Apéndice

Geometría

• Distancia entre dos puntos (x,y) y (a,b) del plano
$$d((x,y),(a,b)) = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

• Recta que pasa por los puntos P y Q
$$tQ+(1-t)P$$
donde $t\in\mathbb{R}$

• Segmento que une los puntos P y Q
$$tQ+(1-t)P$$
donde $t\in[0,1]$

• Ecuación del círculo de centro (a,b) y radio r
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

• El área del círculo de radio r es πr^2

• El volumen de la esfera de radio r es $\frac{4}{3}\pi r^3$

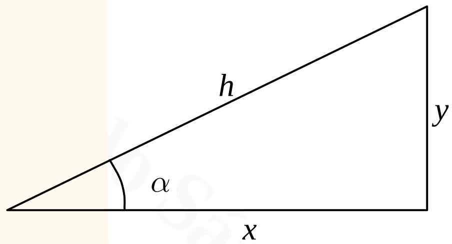
• El volumen de un cilindro de altura h y con base de radio r es $\pi r^2 h$

• El volumen de un cono de altura h y con base de radio r es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

Trigonometría [1]

• Definición de seno, coseno y tangente de un ángulo

$$\cos\alpha=\frac{x}{h} \qquad \operatorname{sen}\alpha=\frac{y}{h} \qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}$$



• Valores del seno y coseno para distintos ángulos

grados	radianes	seno	coseno
0	0	0	1
30	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
45	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
60	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
90	$\pi/2$	1	0

• Relaciones fundamentales

$$1=\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha$$
$$\operatorname{sen}(\alpha\pm\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\pm\operatorname{sen}\beta\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha$$

Por ejemplo, de estas relaciones se deduce que
$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \quad \operatorname{sen}^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$
que resultan muy útiles, por ejemplo, para calcular primitivas de $\operatorname{sen}^2 x$ y $\cos^2 x$.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Reglas de diferenciación

- Derivada de una suma (o resta): $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- Derivada de un producto: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- Derivada de un cociente:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

- Regla de la cadena

$$(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Por ejemplo,

$$\left(\operatorname{sen}\left(x^2\right)\right)' = \cos\left(x^2\right) \cdot 2x$$

- Derivadas de algunas funciones elementales

Función	derivada	Función	derivada
constante	0	x^n	$n x^{n-1}$
e^x	e^x	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
a^x	$a^x \ln a$	$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$

Primitivas sencillas

$$\begin{aligned}
\int x^n \, dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \\
\int \frac{1}{x} \, dx &= \ln x + C \\
\int e^x \, dx &= e^x + C \\
\int a^x \, dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C \\
\int \operatorname{sen} x \, dx &= -\cos x + C \\
\int \cos x \, dx &= \operatorname{sen} x + C \\
\int \frac{1}{x^2 + a^2} \, dx &= \frac{1}{a} \operatorname{tg}^{-1} \frac{x}{a} + C \\
\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx &= \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{a} + C
\end{aligned}$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Técnicas de integración

- **Integración por partes**

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$$

- **Integrales con raíces del tipo** $\sqrt{a^2 \pm x^2}$

Según la expresión que aparece en la integral el cambio que se debe hacer es:

Expresión	Cambio
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\,\mathrm{sen}\,u$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a\,\mathrm{tg}\,u$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec u$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx &= \int \frac{2\,\mathrm{sen}\,u - 1}{2\cos u}2\cos u\,du \\
&= \int (2\,\mathrm{sen}\,u - 1)\,du \\
&= -2\cos u - u + C \\
&= -\sqrt{4-x^2} - \mathrm{sen}^{-1}\frac{x}{2} + C
\end{aligned}$$

- **Integrales de funciones racionales** $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

En este tipo de funciones, P y Q son polinomios. El primer paso es hacer la división si grado(P) es mayor o igual que grado(Q), como en el ejemplo siguiente:

$$\frac{x^3+x}{x-1} = x^2 + x + 2 + \frac{2}{x-1}$$

Así, para el cálculo de integrales es suficiente saber realizar el cálculo para funciones racionales

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde grado(P) < grado(Q).

Para ello se calculan las raíces del polinomio Q, que pueden ser reales o complejas (conjugadas) y algunas pueden repetirse.

Por cada raíz real a que se repita r veces, el polinomio Q tiene un factor $(x-a)^r$. Cada factor genera fracciones simples con denominadores $(x-a),(x-a)^2,\ldots,(x-a)^r$.

Por cada raíz compleja $z = a + bi$ (y por tanto su conjugada $\overline{z} = a - bi$) que se repita r veces, el polinomio Q tiene un factor $\left(x^2+a^2+b^2-2ax\right)^r$. Cada factor genera una fracción simple con denominadores del tipo $\left(x^2+a^2+b^2-2ax\right),\ldots,\left(x^2+a^2+b^2-2ax\right)^r$.

Ejemplo:

$$\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x-1)^2\left(x^2+1\right)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{Fx+G}{\left(x^2+1\right)^2}$$

donde A,B,C,D,E,F,G se calculan dando valores a la variable x.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Tablas de integrales (primitivas salvo una constante)

Formas básicas	
$\int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1}$ si $n \neq -1$	$\int \frac{du}{u} = \ln \lvert u \rvert$
$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{tg}^{-1} \frac{u}{a}$	$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{u+a}{u-a} \right\rvert$
$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a}$	$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{u-a}{u+a} \right\rvert$

Fórmulas que contienen $\sqrt{a^2 \pm u^2}$ o $\sqrt{u^2 \pm a^2}$, $a > 0$	
$\int \sqrt{a^2+u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \frac{a^2}{2} \ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right)$	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right)$
$\int \sqrt{u^2-a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^2}{2} \ln\left\lvert u+\sqrt{u^2-a^2}\right\rvert$	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left\lvert u+\sqrt{u^2-a^2}\right\rvert$
$\int \sqrt{a^2-u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a}$	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a}$

Fórmulas trigonométricas	
$\int \operatorname{sen}^2 u\, du = \frac{u}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2u}{4}$	$\int \operatorname{sen}^n u\, du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u}{n} + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} u\, du$
$\int \cos^2 u\, du = \frac{u}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2u}{4}$	$\int \cos^n u\, du = \frac{\cos^{n-1} u \operatorname{sen} u}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u\, du$
$\int \operatorname{tg}^2 u\, du = \operatorname{tg} u - u$	$\int \operatorname{tg}^n u\, du = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} u}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} u\, du$
$\int \frac{du}{\operatorname{sen} u} = u \operatorname{sen}^{-1} u + \sqrt{1-u^2}$	$\int \frac{u}{\operatorname{sen} u} du = \frac{2u^2-1}{4} \operatorname{sen}^{-1} u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4}$
$\int \frac{du}{\cos u} = u \cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2}$	$\int \frac{u}{\cos u} du = \frac{2u^2-1}{4} \cos^{-1} u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4}$
$\int \operatorname{sen}^n u \cos^m u\, du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos^{m-1} u}{n+m} + \frac{n-1}{n+m} \int \operatorname{sen}^{n-2} u \cos^m u\, du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos^{m-1} u}{n+m} + \frac{m-1}{n+m} \int \operatorname{sen}^n u \cos^{m-2} u\, du$	

Todos los logaritmos son proporcionales. Para ello se parte de $e^y = x$ y se aplican logaritmos neperianos y logaritmos en otra base:

$$e^y = x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = \ln x \\ y \cdot \log_a e = \log_a x \end{cases}$$

y así

$$\ln x \log_a e = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

[En general, si $f\left(a^b\right) = b \cdot f(a)$ entonces $f(x) = k \cdot \ln(x)$ para todos los valores $x > 0$, ya que si se elige $e^y = x$ entonces $f(x) = f\left(e^y\right) = y \cdot f(e) = f(e) \cdot \ln x$]

[1] http://es.wikipedia.org/wiki/Trigonometría

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura