punto interior, entonces f' se anula en él y se termina la demostración. Si ninguno es interior, entonces al ser $f(a) = f(b)$ se tiene que f es una función constante y f' se anula en todos los puntos. □

El teorema de Rolle dice que entre cada dos soluciones de una ecuación $f(x) = 0$ o una ecuación $f(x) = k$ (con k una constante) hay una solución de su ecuación derivada $f'(x) = 0$. A su vez, entre cada dos soluciones de $f'(x) = k$ hay alguna solución de $f''(x) = 0$, etcétera.

Y a la inversa, Si $f'(x) \neq 0$ para $x \in (a,b)$, entonces las ecuaciones $f(x) = 0$ o $f(x) = 3$ tienen como mucho una solución en dicho intervalo.

Ejemplos:

a) Dada una ecuación, como $xe^x = 1$, se escribe $f(x) = xe^x - 1$. Se trata de encontrar las soluciones de $f(x) = 0$. El teorema de Bolzano dice que una solución a puede encontrarse en

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

$[0, 1]$, ya que f cambia de signo entre 0 y 1. En ese intervalo se puede calcular la solución con las cifras decimales que se quiera. ¿Hay más soluciones? Desde luego sólo puede ser para valores positivos, ya que si $x < 0$ entonces $f(x) < 0$.

Si hay más soluciones b de la ecuación $f(x) = 0$ y $b \neq a$ entonces el teorema de Rolle afirma que existe $c \in (a, b)$ con $f'(c) = 0$. Pero la función derivada es $f'(x) = e^x(1 + x)$ y sólo se anula en $x = -1$. Por tanto, la ecuación $xe^x = 1$ sólo tiene una solución.

b) Entre cada dos raíces reales de un polinomio hay una raíz real de su polinomio derivado. Por ejemplo, el polinomio $p(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ tiene como raíces a 2 y 3. El polinomio derivado $p'(x) = 2x - 5$ tiene una raíz situada entre las dos de p.

c) Entre cada dos soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} x = 0$ (o también entre cada dos soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} x = 0.23$) hay otra de la ecuación $\cos x = 0$.

d) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $x^2 = \cos x$? Si $f(x) = x^2 - \cos x$, es fácil comprobar que f tiene cambios de signo en los intervalos $[-2, 0]$ y $[0, 2]$. Por tanto (teorema de Bolzano), $x^2 = \cos x$ tiene una solución en cada uno de esos intervalos. ¿Hay más soluciones? La respuesta a esta pregunta se consigue con el teorema de Rolle. Como $f(x) = x^2 - \cos x$, $f'(x) = 2x + \operatorname{sen} x$, y $f''(x) = 2 - \cos x$, entonces

$$\begin{gathered} f''(x) = 0 \text{ no tiene soluciones,} \\ \Downarrow \\ f'(x) = 0 \text{ tiene como mucho 1 solución,} \\ \Downarrow \\ f(x) = 0 \text{ tiene como mucho 2 soluciones.} \end{gathered}$$

e) También se pueden mirar las soluciones de una ecuación viendo cómo es la «ecuación primitiva». Por ejemplo, para probar que $xe^x - 1 = 0$ tiene solución, se puede considerar $f(x) = xe^x - 1$ y su primitiva $F(x) = xe^x - e^x - x + C$. Como $F(0) = F(1)$, se aplica el teorema de Rolle y existe $c \in (0, 1)$ con $F'(c) = f(c) = 0$.

Este teorema de Rolle es el comienzo para otros resultados del cálculo diferencial. Algunos se conocen como teoremas del valor medio del cálculo diferencial. A veces aparecen enunciados individualmente. Aquí se estudian en un único teorema con cuatro apartados.

Teorema (teoremas de valor medio del cálculo diferencial). *Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas en $[a, b]$ y diferenciables en (a, b). Entonces*

a) $\exists\, c \in (a, b) \ : \ \big(f(b) - f(a)\big) \cdot g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big) \cdot f'(c)$

b) $\exists\, c \in (a, b) \ : \ f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$

c) $|f'(x)| \leq g'(x) \quad \forall x \in (a, b) \ \Rightarrow \ |f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$

d) $|f'(x)| \leq M \quad \forall x \in (a, b) \ \Rightarrow \ |f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$

Demostración. a) Se considera la función

$$F : x \in [a, b] \longrightarrow F(x) = \begin{vmatrix} 1 & f(x) & g(x) \\ 1 & f(a) & g(a) \\ 1 & f(b) & g(b) \end{vmatrix},$$

es decir, $F(x) = f(a)g(b) - g(a)f(b) - f(x) \cdot \big(g(b) - g(a)\big) + g(x) \cdot \big(f(b) - f(a)\big)$. De la hipótesis se sigue que F es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Además, es evidente que

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

$F(a) = F(b) = 0$. Por el teorema de Rolle existe $c \in (a, b)$ que cumple $F'(c) = 0$, es decir

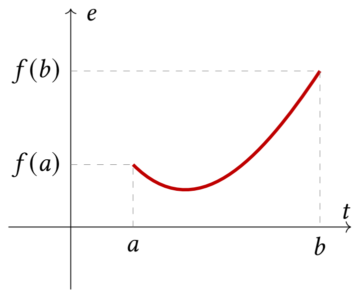
$$-f'(c) \cdot \big(g(b) - g(a)\big) + g'(c) \cdot \big(f(b) - f(a)\big) = 0,$$

que es el apartado a).

b) Es al apartado anterior en el caso particular $g(x) = x$.

c) y d) se verán como corolarios de a) y b) (ver al final de la consecuencia 2 más adelante). □

Interpretación cinemática. Si f y g representan el movimiento de dos móviles, sus derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ representan sus velocidades en el instante x. El eje X se utiliza para representar el tiempo invertido y el eje Y para el espacio recorrido.



▷ Teorema de Rolle. Si f empieza y termina en el mismo lugar, entonces alguna vez ha tenido que parar (que llevar velocidad cero).

▷ Teorema del valor medio a). La razón de espacios recorridos por f y g en el intervalo $[a, b]$ es igual a la razón de velocidades en algún instante:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Por ejemplo, si en el mismo tiempo un móvil recorre el doble espacio que otro, entonces en algún instante ha llevado el doble de velocidad que el otro.

▷ Teorema del valor medio b). Todo móvil ha llevado en algún instante su velocidad media:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Si alguien hace un viaje de 90 km en una hora (velocidad media de 90 km/h), en algún momento de su viaje ha debido de llevar esa velocidad de 90 km/h.

Una aplicación de esta propiedad son los radares de tramo que se utilizan en las carreteras. Es un sistema que identifica la matrícula de un vehículo y el tiempo de paso en dos puntos diferentes de un tramo de carretera. Se mide así la velocidad media en ese tramo. Si es superior a la velocidad permitida, el apartado b) del teorema del valor medio dice que esa velocidad media se ha alcanzado en algún instante y conlleva una sanción.

Por ejemplo, un tramo tiene delimitada la velocidad en 60 km/h y se colocan dispositivos separados en 1 km. Si un vehículo tarda menos de un minuto en hacer este trayecto, entonces ha llevado velocidad media superior a lo permitido; por tanto, en algún instante ha llevado velocidad superior a lo permitido.

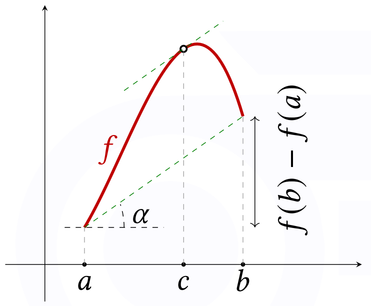
Resulta curioso que en un tramo de 1 km limitado a 60 km/h, vigilado por un radar de tramo, un conductor puede ir a 200 km/h durante unos metros, y después, para compensar y que no le

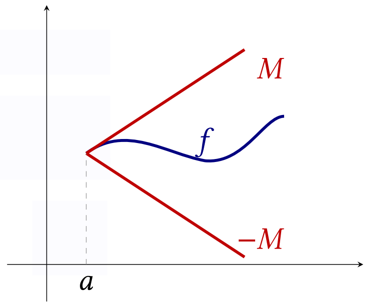
Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

pongan multa, el resto de metros lo hace a la velocidad de 1 km/h. Comete dos infracciones en ese tramo pero no se le sanciona con multa.

En `http://www.autobild.es/noticias/radares-tramo-que-son-como-funcionan-donde-estan-223163` o páginas similares se puede ver información sobre estos tipos de radares.

Interpretación geométrica. Los apartados b) y d) gráficamente:





En algún punto intermedio la tangente es paralela a la cuerda que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Existe $c \in (a, b)$ que cumple

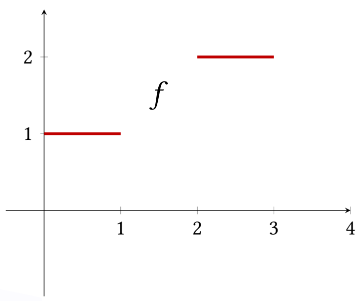
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Si $|f'(x)| \leq M$ en todo punto, entonces la gráfica de f está comprendida entre las gráficas de las rectas de pendientes $-M$ y M

Consecuencias de los teoremas del valor medio. Estos teoremas de carácter global tienen varias implicaciones. Algunas de ellas pueden parecer contradictorias con otras propiedades ya vistas.

$\boxed{1}$ Es conocido que si f es una función constante, entonces $f'(x) = 0$ en cualquier punto. Sin embargo, puede ocurrir que una función verifique $f'(x) = 0$ en todo punto sin tener que ser una función constante.
Por ejemplo, la función

$$f : x \in (0,1) \cup (2,3) \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 2 & \text{si} \quad 2 < x < 3 \end{cases}$$



no es constante aunque $f'(x) = 0$ en cualquier punto.

▷ Después de los teoremas del valor medio se puede probar:

Si $f'(x) = 0$ para todo punto x de un intervalo, entonces f es constante en ese intervalo.

Demostración: si f tiene derivada cero en un intervalo I, dados $a, b \in I$ existe $c \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) = 0$. Luego $f(a) = f(b)$ y f es constante. □

$\boxed{2}$ Si una función f es creciente (es decir $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$) y derivable, entonces $f'(x) \geq 0$ en cualquier punto. La demostración, ya vista, es consecuencia de que f conserva el orden, es decir,

$$x \leq y \;\Rightarrow\; f(x) \;\leq\; f(y) \;\Rightarrow\; \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \;\geq\; 0.$$

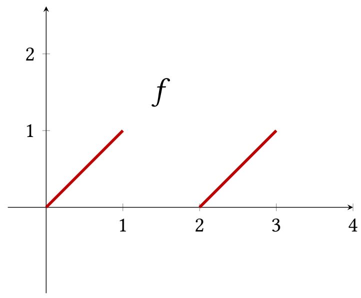
Esto hace que los cocientes que intervienen en la definición de derivada sean todos mayores o iguales que 0. Como consecuencia, los límites de estos cocientes (las derivadas) son mayores o iguales que 0.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Sin embargo, hay funciones que verifican $f'(x) \geq 0$ en todo punto pero no son crecientes.
Por ejemplo, la función

$$f : x \in (0,1) \cup (2,3) \longrightarrow \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ x-2 & \text{si} \quad 2 < x < 3 \end{cases}$$



no es creciente aunque $f'(x) \geq 0$ en cualquier punto.

▷ Los teoremas del valor medio permiten probar que:

Si $f'(x) \geq 0$ en todos los puntos de un intervalo, entonces f es creciente en ese intervalo.

Demostración: si $f'(x) \geq 0$ para todo x en el intervalo I, entonces dados $a, b \in I$ existe $c \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. Luego $f(b) - f(a)$ y $b - a$ tienen el mismo signo, es decir, f es creciente. □

Demostración de los apartados c) y d) del teorema del valor medio. En las consecuencias anteriores se ha visto que si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$ entonces $f(x) - f(a) \geq 0$. Esta idea permite demostrar los apartados c) y d) del teorema del valor medio del cálculo diferencial: si $|f'(x)| \leq g'(x)$ para $x \in (a,b)$ entonces

$$-g'(x) \;\leq\; f'(x) \;\leq\; g'(x)$$

en todo el intervalo. Así $f + g$ y $g - f$ son crecientes y por tanto,

$$f(a) + g(a) \;\leq\; f(x) + g(x), \qquad g(a) - f(a) \;\leq\; g(x) - f(x).$$

De aquí se sigue que

$$-(g(x) - g(a)) \;\leq\; f(x) - f(a) \;\leq\; g(x) - g(a)$$

y entonces

$$|f(x) - f(a)| \;\leq\; g(x) - g(a)$$

para $x \in (a,b)$. Por continuidad también se tiene

$$|f(b) - f(a)| \;\leq\; g(b) - g(a).$$

El apartado d) de ese teorema es un caso particular del c) cuando g es la función $g(x) = Mx$. □

Los apartados a) y b) de este teorema se conocen también como teoremas del valor medio de Cauchy y Lagrange respectivamente.

$\boxed{3}$ **Teorema del valor intermedio para las derivadas**: *Si una función f es derivable en un intervalo abierto I, su función derivada f' (aunque no sea continua) verifica la misma propiedad del valor medio de las funciones continuas, es decir, alcanza todos sus valores intermedios.*

En otros términos, si f es derivable en I y $f'(a) < \alpha < f'(b)$, donde $a, b \in I$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \alpha$. Esto dice que $f'(I)$ es un intervalo.

Demostración. Sean $a, b \in I$ con $a < b$ y sea $f'(a) < \alpha < f'(b)$. Se consideran las funciones auxiliares $g, h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas como

$$g(x) \;=\; \begin{cases} f'(a) & \text{si} \quad x = a \\ \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si} \quad x \neq a \end{cases} \qquad h(x) \;=\; \begin{cases} f'(b) & \text{si} \quad x = b \\ \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} & \text{si} \quad x \neq b \end{cases}$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Es fácil ver que ambas funciones son continuas.

Por una parte, se tiene $g(a) = f'(a) < \alpha < f'(b) = h(b)$. Por otra, el valor $L = g(b) = h(a)$ es forzosamente $L \geq \alpha$ o $L \leq \alpha$. Por tanto α está entre los valores $g(a)$ y $g(b)$ o está entre los valores $h(a)$ y $h(b)$.

Se supone que α está comprendido entre $g(a)$ y $g(b)$ (el otro caso es similar). Como g es continua, existe un valor $c \in (a, b)$ que verifica $g(c) = \alpha$, es decir,

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \alpha.$$

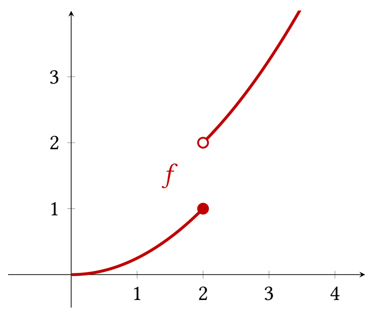
Como f es derivable en (a, c), entonces existe $d \in (a, c)$ tal que

$$f'(d) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \alpha. \qquad \square$$

En particular, una derivada no puede cambiar de signo si no toma el valor cero. Este resultado además permite encontrar ejemplos de funciones que no pueden ser derivadas de otras funciones. Estos ejemplos son funciones que tienen discontinuidades evitables o de salto. Las funciones que son derivada de otra función en un intervalo, sólo pueden tener discontinuidades esenciales de segunda especie (no evitables ni de salto).

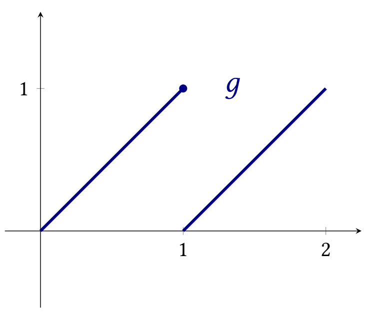
Ejemplo: la función

$$f : x \in (0,4) \longrightarrow \begin{cases} x^2/4 & \text{si} \quad 0 < x \leq 2 \\ 1 + x^2/4 & \text{si} \quad 2 < x < 4 \end{cases}$$



no puede ser la derivada de una función derivable en $(0, 4)$, ya que alcanza valores menores que 1 y valores mayores que 2, pero no alcanza por ejemplo el valor 1.5 (no alcanza todos los valores intermedios).

Esta función no puede ser la derivada de ninguna función en un intervalo que contenga al punto $a = 2$. Sin embargo, en el intervalo $(0, 2)$ la función f sí es la derivada de una función.



Ejemplo: la función

$$g : x \in (0,2) \longrightarrow \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

no es la derivada de una función derivable en $(0, 2)$, aunque la imagen $g(0, 2) = (0, 1)$ es un intervalo. Sin embargo, en el intervalo $(0, 1)$ sí es la derivada de la función $x^2/2$.

Esta función g no puede ser una función derivada en ningún intervalo abierto centrado en 1. Por ejemplo, para el intervalo $(0.9\,,\ 1.1)$ se cumple $g(0.9\,,\ 1.1) = (0\,,\ 0.1) \cup (0.9\,,\ 1]$, que no es un intervalo.

$\boxed{4}$ **Regla de l'Hôpital**: si f y g son derivables en algún entorno de a y $f(a) = g(a) = 0$ entonces el cálculo de

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

no puede hacerse como cociente de límites (se obtiene $0/0$ y se suele decir que es una indeterminación). Una simple manipulación muestra un caso en el que este límite existe:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a}\frac{\big(f(x)-f(a)\big)/(x-a)}{\big(g(x)-g(a)\big)/(x-a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)},$$

donde la última igualdad se obtiene aplicando límite en el numerador y denominador, y tiene sentido siempre que $g'(a) \neq 0$. Hay que notar que $g'(a) \neq 0$ significa que $\lim_{x\to a}\big(g(x)-g(a)\big)/(x-a) = g'(a) \neq 0$; por tanto, $g(x) \neq g(a)$ en algún entorno de a, y puede hablarse de $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \lim_{x\to a}(f(x)-f(a))/(g(x)-g(a))$. En consecuencia

$$\left.\begin{array}{c} f(a) = 0 = g(a) \\ g'(a) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Lógicamente, si $g'(a) = 0$ esto no puede aplicarse. Por ejemplo, si $f(x) = e^x - x - 1$ y $g(x) = x^2$, entonces

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{0}{0},$$

que no tiene sentido.

Para este caso $g'(a) = 0$ hay un resultado que permite calcular este límite $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$. Se conoce como regla de l'Hôpital, y se puede aplicar tanto si $g'(a) = 0$ como si $g'(a) \neq 0$.

Teorema (regla de l'Hôpital). *Sean f y g funciones derivables en algún entorno de a con* $f(a) = g(a) = 0$.
Si existe $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *entonces también existe* $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ *y coinciden.*

Demostración. La hipótesis de que exista el límite $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ obliga a que $g'(x) \neq 0$ para todos los valores $x \neq a$ de algún intervalo centrado en a. Luego en ese intervalo g sólo se anula en a (el teorema de Rolle no permite que haya otro valor verificando $g(x) = 0$). Por tanto, puede hablarse de los cocientes $f(x)/g(x)$.

El teorema del valor medio dice que existe algún valor y intermedio entre x y a que verifica

$$\big[f(x)-f(a)\big]g'(y) = \big[g(x)-g(a)\big]f'(y)$$

y por tanto,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

Así (como y es un valor intermedio entre x y a entonces $y \longrightarrow a$ si $x \longrightarrow a$)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad \square$$

Se suele escribir esta regla de l'Hôpital mediante la igualdad

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

entendiendo que esto es verdad cuando el segundo límite existe y $f(a) = g(a) = 0$.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Ejemplo: aplicando la regla de l'Hôpital, resulta que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{1} = +\infty,$$

que es, evidentemente, falso. El valor correcto es

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x} = -\infty.$$

Este caso muestra la necesidad de asegurarse que se cumplen las hipótesis en la regla de l'Hôpital antes de aplicarla.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

A veces se escribe $\operatorname{sen} x \sim x$ para $x \longrightarrow 0$ y se dice que son infinitésimos equivalentes en 0: para valores $x \longrightarrow 0$ se puede intercambiar el seno de un ángulo y el propio ángulo. Se suele escribir como $\operatorname{sen} x \sim x$ en $x = 0$.

Este ejemplo debería utilizarse con cuidado. Ponerlo como consecuencia de la regla de l'Hôpital es algo engañoso. La función $\operatorname{sen} x$ es derivable y su derivada en cada punto a es $\cos a$. Por tanto,

$$\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x - a} = \cos a.$$

Por ejemplo, para $a = 0$ se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \cos 0 = 1.$$

Este es el verdadero motivo por el cual

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to \pi/3} \frac{\operatorname{sen} x - 1/2}{x - \pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \lim_{x\to \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x - \pi} = -1.$$

Ejemplo: a veces hay que aplicar esta regla dos veces (o tres, o cuatro,...)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo: la función $f(x) = x \operatorname{sen} 1/x$ ya se ha visto anteriormente. Su gráfica, para $x \longrightarrow \pm\infty$, se hace asíntotica al valor 1. Esto es así porque si se hace el cambio $t = 1/x$ se obtiene

$$\lim_{x\to +\infty} x \operatorname{sen} 1/x = \lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{sen} 1/x}{1/x} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1,$$

que se puede escribir como $\operatorname{sen} 1/x \sim 1/x$ en $+\infty$. Con este resultado queda claro que la función $x^2 \operatorname{sen} 1/x$ se hace asíntótica a la recta x; la función $x^3 \operatorname{sen} 1/x$ se hace asíntótica a la parábola x^2, etc.

Este ejemplo muestra que muchas expresiones pueden transformarse en una equivalente en la que se pueda aplicar la regla de l'Hôpital. Por ejemplo,

$$\lim_{x\to 0^+} x \log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0.$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

A veces se aplica alguna manipulación algebraica, como multiplicar y dividir por el conjugado, para transformar una suma o resta en un cociente. La condición para poder aplicar esta regla de l'Hôpital es escribir la expresión original como un cociente, es decir, transformarla hasta llegar a una del tipo $f(x)/g(x)$.

En definitiva, la regla de L'Hôpital también se puede aplicar en casos más generales, como

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty, \quad a = \pm\infty.$$

Las demostraciones son parecidas a la ya vista del caso $f(a) = g(a) = 0$. Dependen de los teoremas del valor medio ya vistos y pueden verse, por ejemplo, en [M. Spivak, Cálculo Infinitesimal, pág. 295–296]. También pueden verse en las hojas de ejemplos y ejercicios una lista completa con ejemplos de estas reglas de l'Hôpital, que se llaman reglas extendidas.

Regla de l'Hôpital extendida:

$$\left.\begin{array}{r} \displaystyle\lim_{x\to\Box} f(x) = \lim_{x\to\Box} g(x) = \odot \\ \displaystyle\lim_{x\to\Box} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \triangle \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to\Box} \frac{f(x)}{g(x)} = \triangle,$$

es válida en los casos (a y b son números reales)

$$\begin{aligned} \Box &= a,\ a^+,\ a^-,\ +\infty,\ -\infty, \\ \odot &= 0,\ \pm\infty, \\ \triangle &= b,\ \pm\infty. \end{aligned}$$

Ejemplo: (en la igualdad marcada con (*) se aplica la regla de L'Hôpital, ya que ambos términos, numerador y denominador, tienden a $+\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x+\sqrt{x^2-x}\right)\left(x-\sqrt{x^2-x}\right)}{x+\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\left(x^2-x\right)}{x+\sqrt{x^2-x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+\sqrt{x^2-x}} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{2}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x}}} = \frac{1}{2}$$

pues

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4x^2-4x+1}{x^2-x}} = \sqrt{4} = 2.$$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x+x)^{1/x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\log(e^x+x)} = e,$$

ya que por la regla de l'Hôpital se tiene

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(e^x+x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{e^x+x} = 1.$$

Derivadas de orden superior

Sea f una función derivable en algún entorno V del punto a. En este caso se puede hablar de la función derivada $f' : x \in V \longrightarrow f'(x)$.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Esta función f' puede ser derivable o no. Incluso puede no ser continua, como ya se ha visto anteriormente.

Ejemplos. **a**) La función

$$f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

es continua en 0 y discontinua (con discontinuidad esencial) en todos los demás puntos. También f es derivable en 0 porque

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

En este caso, no cabe hablar de función derivada: sólo hay derivada en $x = 0$.

b) La función f es derivable

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

y su función derivada f' no es continua, ya que no lo es en $x = 0$.

c) La función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

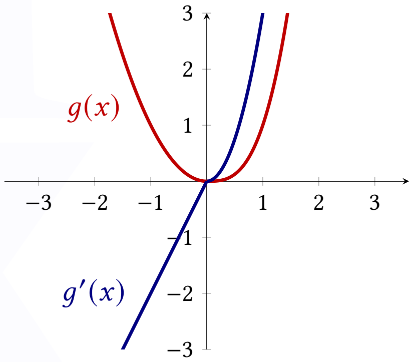
tiene como función derivada a

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}.$$

Esta función f' es continua en todo $\mathbb{R}$ pero no es diferenciable (no lo es en $x = 0$).

d) La función

$$g(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$



es derivable en todo $\mathbb{R}$. Su función derivada

$$g'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 2x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

es continua en todo $\mathbb{R}$ y derivable en todos los puntos $x \neq 0$. Es fácil comprobar que g' no es derivable en 0.

Lo único que se puede asegurar sobre una función derivada f' es que debe cumplir el teorema del valor intermedio para las derivadas: f' alcanza todos los valores intermedios. Esto significa que si f es derivable en todo un intervalo $[x, y]$ y $f'(x) < \alpha < f'(y)$ (o también $f'(y) < \alpha < f'(x)$) entonces existe $z \in (x, y)$ que verifica $f'(z) = \alpha$.

Así pues, para una función derivable f, su función derivada f' puede ser o no continua y, cuando es continua, puede ser derivable o no.

Departamento de Matemáticas Universidad de Extremadura
Departamento de Matemáticas Universidad de Extremadura

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Definición. Se dice que f es dos veces derivable en a cuando f' es derivable en a (esto obliga a que f' esté difinida en algún intervalo centrado en a). Se denota $f''(a) = (f')'(a)$. A veces se escribe $f''(a) = f^{(2)}(a)$.

Se dice que f es n veces derivable en a cuando es $n-1$ veces derivable en algún entorno de a y $f^{(n-1)}$ es derivable en a. Se denota $f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a)$. Si f es n veces derivable para cualquier n se dice que f es indefinidamente derivable.

Por ejemplo, las derivadas de funciones elementales son elementales, y por tanto derivables en su dominio. En consecuencia, las funciones elementales son indefinidamente diferenciables.

Una condición necesaria, pero no suficiente, para que $f^{(n)}(a)$ exista es que $f^{(n-2)}$ sea diferenciable en un entorno de a. En efecto, para que exista $f^{(n)}(a)$ es necesario que $f^{(n-1)}(x)$ exista en algún entorno de a. Luego $f^{(n-2)}$ debe ser diferenciable en todo un entorno de a.

Ejemplos. **a**) La función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x^4 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

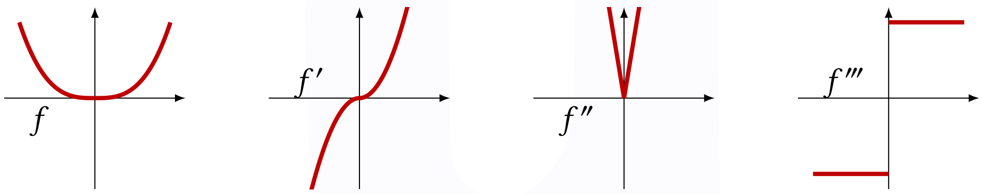
es derivable dos veces pero su segunda derivada f'' no es derivable en 0.

b) En el apartado c) anterior, si se cambia x^2 por x^3 en la definición, se obtiene una función que es dos veces diferenciable.

c) La función $f(x) = |x|^3$ es dos veces diferenciable en 0 pero no es tres veces diferenciable. Se tiene

$$f(x) = |x|^3, \quad f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \geq 0 \\ -3x^2 & x < 0 \end{cases}, \quad f''(x) = 6|x|, \quad f'''(x) = \begin{cases} -6 & x > 0 \\ -6 & x < 0 \end{cases},$$

y no existe $f'''(0)$.



Ejemplo. La función

$$f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \begin{cases} x^3 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. En cada $x \neq 0$ es evidente, ya que f es elemental en esos puntos. Además, si $x \neq 0$ entonces

$$f'(x) = 3x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}.$$

En el punto 0 se tiene

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

ya que

$$|x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}| \;\le\; x^2 \longrightarrow 0 \quad (\text{si } x \longrightarrow 0).$$

Así, la función derivada es

$$f' : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \begin{cases} 3x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} - x \cos \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

que a su vez es elemental en cada $x \neq 0$ y se tiene

$$f''(x) = 6x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x} - 4 \cos \frac{1}{x}.$$

Por tanto f es indefinidamente derivable en cada $x \neq 0$.

Sin embargo, f no es dos veces derivable en 0, porque

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} \;=\; \lim_{x \to 0} \left(3x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right)$$

no existe, ya que si $x \longrightarrow 0$ entonces $3x \operatorname{sen} 1/x \longrightarrow 0$ pero $\cos 1/x$ oscila indefinidamente entre los valores -1 y 1 cuando $x \longrightarrow 0$.

El teorema local de Taylor

El comportamiento en un punto de una función suficientemente derivable en él puede describirse mediante un polinomio que "hace lo mismo" que la función en el punto.

Polinomios en potencias de $x - a$. En el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que n, una base está formada por los polinomios $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$. Se trata de un espacio vectorial de dimensión $n + 1$. Para $a \in \mathbb{R}$, también forman una base los polinomios $\{1, (x - a), (x - a)^2, \ldots, (x - a)^n\}$. Al escribir un polinomio en esta última, se dice que está escrito en potencias de $x - a$.

Por ejemplo, se considera el espacio de polinomios de grado menor o igual que 2. En este espacio, el polinomio $p(x) = 1 + x + x^2$, que está escrito en la base $\{1, x, x^2\}$, se puede escribir en la base $\{1, x - 4, (x - 4)^2\}$. Para ello se hace

$$1 + x + x^2 = \lambda + \mu(x - 4) + \gamma(x - 4)^2$$

y se calculan esos coeficientes λ, μ, γ. Esto se puede hacer directamente, igualando términos de igual grado a la derecha e izquierda. Se obtiene un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas que hay que resolver (con polinomios de mayor grado este proceso se hace largo y pesado).

Sin embargo hay un método más rápido. Consiste en escribir la igualdad anterior y sus derivadas y evaluar en 4:

$$\left.\begin{aligned} 1 + x + x^2 = p(x) = {} & \lambda + \mu(x - 4) + \gamma(x - 4)^2 \\ 1 + 2x = p'(x) = {} & \mu + 2\gamma(x - 4) \\ 2 = p''(x) = {} & 2\gamma \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} 21 = p(4) = {} & \lambda \\ 9 = p'(4) = {} & \mu \\ 2 = p''(4) = {} & 2\gamma \end{aligned}\right.$$

Se obtiene que $p(x) = 1 + x + x^2 = 21 + 9(x - 4) + (x - 4)^2$, que es la expresión del polinomio escrito en potencias de $x - 4$.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

En general, para escribir un polinomio de grado menor o igual que n en potencias de $x-a$

$$p(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n$$

basta repetir este proceso ya visto y se obtiene

$$a_0=p(a),\ a_1=\frac{p'(a)}{1!},\ a_2=\frac{p''(a)}{2!},\ a_n=\frac{p^{(n)}(a)}{n!}.$$

Por tanto

$$p(x)=p(a)+p'(a)(x-a)+\frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

De esta forma, es muy sencillo escribir un polinomio $p(x)$ de grado 3 que verifique $p(7)=12$, $p'(7)=-2$ y $p''(7)=40$. Basta poner

$$p(x)=p(7)+p'(7)(x-7)+\frac{p''(7)}{2!}(x-7)^2=12-2(x-7)+20(x-7)^2.$$

Este proceso muestra una forma de conseguir un polinomio cuyo valor en un punto y las derivadas en ese punto estén determinadas.

Teorema (local de Taylor). *Sea f una función n veces diferenciable en a. Entonces*

$$p(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

es el único polinomio de grado menor o igual que n que verifica

$$p(a)=f(a),\ p'(a)=f'(a),\ \ldots,\ p^{(n)}(a)=f^{(n)}(a),$$

(los valores de p y f y todas sus derivadas hasta orden n en a coinciden). Además se cumple

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-p(x)}{(x-a)^n}\ =\ 0$$

(se dice que f y p tienen un contacto de orden n en a).

Este polinomio

$$p(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

se llama polinomio de Taylor de orden n de f en a. Se suele denotar por $p_a^n f(x)$.

Demostración. Se considera el polinomio de Taylor de orden n de f en a:

$$p(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Es evidente (son unos cálculos simples) que

$$p(a)=f(a),\ p'(a)=f'(a),\ \ldots,\ p^{(n)}(a)=f^{(n)}(a).$$

Que este polinomio es único es evidente: si existe otro polinomio $q(x)$ cumpliendo

$$q(a)=f(a),\ q'(a)=f'(a),\ \ldots,\ q^{(n)}(a)=f^{(n)}(a),$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

entonces $q(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = p(x)$. Con esto se tiene la primera parte de la demostración.

Por otra parte, como consecuencia de la regla de l'Hôpital (aplicada $n-1$ veces):

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{f(x)-p(x)}{(x-a)^n} &= \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-p'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)-p''(x)}{n(n-1)(x-a)^{n-2}} = \ldots \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x)-p^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} \\
&= \frac{1}{n!} \lim_{x\to a} \left(\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a} - \frac{p^{(n-1)}(x)-p^{(n-1)}(a)}{x-a} \right) \\
&= \frac{1}{n!} \left(f^{(n)}(a) - p^{(n)}(a) \right) = 0.
\end{aligned}$$

El último paso es necesario, ya que no se puede aplicar la regla de l'Hopital una vez más, hasta un total de n veces: $f^{(n)}(x)$ puede no existir para $x \neq a$, y aunque existieran esos valores, $f^{(n)}$ puede ser discontinua en a. □

Nota (que aclara el último paso de la demostración): una función como $f(x) = x^2$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$ en el resto, es diferenciable sólo en $a = 0$. No puede aplicarse la regla de l'Hôpital cuando esta función está involucrada, ya que $f'(x)$ existe sólo para $x = a$, y no cabe hablar de valores de $f'(x)$ para $x \longrightarrow a$.

Ejemplo: la función $f(x) = e^x$ es diferenciable indefinidamente. En $a = 0$, su polinomio de Taylor de grado 4 es

$$p_0^4 f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}.$$

Este polinomio coincide con f en $a = 0$ y todas sus derivadas hasta la de orden 4 también coinciden. Al dibujar sus gráficas puede observarse que ambas se parecen del punto $(0,1)$, que es el punto de la gráfica correspondiente al valor $a = 0$.

En ese mismo punto $a = 0$ su polinomio de Taylor de grado 5 es

$$p_0^5 f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Coincide con f en $a = 0$ y todas sus derivadas, hasta la de orden 5, coinciden con las de f en a.

Convexidad, concavidad, inflexión...

Este teorema de Taylor tiene algunas consecuencias importantes. Se puede comprobar cómo son las posiciones de la gráfica de f en a y la recta tangente $y = f(a) + f'(a)(x-a)$. Según sean estas posiciones en las proximidades del punto a se hablará de a como un punto de convexidad, concavidad, inflexión, etcétera.

Sea f varias veces derivable en a y $p_a^1 f(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$. El teorema de Taylor permite analizar la posición relativa de $y = f(x)$ y de $y = p_a^1 f(x)$ en las proximidades del punto a.

Sea

$$m = \min \left\{ n \geq 2 \; : \; f^{(n)}(a) \neq 0 \right\},$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

es decir, el primer valor (a partir de $m = 2$) en el que la derivada $f^{(m)}(a)$ no se anula. El polinomio de Taylor de f en a de grado menor igual que m es

$$p_a^m f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m$$

(el resto de derivadas en a no aparecen porque son iguales son iguales a cero). Ya se ha visto en el teorema local de Taylor que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \dfrac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m}{(x-a)^m} = 0$$

y así

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - p_a^1 f(x)}{(x-a)^m} = \frac{f^{(m)}(a)}{m!}.$$

En consecuencia, en las proximidades del punto a, es decir, en los puntos x de un cierto intervalo $V = (a-\delta, a+\delta)$, se tiene

$$\text{signo}\left[\frac{f(x) - p_a^1 f(x)}{(x-a)^m}\right] = \text{signo}\left[f^{(m)}(a)\right].$$

Esta igualdad permite estudiar las posiciones de la función y la recta tangente en el punto a y decidir la concavidad, convexidad,...de la función en dicho punto. Este estudio se hace dependiendo de cómo sea ese valor $f^{(m)}(a)$ (positivo o negativo) y de cómo sea m (par o impar). Hay pues 4 posibilidades.

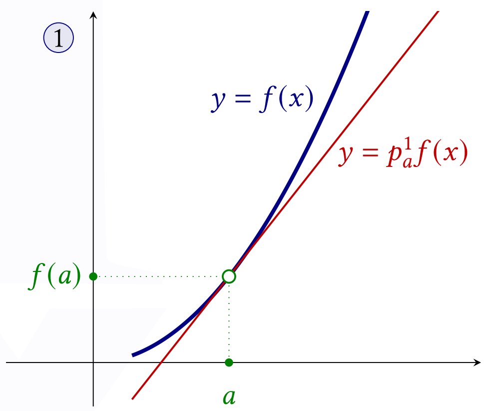
Caso 1: m par, $f^{(m)}(a) > 0$

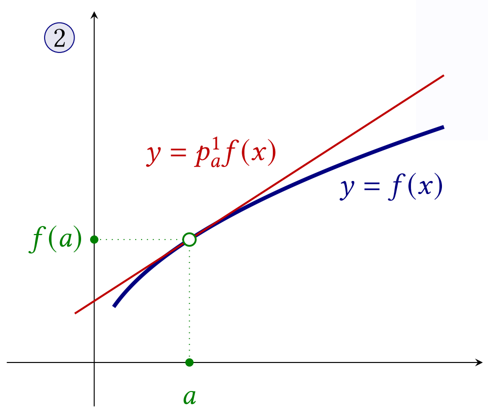
Como $(x-a)^m$ es siempre positivo, se tiene

$$x \in V,\ x \neq a \Rightarrow f(x) - p_a^1 f(x) > 0.$$

Por tanto en las proximidades del punto a la recta tangente $y = p_a^1 f(x)$ está por debajo de la gráfica $y = f(x)$ de la función f.

Se dice que a es un punto de convexidad.





Caso 2: m par, $f^{(m)}(a) < 0$

Ahora se cumple que

$$x \in V,\ x \neq a \Rightarrow f(x) - p_a^1 f(x) < 0.$$

En las proximidades del punto a la recta tangente $y = p_a^1 f(x)$ está por encima de la gráfica $y = f(x)$ de la función f.

Se dice que a es un punto de concavidad.

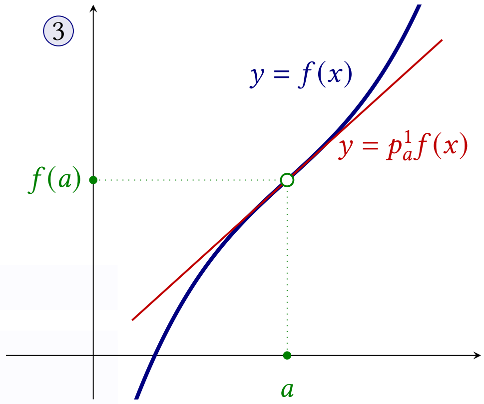
$\boxed{\text{Caso 3: } m \text{ impar, } f^{(m)}(a) > 0}$

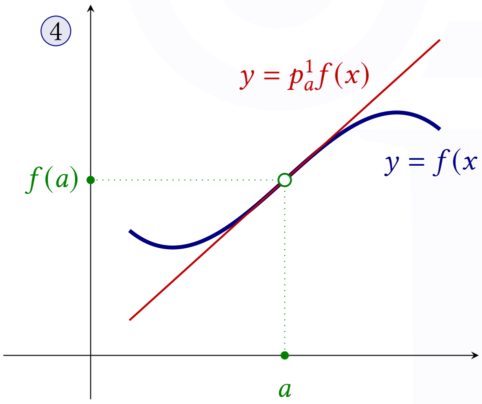
Se verifica

$$x \in V,\ x < a \quad \Rightarrow \quad f(x) - p_a^1 f(x) < 0$$
$$x \in V,\ a < x \quad \Rightarrow \quad f(x) - p_a^1 f(x) > 0$$

En consecuencia, en las proximidades del punto a la recta tangente $y = p_a^1 f(x)$ está por encima de la gráfica a la izquierda de a y por debajo de la gráfica a la derecha de a.

Se dice que a es un punto de inflexión. En este caso f pasa de ser cóncava a ser convexa.





$\boxed{\text{Caso 4: } m \text{ impar, } f^{(m)}(a) < 0}$

Se tiene que

$$x \in V,\ x < a \quad \Rightarrow \quad f(x) - p_a^1 f(x) > 0$$
$$x \in V,\ a < x \quad \Rightarrow \quad f(x) - p_a^1 f(x) < 0$$

En las proximidades del punto a la recta tangente $y = p_a^1 f(x)$ está por debajo de la gráfica a la izquierda de a y por encima de la gráfica a la derecha de a.

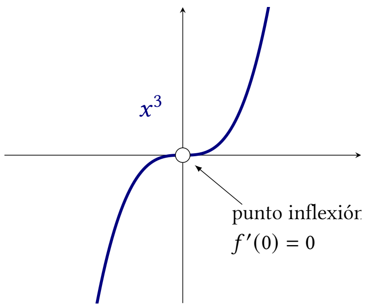
Se dice que a es un punto de inflexión. En este caso f pasa de ser convexa a ser cóncava.

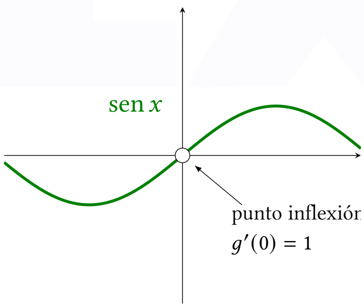
Corolario. *Si a es un punto de inflexión entonces $f''(a) = 0$.*

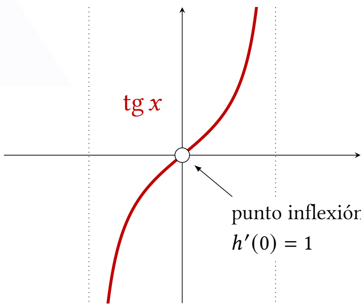
Demostración. Si $f''(a) \neq 0$ entonces a es un punto de convexidad o un punto de concavidad para f, y a no puede ser punto de inflexión. $\square$

El recíproco es falso, es decir, a *punto inflexión* $\Rightarrow$ $f''(a) = 0$ (pero $\not\Leftarrow$). Basta considerar la función $f(x) = x^4$. Se cumple $f''(0) = 0$, y 0 no es un punto de inflexión, es un punto de convexidad.

Ejemplos: **a**) La función $f(x) = x^3$ tiene un punto de inflexión en $a = 0$, y su derivada en ese punto es $f'(a) = 0$.
b) La función $g(x) = \operatorname{sen} x$ tiene un punto de inflexión en $a = 0$, y $g'(a) = 1$.
c) La función $h(x) = \operatorname{tg} x$ tiene un punto de inflexión en $a = 0$, y $h'(a) = 1 + \operatorname{tg}^2 0 = 1$.







Estos ejemplos muestran que ser un punto de inflexión es independiente del valor de la derivada en él. Sin embargo, el valor de la segunda derivada en esos puntos debe ser cero.

Clasificación de los puntos extremos

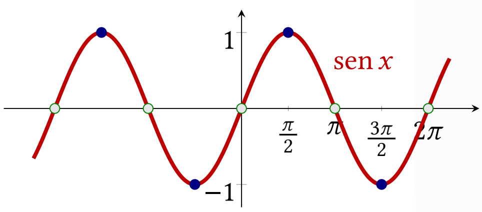
Ya se ha visto que si f es derivable, en cada extremo relativo se anula la derivada, son puntos en los que la recta tangente es horizontal. Por tanto, la ecuación $f'(a) = 0$ tiene entre sus soluciones a los puntos extremos (y, posiblemente, a alguno más). Supuesto que f es varias veces derivable en a, y que $f'(a) = 0$, ¿cómo saber si a es un máximo o un mínimo o un punto de inflexión?

Se busca la primera derivada que no se anula en a, $f^{(m)}(a) \neq 0$. Entonces se tiene,

Caso 1: m par, $f^{(m)}(a) > 0$. La función f alcanza en a un mínimo relativo (a es un punto de convexidad con tangente horizontal).
Caso 2: m par, $f^{(m)}(a) < 0$. La función f alcanza en a un máximo relativo (a es un punto de concavidad con tangente horizontal).
Caso 3: m impar. El punto a es un punto de inflexión para f (con tangente horizontal).

Como resumen puede servir este esquema:

$$\boxed{f'(a) = 0} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} f^{(m)}(a) \neq 0 \\ \text{(el menor } m) \end{array}} \begin{array}{l} \xrightarrow{m \text{ par}} \boxed{\begin{array}{l} f^{(m)}(a) > 0 \implies a \text{ es un mínimo} \\ f^{(m)}(a) < 0 \implies a \text{ es un máximo} \end{array}} \\ \xrightarrow{m \text{ impar}} \boxed{a \text{ es un punto de inflexión}} \end{array}$$



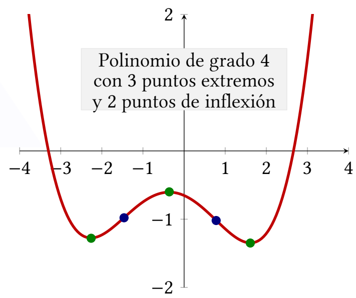
Ejemplo 1. La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ tiene ceros en todos los valores $\dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots$. Los posibles puntos extremos son las soluciones de $\cos x = 0$, es decir, los valores $\dots, -3\pi/2, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2, \dots$ Estos valores son extremos, ya que $f''(x) = -\operatorname{sen} x$ vale en ellos ± 1 alternativamente.

Los posibles puntos de inflexión son las raíces de esta ecuación $f''(x) = -\operatorname{sen} x = 0$, y son los valores $\dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots$ Por ejemplo, 0 es un punto de inflexión, y su derivada en él vale 1.

Ejemplo 2. Para la función $f(x) = x^3$ cualquier punto $a > 0$ es de convexidad; cualquier punto $a < 0$ es de concavidad y $a = 0$ es un punto de inflexión.

Ejemplo 3. Si f es una función polinómica de grado n

$$f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

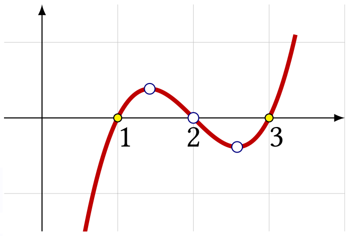


entonces f tiene, a lo sumo, n ceros reales. Los posibles extremos relativos son las raíces de $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}$.
Así, f tiene, como mucho, $n-1$ extremos relativos. Y tiene, como mucho, $n-2$ puntos de inflexión, que son las raíces de $f''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2}$.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

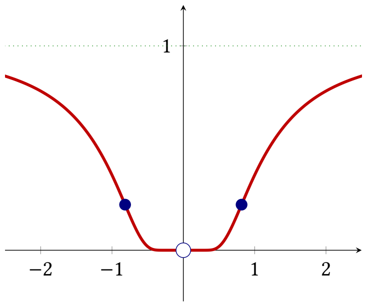
La función polinómica $f(x) = x^8 + 1$ no tiene ceros reales, tiene sólo un extremo (un mínimo en $a = 0$) y ningún punto de inflexión (como es un polinomio de grado 8, podría tener hasta 8 ceros reales, 7 puntos extremos y 6 puntos de inflexión).



La función polinómica $p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ tiene como raíces 1, 2, y 3. Tiene un máximo en $a = 2 - 1/\sqrt{3}$, un mínimo en $a = 2 - 1/\sqrt{3}$ (como mucho puede tener dos puntos extremos) y un punto de inflexión en $a = 2$ (no puede tener más que uno). Estos cálculos son fáciles, ya que las derivadas de la función son $p'(x) = 3x^2 - 12x + 11$ y $p''(x) = 6(x-2)$.

Ejemplo 4. La función

$$f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \begin{cases} e^{-x^{-2}} = \dfrac{1}{e^{x^{-2}}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$



tiene su gráfica entre 0 y 1. La recta $y = 1$ es una asíntota (recta tangente en el infinito) horizontal. Es una función indefinidamente diferenciable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ porque en esos puntos es elemental.

Además, su derivada para $x \neq 0$ es

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{x^3} e^{-x^{-2}}.$$

Como f' no se anula nunca, no hay extremos relativos en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Como $f'(x) > 0$ para $x > 0$, y $f'(x) < 0$ para $x < 0$, entonces f es estrictamente decreciente a la izquierda de 0 y estrictamente creciente a la derecha de 0. Esto es un argumento que muestra que 0 es un mínimo para f. Además $0 < f(x) < 1$ para todo $x \neq 0$ y $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$.

Por último, la segunda derivada de f es

$$f''(x) = \frac{4 - 6x^2}{x^6} e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{4 - 6x^2}{x^6} e^{-x^{-2}}.$$

Así, los puntos de inflexión para f son los valores $x = \pm\sqrt{2/3} = \pm 0.8165\ldots$

En $x = 0$ la función es indefinidamente diferenciable, ya que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^{-2}}}{x^n} = 0$$

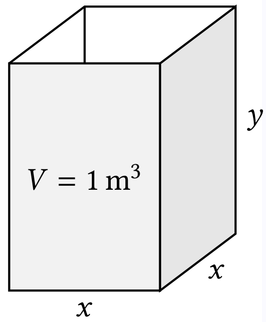
para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Así $0 = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \ldots$ Es un mínimo que no puede ser clasificado con el método de las derivadas.

Esta función tiene como propiedad que para cualquier n, el polinomio de Taylor de grado n en 0 es el polinomio cero, es decir, $p_0^n f(x) = 0$. A medida que n crece, no es verdad que estos polinomios verifiquen $p_0^n f \to f$.

Ejemplo 5. De todos los números x e y cuya suma sea 5, se pueden calcular aquellos que hacen máximo el valor del producto. Para ello se considera la función producto $P = xy = x(5-x)$. Derivando e igualando a cero se llega a $x = 5/2$, que es un máximo al cumplirse $P'' < 0$. Por tanto, la solución es $x = y = 5/2$ y el valor máximo pedido es $25/4$.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Ejemplo 6. Encontrar las dimensiones de un paralelepípedo rectangular de base cuadrada sin tapadera superior, que tenga un volumen de $1\,\mathrm{m}^3$ y que sea lo más barato posible.



Se trata de hallar las dimensiones para que la superficie lateral (las 5 caras de este paralelepípedo) sea mínima. Esta superficie es $S = x^2 + 4xy$ (la base cuadrada y cuatro paneles laterales). Como $V = x^2 y = 1$ (medidas en metros), se tiene que $y = 1/x^2$. Todo se reduce a encontrar el mínimo de la función $S = x^2 + 4/x$. Este mínimo se alcanza en $x = \sqrt[3]{2}$.

El teorema global de Taylor

Dada una función f varias veces derivable en un entorno de a, y su polinomio de Taylor de grado n en a,

$$p_a^n f(x) \;=\; f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

cabe hacerse la pregunta, ¿se parecen $f(x)$ y $p_a^n f(x)$?

Ya se ha visto que

$$p_a^n f(a) = f(a), \quad (p_a^n f)'(a) = f'(a), \quad (p_a^n f)''(a) = f''(a), \;\ldots\;, (p_a^n f)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

(es más, $f(x)$ y $p_a^n f(x)$ tienen un contacto de orden n en a). Por tanto, las funciones $f(x)$ y $p_a^n f(x)$ son similares en el punto a, ya que coinciden sus valores y su derivadas hasta el orden n. ¿Y qué ocurre en otros valores distintos de a?

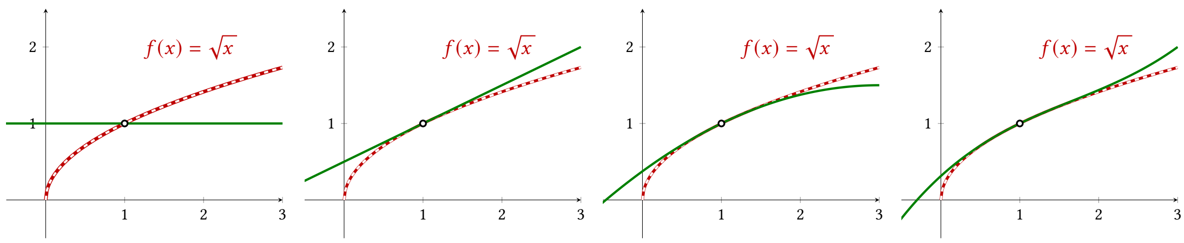
Ejemplo. La función $f(x) = \sqrt{x}$ tiene como primeras derivadas

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2},\; f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2},\; f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2}, \ldots$$

Para $a = 1$, los polinomios de Taylor de grados 0, 1, 2 y 3 son

$$\begin{aligned}
(p_1^0 f)(x) &= 1,\\
(p_1^1 f)(x) &= 1 + \tfrac{1}{2}(x-1),\\
(p_1^2 f)(x) &= 1 + \tfrac{1}{2}(x-1) - \tfrac{1}{8}(x-1)^2,\\
(p_1^3 f)(x) &= 1 + \tfrac{1}{2}(x-1) - \tfrac{1}{8}(x-1)^2 + \tfrac{1}{16}(x-1)^3.
\end{aligned}$$

En la gráfica se representan estos polinomios (en verde) y la función $f(x) = \sqrt{x}$. En el punto $a = 1$ los polinomios imitan lo que hace f. Por ejemplo, $(p_1^3 f)(x)$ coincide con f en $a = 1$ y sus derivadas coinciden hasta orden 3.



Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Definición. Se dice que f es analítica en a si existe un entorno V de a en el que

$$p_a^n f(x) \xrightarrow{n} f(x) \quad (x \in V)$$

es decir, si para todo $x \in V$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty} p_a^n f(x) = f(x).$$

La función del ejemplo 4 [pág. 28] no es analítica. En cambio, las funciones elementales son analíticas (esto se verá en Cálculo II).

Una función f es analítica en a si para los puntos x de un cierto entorno V de a se puede asegurar que $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(f(x) - p_a^n f(x)\Big) = 0$. Se trata entonces de calcular cómo son esas diferencias $f(x) - p_a^n f(x)$ para puntos x próximos al punto a. Esto es lo que muestra el siguiente resultado.

Teorema (global de Taylor). *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, n veces diferenciable en $[a,b]$ y $(n+1)$-veces diferenciable en (a,b) (o también, f una función $(n+1)$-veces diferenciable en $[a,b]$). Entonces*

a) $\exists\, c \in (a,b) \ : \ f(b) - p_a^n f(b) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$

b) Si $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M \quad \forall x \in (a,b)$, entonces $\left|f(x) - p_a^n f(x)\right| \le \dfrac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$

Demostración. a) Se considera la función $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$F(x) = \Big(f(x) - p_a^n f(x)\Big)\cdot(b-a)^{n+1} - \Big(f(b) - p_a^n f(b)\Big)\cdot(x-a)^{n+1}.$$

Esta función es tan diferenciable como lo sea f. Además $F(a) = F(b) = 0$. Por el teorema de Rolle existe $c_1 \in (a,b)$ tal que $F'(c_1) = 0$.

Además $F'(a) = F'(c_1) = 0$ y, aplicando de nuevo el teorema de Rolle, existe $c_2 \in (a,c_1)$ que verifica $F''(c_2) = 0$. Como $F''(a) = 0$ se puede aplicar otra vez el teorema de Rolle y existe $c_3 \in (a,c_2)$ que cumple $F'''(c_3) = 0$. De nuevo, como $F'''(a) = 0$ existe $c_4 \in (a,c_3)$ con $F^{(4)}(c_4) = 0$. Se continúa así hasta llegar a la derivada de orden $n+1$. Existe $c \in (a,c_n)$ que verifica $F^{(n+1)}(c) = 0$, es decir, un punto c que cumple

$$f^{(n+1)}(c)\cdot(b-a)^{n+1} = \Big(f(b) - p_a^n f(b)\Big)\cdot(n+1)!$$

que es el apartado a) del teorema.

b) Es una consecuencia directa de a), ya que

$$\left|f(x) - p_a^n f(x)\right| \le \frac{\left|f^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \le \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

□

Cabe destacar que el apartado a) dice (cambiando x por b en el enunciado)

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

y entonces, el error que se comete al tomar $p_a^n f(x)$ como aproximación de $f(x)$ es el término

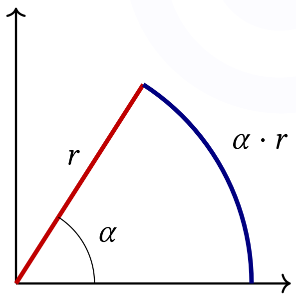
$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

que se conoce como resto de Lagrange. El número c es un valor intermedio entre a y x, y esto es todo lo que se conoce sobre él. Sin embargo, en muchas ocasiones esto es suficiente para poder acotar superiormente el resto de Lagrange por alguna cantidad conocida.

Además, el apartado a) de este teorema, en el caso particular $n = 0$, dice

a) $\exists c \in (a, b) \ : \ f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$

ya que $p_a^0 f(b) = f(a)$. Este resultado, ya visto, es uno de los teoremas del valor medio del cálculo diferencial.



Ejemplo. Se va a calcular el seno de un ángulo igual a un radián con error menor que una millonésima.

Un ángulo de un radián es el ángulo que tiene un arco de longitud igual al radio. Corresponde en grados al número $180/\pi$, que es un ángulo de unos 57.2957 grados. Salvo que se diga lo contrario, los ángulos se miden en radianes. Una circunferencia completa mide 2π radianes.

La función seno se va a estudiar en $a = 0$, ya que son conocidos todos los valores de todas las derivadas de la función en dicho punto.

Las derivadas de $f(x) = \operatorname{sen} x$ son cíclicas:

$$f(x) = \operatorname{sen} x, \quad f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\operatorname{sen} x, \quad f'''(x) = -\cos x,$$

y a partir de aquí empiezan a repetirse, $f^{(4)}(x) = f(x)$, $f^{(5)}(x) = f'(x), \ldots$. En $a = 0$ son

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1,$$

y se van repitiendo siempre en la secuencia $0, 1, 0, -1$. Al escribir el polinomio de Taylor en $a = 0$ se obtiene

$$p_0^n f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \pm \frac{x^n}{n!}$$

(el último término es cero si n es par). Para esta función los polinomios no varían al pasar de un número impar al siguiente par. Por ejemplo, $p_0^3 f(x) = p_0^4 f(x)$.

Para un ángulo de un radián, $\alpha = 1$, el teorema global de Taylor dice que

$$\operatorname{sen} 1 - p_0^n f(1) \ = \ \frac{\pm(\operatorname{sen} | \cos)c}{(n+1)!} 1^{n+1}$$

(la expresión $(\operatorname{sen} | \cos)$ significa que es una de las dos funciones, ya que depende del valor de n). Así, se puede aproximar

$$\operatorname{sen} 1 \simeq 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} + \ldots$$

y el error que se comete es

$$\left| \frac{\pm(\operatorname{sen} | \cos)c}{(n+1)!} 1^{n+1} \right|.$$

Este error se puede acotar mediante

$$\left|\frac{\pm(\operatorname{sen}|\cos)c}{(n+1)!}1^{n+1}\right| = \left|\frac{(\operatorname{sen}|\cos)c}{(n+1)!}\right| \leq \frac{1}{(n+1)!}.$$

Si se quiere conseguir que ese error sea menor que 10^{-6} se hace

$$\frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{10^6},$$

es decir,

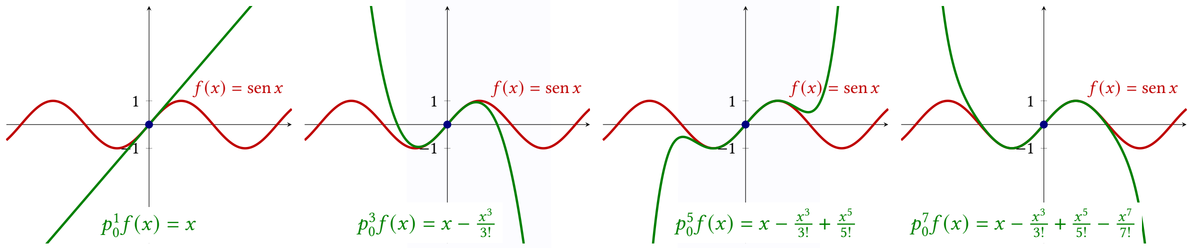
$$(n+1)! > 10^6.$$

Para ello basta elegir $n = 10$. Asumido ese error menor que 10^{-6}, se tiene

$$\operatorname{sen} 1 \simeq 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} = 0.8414710097$$

(el valor de $\operatorname{sen} 1$ es $0.8414709848078965066525023216302 9\ldots$) y el error cometido en este caso es aproximadamente $0.025 \cdot 10^{-6}$.

En $a = 0$, los polinomios de grados $1, 3, 5$ y 7 de $f(x) = \operatorname{sen} x$ son los siguientes (las gráficas de los polinomios en color verde):



A medida que n crece, el polinomio $p_0^n f(x)$ se van acercando cada vez más a la función seno, aunque $p_0^n f(x)$ es una función no acotada ($p_0^n f(x) \longrightarrow \pm\infty$ si $x \longrightarrow \pm\infty$) y la función seno sí lo es. Por tanto, la función $p_0^n f(x)$ y $\operatorname{sen} x$ se separan cada vez más cuando $x \longrightarrow \pm\infty$.

Ejemplo. La función $f(x) = e^x$ tiene derivadas muy sencillas y en $a = 0$ todos sus derivadas son $f^{(n)}(0) = 1$. Por tanto, el polinomio de Taylor de grado n en 0 es

$$p_0^n f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Para cualquier valor x se tiene

$$e^x \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

y el error que se comete es

$$\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1},$$

donde c es un valor intermedio entre 0 y x.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Se puede aproximar el valor del número e tomando $x = 1$ y entonces

$$e \simeq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

El error cometido es

$$\left| \frac{e^c}{(n+1)!} 1^{n+1} \right|$$

donde $c \in (0, 1)$. Se verifica

$$\left| \frac{e^c}{(n+1)!} 1^{n+1} \right| = \frac{e^c}{(n+1)!} \longrightarrow 0 \quad (n \to +\infty)$$

y por tanto

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Para que el error sea menor que 10^{-6}, por ejemplo, basta hacer $e^c \leq e \leq 3$ y así

$$\left| \frac{e^c}{(n+1)!} 1^{n+1} \right| \leq \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-6}.$$

Por tanto, basta elegir $3 \cdot 10^6 < (n+1)!$, es decir, $n = 10$. Así una aproximación al valor de e con un error menor que una millonésima es

$$e \simeq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{10!} = 2.7182818011\ldots$$

El error es aproximadamente $0.027 \cdot 10^{-6}$.

También se puede calcular el valor de e^2 con un error menor que una millonésima. Para ello se sustituye $x = 2$ en el polinomio de Taylor:

$$e^2 \simeq 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!}.$$

El error cometido es

$$\left| \frac{e^c}{(n+1)!} 2^{n+1} \right|$$

donde $c \in (0, 2)$. Ahora $e^c \leq e^2 \leq 9$, por ejemplo, y así los cálculos son

$$\left| \frac{e^c}{(n+1)!} 2^{n+1} \right| \leq \frac{9}{(n+1)!} 2^{n+1} < 10^{-6}.$$

Esto es cierto a partir de $n = 14$. Por tanto,

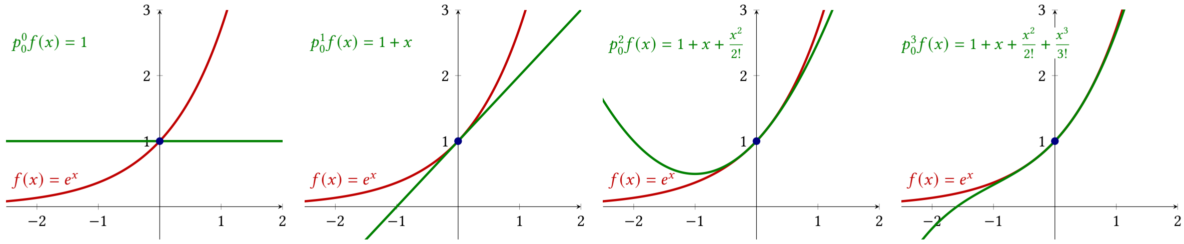
$$e^2 \simeq 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^{14}}{14!} = 7.38905607032591159575\ldots$$

El error cometido es aproximadamente $0.029 \cdot 10^{-6}$

En $a = 0$, los polinomios de grados 0, 1, 2 y 3 de $f(x) = e^x$ son los siguientes (las gráficas de los polinomios en color verde):

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura



Algunas curiosidades: a) Al derivar los términos del polinomio de Taylor de una función, se van obteniendo los términos del polinomio de Taylor de la derivada de la función. Es fácil comprobar que $\left(p_a^{n+1} f(x)\right)' = p_a^n f'(x)$ para cualquier función f suficientemente derivable. Por ejemplo, $\left(p_a^3 f(x)\right)' = p_a^2 f'(x)$. Como muestra, basta mirar más abajo qué ocurre al derivar los términos del polinomio de Taylor de la función $\operatorname{sen} x$.

b) Como

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \end{aligned}$$

se puede interpretar (y demostrar, por supuesto) que

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \ldots = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \cos x + i \operatorname{sen} x.$$

De la misma forma, $e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$. La igualdad

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

se conoce como fórmula de Euler.

Para $x = \pi/2$ se tiene $e^{i\pi/2} = i$ y así

$$i^i = (e^{i\pi/2})^i = e^{-\pi/2} = 0.2078795\ldots,$$

que es un número real. ¿Es esto cierto?

Ejercicio. Si $p(x)$ es un polinomio y se calcula el polinomio de Taylor en $a = 0$, ¿qué polinomio se obtiene? ¿Y si se hacen los cálculos en cualquier otro punto a? Se puede empezar con un ejemplo, como $p(x) = 3x^2 - 6x + 5$, para imaginar qué ocurre en el caso general.

Pierre de **Fermat** (Francia, 1601–1665)
Isaac **Newton** (Inglaterra, 1643–1727)
Gottfried Wilhelm **Leibniz** (Alemania, 1646–1716)
Michel **Rolle** (Francia, 1652–1719)
Guillaume de **l'Hôpital** (Francia, 1661–1704)
Brook **Taylor** (Inglaterra, 1685–1731)
Joseph-Louis **Lagrange** (Italia, 1736–1813)
Augustin Louis **Cauchy** (Francia, 1789–1857)

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura