# Cálculo I

## Ejemplos y ejercicios

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

06 · 11 · 2023

En estas hojas pueden encontrarse ejemplos como “derivada de la función exponencial” donde se explica paso a paso cómo hacer esta derivada. También se encuentran ejercicios del tipo “demostrar que $f(x) = |x|^3$ es dos veces derivable”. Algunos tienen la respuesta (o demostración) y se trata entonces de entender los pasos que se dan. En otros sólo se muestran algunas ideas que sirven de ayuda.

### Números naturales. Inducción matemática

**1** A finales del siglo XIX, el matemático Giuseppe Peano (1858-1932) establece unos axiomas con la idea de definir los números naturales.

**Definición**. $\mathbb{N}$ es un conjunto que satisface los siguientes axiomas

- $\mathbb{N}$ tiene un elemento distinguido, que se designa 1.
- Existe una aplicación inyectiva $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ que cumple $s(n) \neq 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). Se suele hablar de $s(n)$ como $n+$, el siguiente a $n$.
- (Principio de inducción matemática) Si $A \subset \mathbb{N}$ verifica $1 \in A$ y $[n \in A \Rightarrow n+ \in A]$ entonces $A = \mathbb{N}$

Este último principio da una idea para demostrar ciertas propiedades (por ejemplo, desigualdades) viendo que: 1) se cumple para algún número, 2) una vez que se cumple para un cierto número, también se cumple para el siguiente. Con esto, se consigue probar que la propiedad en cuestión se cumple para todos los números a partir del obtenido en el paso 1).

Por ejemplo, se puede probar por inducción que

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. También se puede probar directamente, sin utilizar la inducción, comprobando que si $n$ es par entonces

$$1 + 2 + \ldots + n = (1 + n) + (2 + (n-1)) + \ldots + (n/2 + n/2) = (n+1) \cdot \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Si $n$ es impar entonces $n-1$ es par y se aplica esta fórmula anterior

$$1+2+\ldots+n = 1+2+\ldots+(n-1)+n = \frac{(n-1)n}{2}+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

**2** Esta última igualdad se puede demostrar directamente: si $s = 1+2+\cdots+n$, entonces $s+s$ es

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & + & 2 & + \ldots + & (n-1) & + & n \\ + & n & + & (n-1) & + \ldots + & 2 & + & 1 \\ \hline & (n+1) & + & (n+1) & + \ldots + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

Así, $2\big(1+2+\ldots+n\big) = n(n+1)$.

Como consecuencia, la suma de los primeros números pares es

$$2+4+6+\cdots+2n \;=\; n(n+1).$$

Y la suma de los impares se puede calcular haciendo lo siguiente: como

$$1+3+\cdots+(2n-1)+n(n+1) \;=\; \frac{2n(2n+1)}{2},$$

entonces

$$1+3+\cdots+(2n-1) \;=\; n(2n+1)-n(n+1) \;=\; n^2.$$

**3** Se puede demostrar que $2n+1 \leq 2^n$ para $n \geq 3$. Como consecuencia se puede comprobar que una desigualdad como $n^2 \leq 2^n$ es falsa para ciertos valores como $n=3$ y es cierta para $n \geq 4$.

**4** (**Desigualdad de Bernoulli**) Si $x$ es un numero real mayor que cero, $x > 0$, entonces $(1+x)^n > 1+nx$ para todo $n > 1$.

Esta desigualdad se puede demostrar directamente,

$$(1+x)^n \;=\; \binom{n}{0}1^n x^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}x + \binom{n}{2}1^{n-2}x^2 + \ldots \;>\; 1+nx$$

si $x > 0$ y $n \geq 2$. Para hacer la prueba por inducción se trata de ver primero si la desigualdad $(1+x)^n > 1+nx$ es cierta para algún valor $n = 1, 2, 3\ldots$ Para $n=1$ es falsa. Para $n=2$ es cierta: $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x$. Se supone que es cierta para $n$, es decir, $(1+x)^n > 1+nx$, y se prueba para $n+1$, es decir, se prueba que $(1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x$. Para ello se hace

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) > (1+nx)(1+x) \qquad \text{(por hipótesis de inducción)}\\ &= 1+x+nx+nx^2 \geq 1+(n+1)x,\end{aligned}$$

luego $(1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x$ y se termina la demostración.

Este resultado se puede extender y probar que para cualquier número real $x \geq -1$ y cualquier número entero $n \geq 1$ se cumple $(1+x)^n \geq 1+nx$. La igualdad se obtiene sólo en los casos $x=0$ o $n=1$.

**5** Probar por inducción que

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 1 \\ 1+3 & = & 2^2 \\ 1+3+5 & = & 3^2 \\ 1+3+5+7 & = & 4^2 \\ & \cdots & \end{array}$$

y en general, $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ para todo $n=1,2,3\ldots$

Una demostración directa: utilizando el hecho de que $1+2+\cdots+n=n(n+1)/2$, si se define

$$s=1+3+5+\cdots+(2n-1),$$

entonces $n(n+1)=2(1+2+3+4+\cdots+n)=2+4+6+\cdots+2n=s+n$. Por tanto, $s=n^2$.

Otra demostración distinta (no mediante inducción) consiste en comprobar que la diferencia entre dos cuadrados consecutivos es $n^2-(n-1)^2=2n-1$, un número impar.

**6** Utilizar la inducción matemática para probar que para $n=1,2,3\ldots$ el número $n^2+5n$ es par.

Se puede probar directamente de forma sencilla considerando los casos en los que $n$ sea par o impar.

Por inducción es fácil: si $n^2+5n$ es par (lo cual es cierto para $n=1$), entonces $(n+1)^2+5(n+1)=n^2+2n+1+5n+5=n^2+5n+2(n+3)$ también es par.

**7** (**Polinomio generador de números primos de Euler**) Para $0\le n\le 39$ la expresión $n^2+n+41$ es un número primo. Sin embargo para $n=40$ se obtiene el valor $40^2+40+41=41^2$ que no es primo. Esto indica la precaución que hay que tener al hacer la comprobación inicial "para ciertos valores se cumple" en la inducción matemática.

**8** Probar que $1+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

`http://gaussianos.com/la-intuicion-matematica-de-papa-keeler-y-la-formula-de-faulhaber/`

## Números naturales, enteros, racionales y reales

**9** (El teorema fundamental del orden para conjuntos de números enteros). Todo conjunto no vacío de números enteros acotado superiormente tiene máximo (es decir, supremo que pertenece al conjunto). Todo conjunto no vació de números enteros acotado inferiormente tiene mínimo.

La prueba es fácil: sea $E\subset\mathbb{Z}$ no vacío y acotado superiormente. Por el teorema fundamental del orden en $\mathbb{R}$ existe $d=\sup(E)$. Falta comprobar que $d\in E$ y así es máximo de $E$. Como $d=\sup(E)$, entonces existe $z\in E$ con $d-1<z\le d$. Si fuera $z<d$ existiría $x\in E$ con $z<x\le d$ y entonces $x-z$ sería un entero positivo menor que 1, que es imposible. Por tanto $z=d$ y $d=\max(E)$.

Los mismos argumentos sirven para probar la existencia del mínimo.

**10** (Consecuencia del problema anterior.) Principio de la buena ordenación de $\mathbb{N}$: cada subconjunto no vacío de números naturales tiene mínimo.

**11** (Otra consecuencia más.) Función parte entera: para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un único entero $q \in \mathbb{Z}$ que cumple $q \leq x < q+1$. Se llama $q = E(x) = [x]$, parte entera de $x$.

**12** Probar que para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un único número entero $n \in \mathbb{Z}$ que verifica

$$n \leq x < n+1, \quad x-1 < n \leq x.$$

Este número se llama *parte entera* de $x$ y se denota mediante $[x]$.

La unicidad es fácil: si hay dos $n$ y $m$ que verifican lo anterior, y $n < m$, entonces $n < m \leq x < n+1$. Así $0 < m-n < 1$ y se llega a un número natural entre 0 y 1. Absurdo.

Para probar la existencia, sea $a$ el menor número natural talque $|x| < a$ (la propiedad arquimediana asegura la existencia de este $a$). Si $x \geq 0$ se elige $[x] = a-1$. Si $x < 0$ se elige $[x] = -a+1$ o $[x] = -a$ según sea $x$ entero o no.

Otro argumento consiste en poner $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \big[n,\, n+1\big)$. De esta forma, cada $x \in \mathbb{R}$ está en algún intervalo de esos: $x \in \big[n,\, n+1\big)$. En ese caso se define $[x] = n$. De esta forma es fácil probar que si $x < y$, $y - x > 1$, entonces $x < [x]+1 \leq x+1 < y$. Por tanto el intervalo $(x, y)$ contiene un número entero. Esto es una demostración alternativa del resultado que dice que todo intervalo contiene número racionales.

**13** Para cada número $n = 1, 2, 3, \ldots$ se define $n! = n(n-1)\cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ y además $0! = 1$. Se define para $0 \leq k \leq n$ el número combinatorio

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

a) Dados $n$ elementos distintos la cantidad de reordenaciones (permutaciones) que se pueden hacer con ellos es $n!$ (Con $n$ letras distintas, se pueden formar $n!$ palabras distintas)

b) La cantidad de subconjuntos de $k$ elementos que contiene un conjunto de $n$ elementos es

$$\frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

c) Los números combinatorios se pueden representar en un triángulo simétrico (de Tartaglia) ya que verifican

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}, \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

d) Para $x, y \in \mathbb{R}$ se puede probar por inducción la fórmula del binomio de Newton:

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^k.\end{aligned}$$

e) Un conjunto de $n$ elementos tiene un total de $2^n$ subconjuntos. Dado un conjunto $A$ se llama partes de $A$ al conjunto $\mathscr{P}(A)$ que forman todos los subconjuntos de $A$:

$$B \in \mathscr{P}(A) \Leftrightarrow B \subset A$$

Si $\operatorname{card}(A) = n \Rightarrow \operatorname{card}(\mathscr{P}(A)) = 2^n$

**14** (**Teorema de Cantor**) Un conjunto $A$ nunca es biyectivo con $\mathscr{P}(A)$.

La idea es considerar $f : A \longrightarrow \mathscr{P}(A)$ y probar que no puede ser sobreyectiva. Si lo fuera, entonces $B = \{x \in A : x \notin f(x)\}$ sería la imagen de algún elemento de $a \in A$, es decir, $f(a) = B$. Pero entonces

- $a \in B \Rightarrow a \notin f(a) = B$, contradicción
- $a \notin B \Rightarrow a \in f(a) = B$, contradicción

y por tanto $f$ no puede ser sobreyectiva.

Por ejemplo, si $A = \{1, 2\}$, la aplicación

$$\begin{array}{rcl} f : A & \longrightarrow & \mathscr{P}(A) \\ 1 & \rightsquigarrow & \{2\} \\ 2 & \rightsquigarrow & \{1, 2\} \end{array}$$

no es sobreyectiva. Hay siempre un conjunto que no es imagen de ningún elemento:

$$B = \{x \in A : x \notin f(x)\} = \{1\}$$

La misma idea sirve para mostrar la paradoja de Russel. Se considera el conjunto $M = \{x : x \notin x\}$ de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos. Entonces $M \in M$ o $M \notin M$ se implican una a la otra y se tienen una contradicción.

**15** (**Paradoja de Russell**) Se considera el conjunto $A$ formado por todos los conjuntos que no se tienen como elemento: $A = \{X : X \notin X\}$. Hay conjuntos $X$ que se tienen como elementos, como por ejemplo, el conjunto de "ideas abstractas". También hay conjuntos que no se contienen como elemento, como el conjunto de libros.

Ahora bien, la afirmación $A \in A$ obliga a que $A \notin A$ y la afirmación $A \notin A$ obliga a que $A \in A$.

**16** Una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es inyectiva si $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ para $x, y \in A$. Esto dice que cada elemento de la imagen de $f$ sólo puede tener un origen. Por ejemplo $f(x) = x^2$ definida en $\mathbb{R}$ no es inyectiva: si $x^2 = y^2$, no se puede asegurar que $x = y$. Sin embargo, la función $f(x) = x^2$ definida en el intervalo $[3, 9]$ sí es inyectiva.

**17** Una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es sobreyectiva si todo elemento de espacio de llegada es imagen de algún elemento de $A$. En otras palabras, si dado $y \in \mathbb{R}$, la ecuación $f(x) = y$ tiene solución (esta solución será única cuando además la función sea inyectiva). Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ no es sobreyectiva: la ecuación $x^2 = y$ no tiene solución si $y < 0$.

**18** La aplicación $f(x) = x/(1 + |x|)$ es una biyección (inyectiva y sobreyectiva) entre $\mathbb{R}$ y el intervalo $(-1, 1)$. Los intervalos $[0, 1]$ y $(0, 1)$ son biyectivos: la aplicación identidad en los irracionales y una aplicación biyectiva sobre los racionales $(x_n)$ e $(y_n)$ (son una cantidad numerable) de ambos lados. También son biyectivos $[0, 1]$ y $[0, 1]^2$ mediante $f(0.a_1a_2a_3a_4\ldots) = (0.a_1a_3a_5\ldots, 0.a_2a_4a_6\ldots)$

**19** (**Escritura de números en cualquier base**) Un número como 621 se puede escribir mediante combinaciones de potencias de 10,

$$621 = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + \ldots,$$

donde los números naturales $a_0, a_1 \ldots$ se llaman *unidades*, *decenas*... y todos verifican $0 \le a_i \le 9$. Es evidente que

$$621 = 1 + 2 \cdot 10 + 6 \cdot 10^2.$$

Es la forma usual de escribir los números. Se llama expresión decimal (en base diez). De la forma análoga, puede escribirse 621 como una combinación de potencias de 4, es decir

$$621 = a_0 + a_1 \cdot 4 + a_2 \cdot 4^2 + a_3 \cdot 4^3 + \ldots,$$

donde cada $a_i$ puede valer $a_i = 0, 1, 2, 3$. No es difícil comprobar que

$$621 = 1 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^4,$$

y se escribe $621 = 21231_{(4}$ (se escriben las cifras de derecha a izquierda). Con esta notación, $132_{(4} = 2 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 4^2 = 2 + 12 + 16 = 30$. Se pueden escribir números en base hexadecimal (base 16), una base en la que hay como dígitos $0, 1, 2, \ldots, 9, A, B, C, D, E, F$ y así $9F$ en base hexadecimal es el número decimal $15 + 9 \cdot 16 = 159$.

También se pueden escribir los números de $[0, 1]$ como potencias inversas de 4. Un número como 0.5 se puede escribir como

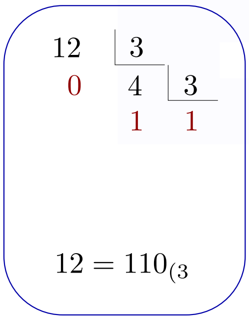
$$0.5 = d_1 \cdot \frac{1}{4} + d_2 \cdot \frac{1}{4^2} + d_3 \cdot \frac{1}{4^3} + \cdots$$

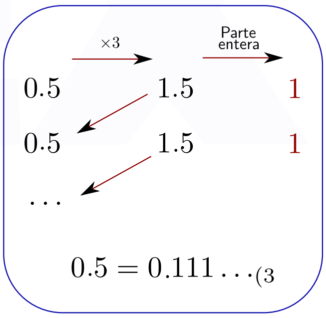
Es fácil comprobar que $d_1 = 2$ y el resto son iguales a cero. Así, $0.5 = 0.2_{(4}$.

Para escribir en base 3 un número con parte entera y parte decimal, como 12.5, hay que realizar los dos procesos descritos antes: escribir 12 como combinaciones de potencias de 3 y 0.5 como combinaciones de potencias de $1/3$. Estos cálculos no son siempre fáciles y es necesario utilizar algún algoritmo sencillo para realizar cada uno de ellos. Estos algoritmos son “realizar divisiones sucesivas” y “realizar productos quitando la parte entera”.

Por ejemplo, para escribir 12.5 en base 3, se separan en primer lugar la parte entera y decimal.

- Se trata de escribir $12 = a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 + \ldots$ donde cada número natural $a_i$ verifica $0 \le a_i < 3$. El cálculo de estos números consiste en ir haciendo divisiones sucesivas y después ir escribiendo esos números (los cocientes y el resto) pero de derecha a izquierda.
- Para números sólo con parte decimal, como 0.5, consiste en escribir $0.5 = a_1/3 + a_2/3^2 + \ldots$ donde cada número natural $a_i$ verifica $0 \le a_i < 3$. El cálculo de estos números se hace multiplicando por 3, se extrae la parte entera, que son los números $a_i$ resultantes, y se continúa con la parte decimal que queda.




Para números con parte entera y decimal se hacen los dos procesos anteriores por separado y se suman: $12.5 = 110.11111\ldots_{(3}$



Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Otros ejemplos: $1.25 = 1.111_{(5}$, $1/3 = 0.\widehat{3} = 0.1_{(3}$ y $20.7 = 14.B_{(16}$ (en hexadecimal).

Hay varias utilidades de ayuda para hacer estos cálculos de cambio de base de cualquier número. Por ejemplo, en `http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi` se puede hacer marcando la opción "Calculadores y representaciones gráficas en línea" y después "Conversor de base".

Lecturas recomendadas sobre esto:
`https://es.wikipedia.org/wiki/Categoría:Sistemas_de_numeración_posicional`
`https://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_de_numeración`
`https://es.wikipedia.org/wiki/Notación_posicional`

**20** Al escribir los números reales en base 2 se puede establecer una correspondencia biyectiva entre el intervalo $(0,1)$ y $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. Esto muestra que $\text{card}(\mathbb{R}) = \text{card}(0,1) = \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$

**21** La suma $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ de dos números irracionales es irracional. Explicar qué condiciones deben cumplirse.

Por reducción al absurdo, si $\sqrt{a} + \sqrt{b} = m/n \in \mathbb{Q}$ entonces $a = m^2/n^2 + b - 2m\sqrt{b}/n$. Así, si $m \neq 0$
$$\sqrt{b} = \frac{n}{2m} \cdot (b-a) + \frac{m}{2n}$$
es racional, y se llega a un absurdo.

En cambio,
$$(3+\sqrt{5}) - (1+\sqrt{5}) = 2, \quad \sqrt{18}\,\sqrt{2} = 6, \quad \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = 2$$
muestran que la suma, producto y cociente de números irracionales puede ser racional.

**22** El número $a = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}$ es positivo (es mayor que 1). ¿Es racional? La misma cuestión para
$$b = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}$$
Solución: este número verifica $a^2 = 1 + a$ por lo que
$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

**23** Probar que $2 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}}$ y $6 = \sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+\dots}}}$

**24** (**Ejemplo de prueba no constructiva**). Existen dos números irracionales $a$ y $b$ tal que $a^b$ es un número racional.

Sean $a = b = \sqrt{2}$. Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es un número racional la prueba ha terminado. Si es irracional se eligen $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ y $b = \sqrt{2}$. Así
$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

que es racional.

**25** El número $u = 0.1234567891011121314\ldots$ se conoce como constante de Champernowne. Se trata de un número irracional. Su inverso es $u^{-1} = 8.1000000670760\ldots$ Puede verse en `https://es.wikipedia.org/wiki/Anexo:Constantes_matemáticas` una curiosa lista de números.

**26** Calcular $1.3\overset{\frown}{27} + 1.10\overset{\frown}{5}$ y $2/3 - 0.1\overset{\frown}{8}$.

**27** El número $a = 1.999\ldots = 1.\overset{\frown}{9}$ verifica $a = 2$. De hecho $\operatorname{dist}(a, 2) = |a - 2| \leq 0.1$; y también $|a - 2| \leq 0.01; \ldots, |a - 2| \leq \varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$. Así $|a - 2| = 0$, es decir, $a = 2$.

**28** Estudiar si los siguientes conjuntos son numerables o no:

**a)** todos los números $x \in \mathbb{R}$ cuya expresión decimal pueda escribirse utilizando sólo los dígitos 4 o 5. Por ejemplo, $x = 0.445$ o $x = 5545.5\overset{\frown}{4}$

**b)** $\left\{x \in \mathbb{R} : x = \dfrac{1}{n_1} + \cdots + \dfrac{1}{n_k}, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\right\}$, por ejemplo, $x = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}$, o también $x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{12}$.

**29** El número $1.3454545\ldots - 2.\overset{\frown}{3}$, ¿es racional? ¿irracional? ¿ninguna de las dos? ¿ambas a la vez?

**30** Probar que el conjunto de números reales

$$\begin{aligned} A = \{&0, 0.1, 0.12, 0.123, 0.1234, 0.12345, 0.123456, 0.1234567, 0.12345678, \\ &0.123456789, 0.12345678910, 0.1234567891011, \ldots\} \end{aligned}$$

está acotado superiormente y que su supremo (que existe en $\mathbb{R}$) es

$$\sup A = u = 0.12345678910111213\ldots$$

**31** Se consideran dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ acotados. Dibujar un gráfico con todas las implicaciones que haya entre las siguientes sentencias y justificar todas las relaciones:

1. $\sup A \leq \sup B$
2. Existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $a \leq b$
3. Para cada $a \in A$ existe algún $b \in B$ con $a \leq b$
4. Para cada $a \in A$ y cada $b \in B$ se tiene $a \leq b$

$$\begin{array}{ccc} 4 & \Longrightarrow & 1 \\ & & \\ 3 & & 2 \end{array}$$

## Números complejos

**32** Algo debe ser incorrecto en la secuencia de igualdades

$$-1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

**33** Comprobar que $(1-i)^9 = 16(1-i)$. Deducir como consecuencia que $1-i$ es una raíz octava de 16. Calcular el resto de estas raíces $\sqrt[8]{16}$ y representarlas gráficamente.

**34** Calcular $\sqrt[3]{\dfrac{2i}{1+i}}$. Para ello es útil recordar que $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$, un número cuyo módulo es el inverso del módulo de $z$ y su argumento es el opuesto del argumento de $z$. Con esto se puede hacer

$$\frac{2i}{1+i} = (2i)(1+i)^{-1} = 2i\frac{1-i}{2} = 1+i.$$

Así

$$\sqrt[3]{\frac{2i}{1+i}} = \sqrt[3]{1+i}\,.$$

**35** Calcular $\sqrt[5]{\dfrac{(3+4i)^2}{2i}}$.

**36** Calcular y representar los números complejos $z \in \mathbb{C}$ soluciones de la ecuación $8z^3 = -i$.

**37** Al dibujar las raíces $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[4]{1}$, $\sqrt[5]{1}$... se van obteniendo polígonos regulares de $3, 4, 5$... lados.

**38** Calcular y dibujar en el plano complejo las soluciones de

a) $z^3 = 3i$, b) $z^4 = -16$, c) $z^3 = -27$, d) $z^3 = 8i$.

**39** Se consideran las soluciones $\{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}$ de $z^n = 1$ (raíces de la unidad para $n$). Es conocido que la expresión de estas raíces es:

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2k\pi}{n} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

es decir, números cuyo módulo es 1 y su argumento es $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \frac{6\pi}{n}, \ldots, \frac{2(n-1)\pi}{n}$. Demostrar que

a) El conjunto de raíces puede escribirse como $\{1, z_1, z_1^2, z_1^3, \ldots, z_1^{n-1}\}$, es decir, probar que $z_2 = z_1^2$, $z_3 = z_1^3$,...

b) La suma de todas ellas es cero: $z_0 + z_1 + \ldots + z_{n-1} = 0$.

El apartado a) es trivial. El apartado b) se sigue del a), ya que la suma de las soluciones verifica ($z = z_1$ para simplificar la notación y $s = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1}$):

$$zs = z(1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1}) \;=\; (z + z^2 + \ldots + z^{n-1} + z^n) \;=\; s$$

y por tanto debe ser $s = 0$.

**40** Expresiones del tipo

$$A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t$$

aparecen con frecuencia en matemáticas y física. Por ejemplo, al describir el movimiento de un péndulo (para oscilaciones pequeñas).




Departamento de Matemáticas Universidad de Extremadura

Esa expresión $A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t$, en la que aparecen las funciones seno y coseno, puede escribirse de forma más sencilla, utilizando sólo un coseno. Para ello se hace un pequeño cambio. Se considera el número complejo $A + Bi$, que tendrá módulo $r$ y argumento $\varphi$. Es decir, $A = r\cos\varphi$ y $B = r\,\text{sen}\,\varphi$. Se consigue así escribir

$$A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t \;=\; r\cos\varphi\cos\omega t + r\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\omega t \;=\; r\cos\big(\omega t - \varphi\big).$$

## Topología en $\mathbb{R}$

**41** La distancia entre dos números reales $x, y \in \mathbb{R}$ es

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Por ejemplo, $d(-4, 2) = 6$ y $d(3, 5) = 2$. Utilizando esta noción de distancia se pueden escribir los conjuntos siguientes:

a) Los números que están a distancia 3 de 42:

$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, |x - 42| = 3\} \;=\; \{39,\ 45\} \quad \text{(sólo hay dos números).}$$

b) Números que distan menos de una décima de 2:

$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, |x - 2| < 0.1\} \;=\; \big(2 - 0.1,\ 2 + 0.1\big) \;=\; \big(1.9,\ 2.1\big).$$

c) Números que distan menos de una centésima de 2:

$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, |x - 2| < 0.01\} \;=\; \big(2 - 0.01,\ 2 + 0.01\big) \;=\; \big(1.99,\ 2.01\big)$$

d) Números que distan menos de una cantidad $r$ de 2:

$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, |x - 2| < r\} \;=\; \big(2 - r,\ 2 + r\big)$$

e) Números que distan al menos 1 unidad de 7:

$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, |x - 7| \geq 1\} \;=\; \big(-\infty,\ 6\big] \cup \big[8,\ +\infty\big).$$

**42** Para $A, B \subset \mathbb{R}$, comprobar que si $A \subset B$ entonces $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ y $\overline{A} \subset \overline{B}$.

**43** Escribir correctamente qué significa cada una de las sentencias siguientes, tal y como se hace en el primer apartado:

a) $a \notin \mathring{A} \;\Leftrightarrow\; \forall r > 0 \quad (a - r, a + r) \cap A^c \neq \varnothing$

b) $a \notin \partial A \;\Leftrightarrow\; \ldots$

c) $a \notin \overline{A} \;\Leftrightarrow\; \ldots$

d) $a \notin A' \;\Leftrightarrow\; \ldots$

e) $a \notin A^s \;\Leftrightarrow\; \ldots$

Si un elemento $a \in \mathbb{R}$ está en un intervalo $(a-r, a+r)$ en el cual sólo hay finitos elementos de $A$, ¿puede ser $a \in A'$? ¿Y $a \in \overline{A}$?

**44** Para cualquier subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ se tiene

a) $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$;
b) $\overline{A} = \mathring{A} \cup \partial A = A \cup \partial A = A \cup A'$;
c) Si $a \in A$ entonces $a$ es interior o es frontera (pero no puede ser las dos cosas a la vez), es decir, $A \subset \mathring{A} \cup \partial A$;
d) $\partial A = \partial A^c = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.

**45** Si $x \in \mathbb{R}$ y $A \subset \mathbb{R}$ se define

$$d(x, A) = \inf\{|x-a| : a \in A\}$$

que tiene sentido ya que $\{|x-a| : a \in A\}$ está acotado inferiormente (por 0) y por tanto tiene ínfimo. Además, $d(a, A) = 0$ para todo $a \in A$.

Comprobar que

1) $x \in A \Rightarrow d(x, A) = 0$, pero la implicación contraria no es cierta en general
2) $x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0$
3) $x \in \mathring{A} \Leftrightarrow d(x, A^c) > 0$
4) $x \in A' \Rightarrow d(x, A) = 0$, y no es cierta en general la implicación contraria
5) $x \in \partial A \Leftrightarrow d(x, A) = d(x, A^c) = 0 \Leftrightarrow x \in \partial A^c$

**46** Utilizando distancias probar que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es abierto si y sólo si su complementario es cerrado.

Basta escribir todo en términos de distancias como sigue:

$$A \text{ abierto } \Leftrightarrow [A = \mathring{A}] \Leftrightarrow [A \subset \mathring{A}] \Leftrightarrow [x \in A \Rightarrow x \in \mathring{A}] \Leftrightarrow [x \in A \Rightarrow d(x, A^c) > 0]$$
$$\Leftrightarrow [d(x, A^c) = 0 \Rightarrow x \notin A] \Leftrightarrow [x \in \overline{A^c} \Rightarrow x \in A^c] \Leftrightarrow [\overline{A^c} \subset A^c] \Leftrightarrow A^c \text{ es cerrado.}$$

**47** Calcular la adherencia, el interior, la frontera, los puntos aislados y los de acumulación de los conjuntos

$$\begin{aligned}
A &= \left\{x \in \mathbb{R} \ : \ |x-1| < \frac{1}{2}\right\} \bigcup \left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\} \\
B &= \Big[-1, 1\Big) \bigcup \left\{(-1)^n \cdot \frac{n+1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\} \\
C &= \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{7}\right) \cup \ldots \\
D &= \Big[4, 7\Big) \bigcup \left\{7 + \frac{(-1)^n}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\} \\
E &= \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\} \bigcup \Big[0, 1\Big)
\end{aligned}$$

**48** ¿Es posible escribir $[-3,\ 5)$ como una unión de conjuntos abiertos? ¿Y de conjuntos cerrados?
¿Es posible escribir $(4,\ 7)$ como intersección de conjuntos abiertos? ¿Y de conjuntos cerrados?

**49** (Otra forma de ver que $\mathbb{R}$ es un espacio de Lindelöf.)

a) Cada conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}$ se puede escribir como unión de intervalos abiertos.
b) Cada intervalo $I \subset \mathbb{R}$ abierto se puede escribir como unión de intervalos abiertos cuyos extremos son números racionales.
c) Intervalos con extremos racionales sólo hay una cantidad numerable.
d) Cada recubrimiento abierto $A \subset \cup_i G_i$ se puede considerar como un recubrimiento numerable (coincide con un subrecubrimiento formado por una cantidad numerable de esos conjuntos $G_i$.)

La demostración de a), b) y c) es fácil. Para ver d), cada conjunto $G_i$ puede escribirse como una unión de intervalos con extremos racionales, $G_i = \cup_{n\in\mathbb{I}_i} H_n$. Por tanto,

$$A \subset \cup_i G_i = \cup_i \cup_{n\in I_i} H_n,$$

es decir, $A$ está cubierto por ciertos intervalos $H_n$ con extremos racionales. Los que intervienen en esta unión final son sólo una cantidad numerable, y para cada uno de ellos se elige un $G_i$ que lo contenga.

**50** Calcular $\mathring{A}$, $\overline{A}$, $\partial A$, $A'$ y $A^s$ (interior, adherencia, frontera, puntos de acumulación y aislados) del conjunto de $\mathbb{R}$ siguiente: $A = (1,\ 2) \cup \{x \in \mathbb{Q}\ :\ 0 < x < 1\}$.

**51** Se considera $A \subset \mathbb{R}$. Probar que

a) $\mathring{A}$ es abierto, y es el mayor conjunto abierto contenido en $A$;
b) $\overline{A}$ es cerrado, y es el menor conjunto cerrado que contiene al conjunto $A$.

La prueba de a) es fácil. Para ver que $\mathring{A}$ es abierto, se trata de ver que todo punto de $\mathring{A}$ es interior. Si $x \in \mathring{A}$ entonces $(x-r, x+r) \subset A$ para algún $r > 0$. Por tanto

$$x \in (x-r, x+r) = \overset{\circ}{\overbrace{(x-r, x+r)}} \subset \mathring{A}$$

y $x$ es interior a $\mathring{A}$. Por otra parte, si $B$ es abierto y $B \subset A$, se trata de ver que $B \subset A$. Esto es evidente, sin más que escribir $B \subset A$ y poner interiores en ambos conjuntos: $B = \mathring{B} \subset \mathring{A}$.

Para la parte b) se trata de ver que $\overline{\overline{A}}$ es cerrado, es decir, se trata de comprobar que $x \in \overline{\overline{A}} \Rightarrow x \in \overline{A}$. Y esto es sencillo, ya que si $x \in \overline{\overline{A}}$, dado $(x-r, x+r)$ es posible encontrar algún elemento $y \in (x-r, x+r) \cap \overline{A}$. Si $s > 0$ es suficientemente pequeño para que $(y-s, y+s) \subset (x-r, x+r)$, entonces en $(y-s, y+s)$ hay puntos de $A$ y por tanto $x \in \overline{A}$.

Una consecuencia de este resultado es que $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$ y $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. No hace falta hacer el interior del interior, ya que el interior de un conjunto es abierto. Igual ocurre con la adherencia: al ser un conjunto cerrado, hacer su adherencia ya no aporta nada nuevo.

**52** Para $A, B \subset \mathbb{R}$ se tiene $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$ y $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$. Poner ejemplos en los que se muestre que, en general, $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \overline{A \cap B}$ y $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} \neq \mathring{A} \cup \mathring{B}$.



Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

**53** Demostrar que $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ no es compacto, pero $\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ sí lo es.

**54** Sea $A \subset \mathbb{R}$ acotado. Probar que

a) $\inf(A)$ y $\sup(A)$ no son puntos interiores de $A$.

b) $\inf(A)$ y $\sup(A)$ pertenecen a $\overline{A}$. En el caso de un conjunto compacto se tiene además $\min(A), \max(A) \in A$.

El primer apartado habla de una propiedad esencial de los conjuntos de números reales. Una propiedad que es la base del razonamiento de muchos teoremas (Bolzano, conexión en $\mathbb{R}$,...). Si $A$ es un subconjunto acotado y abierto en $\mathbb{R}$, entonces su supremo y su ínfimo no están en $A$.

Para el segundo apartado, la idea es probar que ambos números o están en $A$ o son puntos de acumulación.

**55** En $\mathbb{R}$, los únicos subconjuntos que pueden ser abiertos y cerrados son $\varnothing$ y $\mathbb{R}$.

Para probar esto: sea $A \subset \mathbb{R}$ abierto y cerrado y verificando $\varnothing \subsetneq A \subsetneq \mathbb{R}$. Se elige $a \in \mathbb{R} \setminus A$. En ese caso, en alguno de los intervalos $(-\infty, a)$ o $(a, +\infty)$ hay elementos de $A$. Se supone que en $(-\infty, a)$ hay elementos de $A$ (con el otro se hace similar). Sea $d = \sup A \cap (-\infty, a)$. Por una parte, por la definición de supremo, se tiene $d \in \overline{A} = A$. Luego $d < a$. Por otra parte, $A$ es abierto, lo hace imposible que sea $d$ ese supremo.

**56** Se considera el conjunto $D$ formado por todos los números del intervalo $[0, 1]$ que tienen alguna expresión decimal en la que todas las cifras son 0 excepto dos de ellas, iguales a 1. Por ejemplo, son números de este conjunto $a = 0.11000\ldots$ y $b = 0.010\widehat{9}$, ya que este último se puede escribir como $b = 0.011000$. ¿Es $D$ un conjunto compacto?

**57** Utilizando la definición de conjunto compacto, es posible probar que el intervalo $[0, 1]$ es compacto.

Sea $\mathfrak{R}$ un recubrimiento abierto de $[0, 1]$. Se considera

$$s = \sup\left\{x \in [0,1] : [0,x] \text{ puede recubirse con una cantidad finita de elementos de } \mathfrak{R}\right\}.$$

La prueba consiste en demostrar que $s = 1$. Es evidente que $s > 0$, ya que cualquier abierto que contenga a 0 debe tener algún intervalo $[0, \varepsilon]$ para cierto valor $\varepsilon > 0$. Si fuera $s < 1$, entonces cualquier abierto $V$ de $\mathfrak{R}$ que contenga a $s$ debe tener dentro algún intervalo $[s - \varepsilon, s + \varepsilon]$. Por definición de $s$, el intervalo $[0, s - \varepsilon]$ está recubierto por una cantidad finita de elementos de $\mathfrak{R}$. A esta cantidad finita se le añade el abierto $V$ y se tiene un recubrimiento de $[0, s + \varepsilon]$ formado por finitos elementos de $\mathfrak{R}$. Esto contradice la definición de $s$ como supremo. Luego no puede darse $s < 1$.

## Sucesiones y series

**58** Escribir con términos matemáticos cada sentencia y decir qué relación hay entre el número $a \in \mathbb{R}$ y la sucesión $(x_n)$

a) En cada intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ hay algún término de la sucesión,

b) En cada intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ hay infinitos términos de la sucesión,

c) En cada intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ están todos los términos $x_n$ de la sucesión salvo una cantidad finita,

d) En cada intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ están todos los términos de la sucesión salvo los primeros $x_1, \dots, x_n$,

e) En algún intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ no hay términos de la sucesión,

f) En algún intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ hay algún término de la sucesión,

g) En algún intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ hay infinitos términos de la sucesión,

h) $a \in \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$, es decir, $a$ está en la adherencia de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ (es el conjunto de valores de la sucesión),

i) $a \in \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N},\ n > n_0\}}$ para algún/todo $n_0 \in \mathbb{N}$.

**59** Los términos de una sucesión verifican $|x_n - 3| \geq |2x_n - 1|$ para todo $n \geq 1$. Probar que la sucesión está acotada.

Basta comprobar que si $|x-3| \geq |2x-1|$ entonces $x \in [-2, 4/3]$.

**60** Utilizando las propiedades del álgebra de límites

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n/2 + \log n}{3n + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/2 + (\log n)/n}{3 + 1/\sqrt{n}} = \frac{1}{6},$$

y de forma similar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} + \frac{2(1+3/n)}{1+1/n} = 2.$$

**61** Probar que

$$\lim_n \frac{n!}{n^2} = \lim_n \frac{n!}{n^3} = \dots = +\infty.$$

Basta escribir

$$\frac{n!}{n^2} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{n\cdot n} \geq \frac{(n-1)(n-2)}{n} \qquad (\text{para } n > 2),$$

$$\frac{n!}{n^3} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{n\cdot n\cdot n} \geq \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^2} \qquad (\text{para } n > 3),$$

y similar para $n^4, n^5, \dots$

**62** Utilizar la definición para probar que la sucesión $x_n = \dfrac{n+2}{n}$ es convergente.

Lo primero es acertar con el posible límite y probar que la sucesión converge a dicho número, en este caso, al número 1.

Dado $\varepsilon > 0$ se trata de saber probar que $|x_n - 1| < \varepsilon$ a partir de un cierto valor de $n$. Ahora bien,

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n+2}{n} - 1\right| = \left|\frac{2}{n}\right| = \frac{2}{n},$$

y así, en este caso, $|x_n - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow 2/n < \varepsilon$, lo cual es cierto para $n > 2/\varepsilon$. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$ se elige $\nu = [2/\varepsilon] + 1$ (se utiliza la función parte entera) y se cumple que $n > \nu \Rightarrow |x_n - 1| < \varepsilon$.




Departamento de Matemáticas Universidad de Extremadura

Por supuesto, si se elige mal el posible límite, entonces los cálculos resultan imposibles. De haber supuesto (erróneamente) que el límite es 0, se trataría de probar que

$$|x_n - 0| = \left|\frac{n+2}{n}\right| = \frac{n+2}{n} < \varepsilon$$

para valores grandes de $n$. Se llega entonces a $n + 2 < n\varepsilon$, es decir, $n(1-\varepsilon) + 2 < 0$. Y esto no es cierto para valores grandes de $n$.

De la misma forma, si se supone que el límite es $-3$, se trataría de probar que

$$|x_n - (-3)| = \left|\frac{4n+2}{n}\right| = \frac{4n+2}{n} < \varepsilon$$

para $n$ suficientemente grande, que es imposible.

**63** Probar que si $(x_n)$ no está acotada, es posible encontrar términos $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ tales que $|x_{n_1}| > 1$, $|x_{n_2}| > |x_{n_1}| + 1$, $|x_{n_3}| > |x_{n_2}| + 1$... Esto hace que una sucesión así no pueda ser ni convergente ni de Cauchy.

**64** Probar que la sucesión $(n+2)/3n$ es convergente. Comprobar, utilizando la definición, que es de Cauchy.

Que es convergente:

$$\left|\frac{n+2}{3n} - \frac{1}{3}\right| = \frac{6}{9n}.$$

Que es de Cauchy:

$$\left|\frac{n+2}{3n} - \frac{m+2}{3m}\right| = \left|\frac{6(m-n)}{9nm}\right| = \left|\frac{6}{9}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)\right| \leq \frac{6}{9} \cdot \frac{2}{n} = \frac{12}{9\,n}$$

si $n \leq m$.

**65** Utilizar la definición para comprobar que la sucesión $(2n+1)$ no es de Cauchy.

Para $n, m \in \mathbb{N}$ distintos se tiene $|n - m| \geq 1$ (la distancia entre dos números naturales distintos es al menos igual a 1). Por tanto

$$|(2n+1) - (2m+1)| = 2|n-m| \geq 2,$$

y la sucesión no es de Cauchy. No es posible hacer $|(2n+1)-(2m+1)|$ arbitrariamente pequeño para $n$ y $m$ grandes.

**66** De forma similar es posible comprobar que la sucesión $(n^2)$ no es de Cauchy.

Basta darse cuenta que si $n \neq m$, entonces $|n^2 - m^2| \geq 1$.

**67** (**Propiedades de las sucesiones de Cauchy**). El conjunto $\mathscr{C}$ de sucesiones de Cauchy en $\mathbb{R}$, o el conjunto $\mathscr{C}_o$ de sucesiones convergentes y el conjunto $\mathscr{A}$ de sucesiones acotadas, con las operaciones usuales de suma y multiplicación son subanillos del anillo $\mathscr{S}$ de todas las sucesiones en $\mathbb{R}$. Además, se tienen las inclusiones (todas son estrictas)

$$\mathscr{C}_o \subset \mathscr{C} \subset \mathscr{A} \subset \mathscr{S}.$$

**Proposición.** *Toda sucesión de Cauchy es acotada.*

Demostración. Si $(x_n)$ es de Cauchy, dado $\varepsilon = 1$ existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \varepsilon = 1$ para $n, m \geq \nu$. Por tanto, $|x_n| < 1 + |x_\nu|$ para $n > \nu$ y la sucesión está acotada por $M = \max\{|x_1|, \ldots, |x_\nu|, 1 + |x_\nu|\}$. □

**Proposición.** *La suma y producto de sucesiones de Cauchy es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Sean $(x_n)$ e $(y_n)$ sucesiones de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$ existen $\nu_1$ y $\nu_2$ tales que $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$ y $|y_p - y_q| < \varepsilon/2$ para $m, n > \nu_1$ y $p, q > \nu_2$. Por tanto para valores $n, m > \max\{\nu_1, \nu_2\}$ se tiene $|x_n + y_n - (x_m + y_m)| \leq |x_n - x_m| + |y_n - y_m| < \varepsilon$ y la sucesión $(x_n + y_n)$ es de Cauchy.
Para el producto es similar. Al ser sucesiones de Cauchy son acotadas: $|x_n| \leq N$ y $|y_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y se puede escribir

$$\begin{aligned} |x_n y_n - x_m y_m| &= |x_n y_n - x_m y_n + x_m y_n - x_m y_m| \\ &\leq |x_n - x_m| \cdot |y_n| + |y_n - y_m| \cdot |x_m| \\ &\leq |x_n - x_m| \cdot M + |y_n - y_m| \cdot N \end{aligned}$$

de donde se obtiene que $(x_n y_n)$ es de Cauchy. □

**68** Utilizar la definición para probar que $\left(\dfrac{n^2 - n + 1}{n^2}\right)$ es convergente.

Para comprobar que su límite es 1

$$\left|\frac{n^2 - n + 1}{n^2} - 1\right| = \left|\frac{-n + 1}{n^2}\right| \leq \frac{n + 1}{n^2} \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n},$$

luego basta saber hacer $2/n < \varepsilon$. Esta desigualdad es equivalente a $n > 2/\varepsilon$. En la definición de convergencia se puede tomar en este caso $\nu = [2/\varepsilon] + 1$.

**69** Probar por inducción que

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$$

para $n \geq 1$. Deducir que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1^3 + 2^3 + \ldots + n^3}{n^4} = \frac{1}{4}.$$

Para probarlo por inducción, basta darse cuenta que

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = (1 + 2 + \ldots + n + (n+1))^2$$

es equivalente a (utilizando la hipótesis de inducción)

$$(1 + \ldots + n)^2 + (n+1)^3 = (1 + \ldots + n + (n+1))^2,$$

es decir

$$(1 + \ldots + n)^2 + (n+1)^3 = (1 + \ldots + n)^2 + (n+1)^2 + 2(1 + \ldots + n)(n+1).$$

Simplificando se llega a

$$(n+1)^3 = (n+1)^2 + n(n+1)^2$$

que es trivialmente cierto.

Como consecuencia

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 \;=\; (1+2+\ldots+n)^2 \;=\; \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

y de ahí se sigue que el límite de más arriba sea igual a $1/4$.

**70** Se llama sucesión de Fibonacci (`http://es.wikipedia.org/wiki/Sucesión_de_Fibonacci`) a

$$(1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ldots).$$

Una sucesión cuyos dos primeros términos son $x_1 = x_2 = 1$ y los demás se consiguen como suma de los dos anteriores, $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ para $n = 1, 2, 3\ldots$ Probar que

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

donde

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

es el número de oro o número áureo. Es la solución positiva de $x^2 = x + 1$. La otra solución (es negativa) es $1 - \varphi$.

Como curiosidad, si $(x, y, z, t)$ son términos consecutivos de esta sucesión, entonces

$$a = xt,\ \ b = 2yz,\ \ c = xz + yt$$

forman una terna pitagórica, es decir, $a^2 + b^2 = c^2$.

**71** (Una justificación completa del problema 22, pág. 7) La sucesión

$$\sqrt{1},\ \sqrt{1+\sqrt{1}},\ \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}\ \ldots$$

es creciente y acotada. Por tanto es convergente. Su límite es $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$

Que está acotada es fácil: $a_1 \le \varphi$, y además si $a_n \le \varphi$ entonces $a_{n+1} \le \sqrt{1+\varphi} = \varphi$. Por tanto, una cota superior es $\varphi$. Además $a_{n+1}^2 = 1 + a_n \ge a_n^2$ (puede comprobarse fácilmente que $1 + x \ge x^2$ para $x \in [0, \varphi]$). Como

$$\sqrt{1},\ \sqrt{1+\sqrt{1}},\ \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}\ \ldots$$

es una sucesión acotada y creciente, y por tanto converge. Existe $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Así,

$$a^2 \;=\; \lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 \;=\; \lim_{n\to\infty}(1+a_n) \;=\; 1 + a.$$

**72** Probar que las sucesiones $\left(\dfrac{n!}{2^n}\right)$ y $\left(\dfrac{n^2+3}{3n+2}\right)$ son monótonas y que $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ es acotada.



Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

**73** Calcular los límites

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-60}{n+15}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2n-6}{n^2+10n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+6n+1}}{7-2n}.$$

**74** Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = 1/2.$

Se obtiene fácilmente multiplicando y dividiendo por el conjugado $\sqrt{n^2+n} + n$.

**75** Como $(1+\varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon + \dfrac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$, se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+\varepsilon)^n}{a} = +\infty \ (a \in \mathbb{R},\ a > 0), \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\varepsilon)^n}{n} = +\infty.$$

Como consecuencia, si $a \geq 1$, entonces $1 \leq a \leq (1+\varepsilon)^n$ y $1 \leq n \leq (1+\varepsilon)^n$ para $n$ suficientemente grande. Por tanto,

$$\sqrt[n]{a} \to 1, \quad \sqrt[n]{n} \to 1, \quad \sqrt[n]{n^2} = \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} \to 1, \quad \sqrt[n]{n^3} \to 1 \ldots$$

**76** (Una forma distinta de tratar el problema anterior). Sea $\varepsilon > 0$. Entonces

1) La sucesión $(1+\varepsilon)^n$ es creciente (esto es fácil de ver). Por tanto $(1+\varepsilon)^n \to +\infty$, ya que si estuviera acotada entonces sería convergente a un número $q \in \mathbb{R}$,

$$q = \lim_n (1+\varepsilon)^n = \lim_n (1+\varepsilon)^{n+1} = (1+\varepsilon)\, q,$$

que es absurdo.

2) Lo mismo ocurre con $\dfrac{(1+\varepsilon)^n}{a}$ (es creciente) para cualquier $a > 0$. Por tanto $\dfrac{(1+\varepsilon)^n}{a} \to +\infty$.

3) Idéntico para $\dfrac{(1+\varepsilon)^n}{n}$. Es creciente casi siempre porque

$$\frac{(1+\varepsilon)^{n+1}}{n+1} = \frac{(1+\varepsilon)^n}{n} \cdot \frac{n}{n+1} (1+\varepsilon) > \frac{(1+\varepsilon)^n}{n}$$

para $n$ grande, ya que $\dfrac{n}{n+1}(1+\varepsilon) > 1$ cuando $n$ es suficientemente grande. Por tanto, si $\dfrac{(1+\varepsilon)^n}{n}$ fuera acotada entonces tendría límite $p$ y

$$p = \lim_n \frac{(1+\varepsilon)^{n+1}}{n+1} = \lim_n \frac{(1+\varepsilon)^n}{n} \cdot \frac{n}{n+1}(1+\varepsilon) = p \cdot (1+\varepsilon),$$

que es imposible. Por tanto, $\dfrac{(1+\varepsilon)^n}{n} \to +\infty$.

**77** Nótese la idea clave del paso 1) del problema anterior: si $a > 0$, la sucesión $(a^n)$ tiene límite $L$, es decir, $(a, a^2, a^3, a^4, \ldots) \to L$. Además, al quitar el primer término de la sucesión se tiene $(a^2, a^3, a^4, \ldots) \to L$, es decir $a(a, a^2, a^3, \ldots) \to L$. Por tanto $a \cdot L = L$. Esto sólo ocurre en casos muy especiales:

1) si $a < 1$ entonces la sucesión $(a^n)$ es decreciente y $L = 0$;

2) si $a = 1$ entonces la sucesión $(a^n)$ es constante y $L = 1$;

3) si $a > 1$ entonces la sucesión $(a^n)$ es creciente y $L = +\infty$

**78** La sucesión $\sqrt[n]{n}$ es decreciente. Por tanto existe $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \geq 1$. Que sea mayor estricto que 1 lleva a una contradicción con el problema 75, pág. 18, luego ese límite es 1.

Que $\sqrt[n]{n}$ es decreciente es fácil probarlo:

$$n^{1/n} > (n+1)^{1/(n+1)} \iff n^{\frac{n+1}{n}} > n+1 \iff n^{\frac{n+1}{n}-1} > \frac{n+1}{n} \iff n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

y $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ es una sucesión convergente (su límite es el número $e$, como puede verse en ejemplos posteriores)

**79** Esta propiedad ya vista, $(1+\varepsilon)^n \longrightarrow +\infty$, tiene algunas consecuencias (aquí se entiende $a > 1$):

**a)** $\lim_n a^{1/n} = a^{\lim_n 1/n} = a^0 = 1$ (es decir, $\sqrt[n]{a} \longrightarrow 1$, que ya se ha visto).

**b)** Si $(\alpha_n) \longrightarrow +\infty$ entonces $(1+\varepsilon)^{\alpha_n} \longrightarrow +\infty$.

**c)** Si la sucesión $(x_n)$ es positiva y $(x_n) \longrightarrow 0$, entonces $a^{x_n} \longrightarrow a^0 = 1$, es decir $\lim_n a^{x_n} = a^{\lim_n x_n}$. Esto es una consecuencia del hecho $a^{x_n} < 1+\varepsilon \Leftrightarrow a < (1+\varepsilon)^{1/x_n}$, y se utiliza el apartado b) anterior.

**d)** Si la sucesión $(x_n)$ es positiva y $(x_n) \longrightarrow x$, entonces $\lim_n a^{x_n} = a^{\lim_n x_n} = a^x$. Esto es una prueba de la continuidad (secuencial) de la función $f(x) = a^x$, y se expresa como $(x_n) \longrightarrow x \Rightarrow a^{x_n} \longrightarrow a^x$.

**80** (**Fórmula de Euler**) Si $(a_n) \longrightarrow 1$ y $(b_n) \longrightarrow \infty$ entonces

$$\lim_n a_n^{b_n} = e^{\lim_n b_n(a_n-1)}.$$

Para demostrarlo basta escribir

$$a_n^{b_n} = (1+(a_n-1))^{\frac{1}{a_n-1}b_n(a_n-1)}$$

y aplicar la definición del número $e$.

Utilizando este resultado, probar que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3}{n^2+n+1}\right)^n = 1/e.$$

**81** (**Criterio de Stolz**) Si $0 < b_1 \leq b_2 \leq b_3 \ldots \longrightarrow +\infty$ (sucesión positiva, creciente y no acotada) entonces

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_n \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

(un resultado que recuerda a la regla de l'Hôpital). Utilizar este hecho para probar que

$$\lim_n \frac{1+2+\ldots+n}{n^2} = 1/2.$$

**82** (**Criterio de Stolz para la raíz**) Si $0 < b_1 \leq b_2 \leq b_3 \ldots \to +\infty$ (sucesión positiva, creciente y no acotada) entonces

$$\lim_n \sqrt[b_n]{a_n} = \lim_n \sqrt[b_{n+1}-b_n]{\frac{a_{n+1}}{a_n}} .$$

Con este resultado probar que

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_n \frac{n^n}{(n+1)^n} = 1/e.$$

**83** Si $(a_n)$ es convergente y $(b_n)$ no lo es, ¿puede ser $(a_n + b_n)$ convergente? ¿Y $(a_n b_n)$?

**84** Se define la sucesión cuyos términos son

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} .$$

Probar que es una sucesión convergente.

Basta ver que es acotada y monótona (creciente),

a) acotada: si $a_n \leq 2$ entonces $a_{n+1} \leq \sqrt{2+2} = 2$;

b) creciente: $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \geq \sqrt{a_n + a_n} = \sqrt{2}\,\sqrt{a_n} \geq \sqrt{a_n}\,\sqrt{a_n} = a_n$.

Si $a = \lim a_n$ entonces tomando límites en la expresión $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ se tiene $a^2 = 2 + a$. De aquí se sigue que $a = 2$.

**85** La sucesión cuyos términos son

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \frac{2 + x_n}{2}$$

verifica $(x_n) \to 2$.

Para probarlo hay que considerar los casos: (1) si $a = 2$ entonces la sucesión es constante; (2) si $a < 2$ entonces la sucesión es acotada superiormente $(x_n \leq 2)$ y creciente, y (3) si $a > 2$ entonces la sucesión es acotada inferiormente $(x_n \geq 2)$ y decreciente. En cualquier caso, es una sucesión convergente, $(x_n) \to b$. Tomando límite en la expresión $x_{n+1} = (2 + x_n)/2$ se tiene $b = (2 + b)/2$, es decir, $b = 2$.

**86** Se considera una sucesión $(x_n)$ que verifica $|x_{n+1} - x_n| = 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ¿Debe ser una sucesión de Cauchy?

Indicación: si $s_n = 1 + \cdots + 1/n$ entonces $(s_n)$ no está acotada, pero $|s_{n+1} - s_n| = 1/(n+1) \to 0$. Otra posibilidad es considerar la sucesión

$$(0, 1, 1/2, 0, 1/3, 2/3, 1, 3/4, 2/4, 1/4, 0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1, \ldots)$$

que no es de Cauchy (para $n$ y $m$ suficientemente grandes hay valores $x_n = 0$ y valores $x_m = 1$).

**87** Probar que el conjunto de valores de adherencia de una sucesión es un conjunto cerrado. Si además la sucesión es acotada, este conjunto de valores de adherencia es compacto. Por tanto, tiene máximo y mínimo, y estos valores reciben el nombre de límites superior e inferior de la sucesión:

$$\begin{aligned} \limsup_{x\to\infty}(x_n) &= \overline{\lim_{x\to\infty}}(x_n) = \text{mayor valor de adherencia de } (x_n) \\ \liminf_{x\to\infty}(x_n) &= \underline{\lim_{x\to\infty}}(x_n) = \text{menor valor de adherencia de } (x_n) \end{aligned}$$

Si $a = \overline{\lim}_{x\to\infty}(x_n)$ entonces en $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ hay infinitos términos $x_n$, pero a la derecha de $a+\varepsilon$ sólo puede haber una cantidad finita de términos, ya que $a$ es el mayor valor de adherencia. Idéntico resultado ocurre para el límite inferior: a la izquierda de $\underline{\lim}_{x\to\infty}(x_n) - \varepsilon$ sólo puede haber una cantidad finita de términos $x_n$.

Para sucesiones no acotadas superiormente se suele decir que su límite superior es $+\infty$. Y para sucesiones no acotadas inferiormente se suele decir que su límite inferior es $-\infty$.

Es evidente que $\liminf(x_n) \le \limsup(x_n)$. Además, para una sucesión acotada $(x_n)$ se tiene

$$(x_n) \text{ es convergente } \Leftrightarrow \liminf(x_n) = \limsup(x_n)$$

y en ese caso ese valor es el límite de la sucesión $\liminf(x_n) = \lim(x_n) = \limsup(x_n)$.

Probar que el límite superior de una sucesión $(x_n)$ verifica

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \inf_{n\ge 0}\, \sup_{k\ge n} x_k = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\ge n} x_k\right)$$

Análogamente, el límite inferior verifica

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \sup_{n\ge 0}\, \inf_{k\ge n} x_k = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\ge n} x_k\right)$$

**88** Subsucesión de una sucesión: dada una sucesión $(x_n)$, se llama subsucesión a cualquier sucesión $(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots)$ donde $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ Por ejemplo, con una sucesión $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ se puede elegir como subsucesión la formada por los términos que están en lugar par: $(x_2, x_4, x_6, \ldots)$. Con la sucesión $(1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$ se pueden formar las subsucesiones $(2, 4, 6, 8, \ldots)$ y $(1, 10, 100, \ldots)$.

Probar que $a$ es valor de adherencia de una sucesión si y sólo si existe una subsucesión que converge a dicho valor $a$. En particular, toda sucesión acotada tiene subsucesiones convergentes. Además si una sucesión es convergente, cualquier subsucesión suya también lo es y los límites coinciden.

**89** Toda sucesión de números reales tiene alguna subsucesión monótona. Como consecuencia se puede probar que toda sucesión de Cauchy tiene alguna subsucesión convergente y por tanto ella misma es convergente.

La demostración es como sigue: dada $(x_n) \subset \mathbb{R}$ se define

$$P = \{n \in \mathbb{N} \,:\, x_n \le x_m \ \text{ para } \ n < m\}.$$

Si $P$ es infinito entonces los índices $n \in P$ forman la subsucesión buscada, que será monónota creciente. Si $P$ es finito entonces a partir de un índice $n_0$ ya no hay elementos de $P$. Luego si $n_1 > n_0$ entonces existe $n_2 > n_1$ con $x_{n_1} > x_{n_2}$. Y para ese valor $n_2$ exister otro $n_3$ que verifica $x_{n_2} > x_{n_3}$, etcétera. Se llega entonces a una subsucesión monótona decreciente.

**90** **El numero $e$ es irracional**. Ya se ha visto que la sucesión

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

es convergente. Su límite se llama $e$.

De hecho, la sucesión es creciente y acotada y así debe ser convergente.

$$\begin{aligned}
a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2}\frac{1}{n^3} + \dots \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \dots \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \dots \\
&= a_{n+1} \\
&< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2} + \dots \\
&< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 3.
\end{aligned}$$

Por tanto, $a_n < a_{n+1} < 3$ y así $(a_n)$ es creciente y acotada. □

Este número $e$ es límite de una sucesión que está acotada por un número

$$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2} + \cdots = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

cuyo valor es el propio número $e$. Es frecuente encontrar como definición de número $e$ este valor de la suma de los inversos de los factoriales. En la cadena de desigualdades anteriores se muestra que si

$$s_n = \sum_{n=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

entonces $s_n < 3$ para todo $n$ y además $a_n \le s_n$. Así

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Por otra parte, si $n > m$ entonces

$$a_n \ge 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)$$




Departamento de Matemáticas Universidad de Extremadura

y así

$$\lim a_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{m!} = s_m.$$

Se tiene entonces que

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

La rapidez de la convergencia de la serie se puede calcular:

$$0 < e - s_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots < \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right) = \frac{1}{n!n}$$

Como consecuencia, $e$ es irracional. Si fuera $e$ racional entonces $e = p/q$ con $p, q > 0$. Aplicando la desigualdad anterior se tiene

$$0 < e - s_q < \frac{1}{q!q}$$

y así

$$0 < q!(e - s_q) < \frac{1}{q}.$$

Ahora bien, por hipótesis $q!e$ es entero, y además

$$q!s_q = q!\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)$$

es entero. Así se llegaría a la existencia de un número entero entero $q!(e - s_q)$ que verifica

$$0 < q!(e - s_q) < \frac{1}{q},$$

que no puede ocurrir.

**91** También se pueden calcular los límites

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}, \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^2.$$

Para ello se hace lo siguiente:

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n &= \left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n}\right)^{-1} = \left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^n\right)^{-1} = \left(\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n\right)^{-1} \\ &= \left(\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)\right)^{-1} \to \frac{1}{e}\end{aligned}$$

$$\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{n/2}\right)^{n/2}\right)^2 \to e^2$$

**92** Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$$

**93** (**Indeterminaciones del tipo** $1^\infty$) Es fácil comprobar que si $(a_n) \to 1$ y $(b_n) \to +\infty$ entonces

$$\lim_n a_n^{b_n} = e^{\lim_n b_n(a_n-1)}.$$

Basta escribir

$$a_n^{b_n} = (1 + (a_n - 1))^{b_n} = \left(1 + \frac{1}{1/(a_n-1)}\right)^{b_n} = \left(\left(1 + \frac{1}{1/(a_n-1)}\right)^{\frac{1}{a_n-1}}\right)^{(a_n-1)b_n}$$

**94** (**Una sucesión de números racionales que converge a** $\sqrt{2}$) Sea $a \in \mathbb{R}^+$. Se define la sucesión

$$x_1 > 0 \text{ (arbitrario)}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Entonces $(x_n)$ es convergente y $(x_n) \to \sqrt{a}$.

Demostración. Para cualquier $x_1 \in \mathbb{R}^+$ se tiene

$$\frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right) \geq \sqrt{a},$$

ya que

$$x_1 + \frac{a}{x_1} \geq 2\sqrt{a} \iff x_1^2 + a \geq 2x_1\sqrt{a} \iff (x_1 - \sqrt{a})^2 \geq 0,$$

y esto último siempre es cierto.

Luego $x_2, x_3$... son todos mayores o iguales que $\sqrt{a}$.

Además, al ser $x_n \geq \sqrt{a}$ se tiene $x_{n+1} \leq x_n$. En efecto,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \leq x_n \iff \frac{a}{x_n} \leq x_n,$$

que es evidentemente cierto al ser $x_n \geq \sqrt{a}$.

Por tanto, $\sqrt{a} \leq \ldots \leq x_{n+1} \leq x_n \leq \ldots \leq x_4 \leq x_3 \leq x_2$ y la sucesión $(x_n)_{n\geq 2}$ es decreciente y acotada inferiormente por $\sqrt{a}$.

Luego existe $\lim x_n = x \geq \sqrt{a}$. Tomando límite en la expresión (hay tres sucesiones convergentes involucradas y se toma el límite en cada una de ellas)

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),$$

se tiene

$$2x = x + \frac{a}{x}.$$

Por tanto, $x^2 = a$.

En total se obtiene $\lim x_n = \sqrt{a}$. $\square$

Este proceso muestra ejemplos de sucesiones de números racionales que convergen a un número irracional.

Si se elige $a = 2$, entonces partiendo de $x_1 = 2$ (la elección de $x_1 > 0$ es irrelevante) se obtiene la sucesión

$$(x_n) = \left(2, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \frac{665857}{470832}, \frac{886731088897}{627013566048}, \dots\right)$$

es decir, $(x_n) = \left(2,\ 1.5,\ 1.41\widehat{6},\ 1.414215686274510,\ 1.414213562374690,\ 1.414213562373095, \dots\right)$

El siguiente código muestra un pequeño algoritmo para encontrar una sucesión de números racionales que converge a $\sqrt{3}$.

```
ClearAll[A]
a = 3
A[1] := 2
A[n_] := (A[n - 1] + a/A[n - 1])/2
Table[A[i], {i, 1, 6}]
Table[A[i], {i, 1, 6}] // N
```

El resultado es una sucesión (de números racionales) que converge a $\sqrt{3}$:

$$\left\{2, \frac{7}{4}, \frac{97}{56}, \frac{18817}{10864}, \frac{708158977}{408855776}, \frac{1002978273411373057}{579069776145402304}, \dots\right\}$$

$\{2,\ 1.75,\ 1.73214,\ 1.73205,\ 1.73205,\ 1.73205, \dots\}$

**95** Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{6^n + 5^n + n + 2}$

Basta observar que $6^n \le 6^n + 5^n + n + 2 \le 4 \cdot 6^n$ y así

$$6 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{6^n} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{6^n + 5^n + n + 2} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4\cdot 6^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{6^n} = 6$$

Otra forma consiste en escribir

$$6^n + 5^n + n + 2 = 6^n \left(1 + \frac{5^n + n + 2}{6^n}\right).$$

Como la sucesión

$$\left(1 + \frac{5^n + n + 2}{6^n}\right)$$

es convergente, también es acotada. Por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{5^n + n + 2}{6^n}} = 1.$$

**96** Calcular los límites

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2 + 4n}{n+2} - 3n\right).$$

**97** Sea $(a_n)$ la sucesión de números reales definida mediante la expresión

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$



Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

El área de la gráfica de la función $f(x) = 1/x$ en $[1, n]$ es $\int_1^n (1/x)\,dx = \log n$. Sumando las áreas de los rectángulos por defecto y por exceso en los puntos de base $1, 2, \dots, n-1, n$ se tiene

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \log n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1},$$

y así

$$a_n - 1 < \log n < a_n - \frac{1}{n},$$

o también

$$\frac{1}{n} < a_n - \log n < 1.$$

Si existe el límite, se tiene, $0 \le \lim_{n\to\infty}(a_n - \log n) \le 1$.

Considerando el área de $1/x$ en $[1,\ 1+1/n]$ por exceso y por defecto se tiene

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} \le \int_1^{1+1/n} \frac{1}{x}\,dx \le \frac{1}{n} \cdot 1.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{n+1} \le \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \le \frac{1}{n}.$$

Se pueden elevar los términos a $n$ y tomar límites para obtener $\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to 1$.

Ahora es posible probar que $(x_n = a_n - \log n)$ es una sucesión decreciente de números positivos:

$$x_n - x_{n+1} = \log(n+1) - \log n - \frac{1}{n+1} = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} > 0.$$

Por lo tanto existe

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n.$$

El número $\gamma$ se llama constante de Euler y su valor aproximado es $\gamma = 0.5772156649\dots$ Se desconoce si la constante de Euler es un número racional.

**98** La sucesión

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

está acotada. De hecho es fácil comprobar que $1/2 \le x_n \le n/(n+1)$ y así $x_n \in [1/2, 1]$ para todo $n$. Además es creciente (de nuevo una comprobación sencilla). Por tanto la sucesión es convergente. Su límite (que es su supremo) es

$$\lim_n x_n = \lim_n \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} = \log 2 \approx 0.6931471\dots$$

Una forma de justificar esta convergencia es hacer lo siguiente: $\lim_n x_n = \log 2 \Leftrightarrow \lim e^{x_n} = 2$. Además,

$$\begin{aligned}
e^{x_n} &= e^{1/(n+1)+\cdots+1/(2n)} = e^{1/(n+1)} \cdots e^{1/(2n)} \\
&\approx \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n+1}} \cdots \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{\frac{2n}{2n}} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \\
&= \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n+3}{n+2} \cdots \frac{2n+1}{2n} \\
&= \frac{2n+1}{n+1} \to 2.
\end{aligned}$$

**99** Utilizando las desigualdades

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

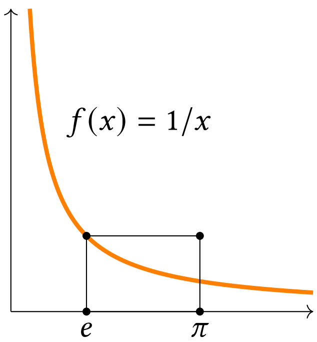
que son ciertas para todo $n \in \mathbb{N}$, se puede demostrar (otra forma más) que

$$\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n} \longrightarrow \log 2.$$

Como consecuencia se puede probar la existencia de una constante $\gamma$ que verifica

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} - \log n.$$

**100** En 2018, B. Chakraborty utiliza un argumento ya conocido para probar de forma sencilla la desigualdad $\pi^e < e^\pi$. Para ello mide el área de la función $1/x$ en el intervalo $[e,\pi]$, que es menor que el área del rectángulo que contiene a esa región:




$$\log \pi - 1 = \int_e^\pi \frac{1}{x}\,dx < \frac{\pi}{e} - 1,$$

y se llega a $\pi^e < e^\pi$.
Este argumento ya se ha utilizado en el ejemplo 97, pág. 25. Se puede utilizar para cualesquiera números $a < b$. En este caso se obtienen desigualdades del tipo

$$1-\frac{1}{x} \;\le\; \log x \;\le\; x-1 \qquad (x>1).$$

Si se utiliza en los puntos $n, n+1, \ldots, 2n$, entonces el área está encajada entre la suma de áreas de rectángulos, por defecto y por exceso:

$$\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n} \;\le\; \log 2n - \log n \;=\; \log 2 \;=\; \int_n^{2n}\frac{1}{x}\,dx \;\le\; \frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{2n-1}.$$

Si

$$s_n \;=\; \frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n},$$

entonces

$$s_n \;\le\; \log 2 \;\le\; s_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \;=\; s_n + \frac{1}{2n}.$$

La sucesión $(s_n)$ está acotada (además, es creciente) y su límite es $\log 2$.

**101** **Sobre $n!$ y la fórmula de Stirling**. Es evidente que el intervalo $[0,n]$ contiene a todos los números $\{0,1,\ldots,n\}$. Por tanto el intervalo $[n/2,n]$ contiene al menos la mitad de ellos (el otro subintervalo $[0,n/2)$ contiene al resto). Por tanto, en la lista de números $1,\ldots,n$ al menos la mitad es mayor o igual que $n/2$.

Así por ejemplo,

$$1+\ldots+n \ge \frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2} = \frac{n^2}{4},$$

y también
$$n! = n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1 \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} = \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right)^{n}.$$

Por otra parte, (cambiando los primeros términos por $n$ y la otra mitad de términos por $n/2$)
$$n! = n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1 \leq n^{n/2}\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} = \left(\frac{n^n}{\sqrt{2}^n}\right).$$

En resumen
$$\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right)^{n} \;\leq\; n! \;\leq\; \left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right)^{n}.$$

**Corolario**.

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$

c) $\displaystyle\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \leq \sqrt[n]{n!} \leq \frac{n}{\sqrt{2}}$. Por tanto $\displaystyle 0 \leq \frac{1}{\sqrt{n}\,\sqrt{2}} \leq \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

En [Spivak, *Cálculo Infintesimal*] puede verse que este límite es
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

Esto indica que $\sqrt[n]{n!} \approx n/e$, aunque es falso que $n! \approx (n/e)^n$ (págs. 629–630). Esto último es una simple consecuencia de la desigualdad ya vista $(\sqrt{n}/\sqrt{2})^n \leq n! \leq (n/\sqrt{2})^n$.

Más adelante, en la pág. 794 se muestra que además $n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$, que se conoce como fórmula de Stirling:
$$n! \;\approx\; \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

A veces se escribe como (en esta forma es conocida como fórmula de De Moivre)
$$\log n! \;\approx\; n\log n - n + O(\log n)$$

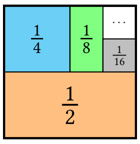
(notación "$O$ grande"). De hecho,
$$\log n! = n\log n - n + \log\sqrt{2\pi n}\,.$$

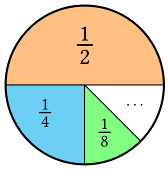
De aquí se sigue que
$$\log n! \;\approx\; n\log n - n.$$

En esta última forma aparece con frecuencia como fórmula de Stirling.

Un poco de historia: De Moivre establece que $n! \approx K\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ para alguna constante $K$. Posteriormente Stirling prueba que $K = \sqrt{2\pi}$.

**102** Demostraciones visuales de la igualdad $\displaystyle\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 1.$




**103** Se conoce como serie de Kempner a una modificación de la serie armónica suprimiendo los términos en los que aparezca una determinada combinación de dígitos. Por ejemplo, eliminando los términos en cuya expresión aparezca la secuencia 896 se obtiene la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}_{[896]}$$

de todos los sumandos $1/n$ excepto para aquellos $n$ que contengan la secuencia 896 en su expresión, como $n = 1896$ o $n = 908965$.

Es fácil comprobar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}_{[0]}$$

es sumable. Los términos eliminados forman una serie no sumable, ya que

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \ldots = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\right) = +\infty.$$

También se puede comprobar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}_{[9]}$$

es sumable:

1) para los números naturales de una sola cifra (se elimina el 9) la suma de los inversos $1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/8$ está acotada por 8.

2) para los números de 2 cifras (del 10 al 99 hay 90; no se eliminan $8 \cdot 9$ y se eliminan $8 + 10$). La suma de sus inversos $1/10 + 1/11 + \ldots + 1/88$ es menor o igual que $\dfrac{8 \cdot 9}{10}$.

3) similarmente, hay $8 \cdot 9^2$ números de tres cifras que no contienen ningún nueve, y la suma de sus inversos es menor o igual que $\dfrac{8 \cdot 9^2}{100}$

Y así con el resto de números de cuatro cifras, de cinco, etcétera.

Por tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}_{[9]} \leq 8 + \frac{8 \cdot 9}{10} + \frac{8 \cdot 9^2}{10^2} + \frac{8 \cdot 9^3}{10^3} + \ldots = 80$$

(esta última es una serie geométrica y se puede calcular su suma).

Este razonamiento se puede utilizar con otras cifras. Son interesantes las lecturas de

http://en.wikipedia.org/wiki/Kempner_series

http://mathworld.wolfram.com/KempnerSeries.html

http://en.wikipedia.org/wiki/Small_set_(combinatorics)

**104** Probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \ldots$$

es sumable. Calcular su suma.

Es fácil comprobar que la serie es sumable, por ejemplo, mediante el criterio de la raíz. Por tanto, se puede reordenar y se obtiene

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \ldots = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right) + \ldots$$

Este problema se puede generalizar para estudiar la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} nr^n$$

donde $|r| < 1$ (en otro caso la serie evidentemente no es sumable). Es fácil comprobar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} nr^n = \frac{r}{(1-r)^2},$$

ya que al ser sumable (el criterio de la raíz por ejemplo garantiza la sumabilidad) se puede hacer

$$\sum_{n=1}^{\infty} nr^n = \left(r + r^2 + r^3 + \ldots\right) + \left(r^2 + r^3 + \ldots\right) + \ldots = \frac{r}{1-r} + \frac{r^2}{1-r} + \ldots$$

**105** (Aplicación del problema anterior). Un profesor aprueba siempre un porcentaje $r$ de alumnos, con $r \in [0, 1]$. Si hay $N$ alumnos, en la primera convocatoria aprueban $Nr$; en la segunda quedan $N(1-r)$ y aprueban $Nr(1-r)$; en la tercera quedan $N(1-r)^2$ y aprueban $Nr(1-r)^2$, etcétera. La cantidad de alumnos aprobados (en las distintas convocatorias) es

$$Nr + Nr(1-r) + Nr(1-r)^2 + \ldots = Nr\left(1 + (1-r) + (1-r)^2 + \ldots\right) = Nr\frac{1}{r} = N,$$

es decir, todos acaban aprobando.

¿Cuál es la media de convocatorias para aprobar? Hay $Nr$ que necesitan 1 convocatoria; hay $Nr(1-r)$ que necesitan 2; $Nr(1-r)^2$ que necesitan 3,... Por tanto, la media es

$$m = \frac{1}{N}\left(Nr + 2Nr(1-r) + 3Nr(1-r)^2 + \ldots\right) = \frac{r}{1-r}\sum_{n=1}^{\infty} n(1-r)^n = \frac{1}{r}.$$

Por ejemplo, si un profesor aprueba siempre al 50 % de sus alumnos ($r = 1/2$), el número medio de convocatorias para aprobar es 2.

**106** Una forma sencilla de sumar una serie del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} na^n = a + 2a^2 + 3a^3 + \ldots$

La serie sólo es sumable si $|a| < 1$, y en ese caso, si $s = a + 2a^2 + 3a^3 + \ldots$, entonces

$$s - (a + a^2 + a^3 + \ldots) = a^2 + 2a^3 + 3a^4 + \ldots = a(a + 2a^2 + 3a^3 + \ldots) = a \cdot s.$$

Por tanto

$$s - \frac{a}{1-a} = a \cdot s$$

y entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} na^n = \frac{a}{(1-a)^2}$$

**107** Los segmentos que unen puntos consecutivos de la sucesión $(1/n)$ suman entre todos la longitud de $[0,1]$. Por tanto

$$\sum_{n\geq 1} \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+n} = 1.$$

Este tipo de series se llaman *series telescópicas*. Otro ejemplo: como $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ (para $n > 1$), entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots = 2.$$

**108** Otra forma de probar que $\sum 1/n^2$ es sumable:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 2.$$

**109** Estudiar la sumabilidad de las series

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+n^2+2}{2^n} \qquad \text{b)} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3}$$

**110** Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$. Estudiar la sumabilidad de las series

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)a^n}{n^2\, 3^n} \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n+n^2+1}{n\, b^n + 3^n}$$

según sean los valores de $a$ y $b$.

**111** Probar que $\sum \frac{n+1}{3^n}$ es sumable. Calcular su suma.

**112** Lo mismo para la serie $\sum \frac{n+2}{10^n}$

**113** La serie $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$ es sumable y su suma es $2/3$.



Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

**114** Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Estudiar la sumabilidad de las series

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(n+2)(n+a)5^n} \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n^2(n+6)2^n}$$

según sean los valores de $a$ y $b$.

**115** Sea $(x_n)$ una sucesión convergente de términos positivos: $x_n \geq 0$ para todo $n$ y $(x_n) \to a \in \mathbb{R}$. ¿Qué ocurre con la sucesión $(\sqrt[n]{x_n})$? ¿Es convergente? ¿Es acotada?

Si $a > 0$ entonces $a - \varepsilon \leq x_n \leq a + \varepsilon$ para todo $n$ salvo una cantidad finita. Luego $(\sqrt[n]{x_n}) \to 1$.

El caso $a = 0$ es especial. Si $(x_n) \to 0$ entonces $x_n < 1$ para todo $n$ salvo una cantidad finita, luego $\sqrt[n]{x_n} \leq 1$. Si esta última sucesión converge debe ser a un número de $[0, 1]$.

La sucesión $(x_n) = (1/n) \to 0$ y $(\sqrt[n]{x_n}) \to 1$. La sucesión $(x_n) = (1/2^n) \to 0$ y $(\sqrt[n]{x_n}) \to 1/2$. Una mezcla de ambas, $(x_n) = (1, 1/2^2, 1/3, 1/2^4, 1/5, 1/2^6, \ldots)$ cumple que $(\sqrt[n]{x_n})$ no es convergente (los términos pares van a 0 y los impares a $1/2$).

**116** (**Sobre los criterios del cociente y la ráiz de sumabilidad de series numéricas**) Sea $(x_n)$ una sucesión de números reales positivos: $x_n \geq 0$ para todo $n$. Probar que

$$\underline{\lim}_n \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \underline{\lim}_n \sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim}_n \sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim}_n \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Como consecuencia, si existe $L = \lim_n \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ (con $0 \leq L \leq +\infty$) entonces también existe $\lim_n \sqrt[n]{x_n} = L$.

La consecuencia es evidente y no necesita demostración. La desigualdad central tampoco necesita ser demostrada. La primera desigualdad y la tercera son similares, por lo que sólo se hará la primera.

Sea $a = \underline{\lim}_n \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$. Evidentemente se tiene $a \geq 0$. Si $a = 0$ no hay nada que probar. Sea entonces $a > 0$ y sea $0 < b < a$. Veamos que $b \leq \underline{\lim}_n \sqrt[n]{x_n}$ y así se tendrá como conclusión que $\underline{\lim}_n \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \leq \underline{\lim}_n \sqrt[n]{x_n}$.

Por definición de límite inferior, a la izquierda de $b$ sólo hay finitos términos $x_{n+1}/x_n$. Por tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > b \qquad (\forall n \geq N).$$

Si $n > N$ entonces

$$\frac{x_{N+1}}{x_N} > b, \; \frac{x_{N+2}}{x_{N+1}} > b, \ldots, \; \frac{x_n}{x_{n-1}} > b$$

y multiplicando todas estas desigualdades se tiene

$$\frac{x_n}{x_N} > b^{n-N}, \quad \text{y} \quad \sqrt[n]{x_n} > b\,\sqrt[n]{x_N b^{-N}}\,.$$

Esto es cierto para todo $n > N$ y así

$$\liminf_n \sqrt[n]{x_n} \geq \lim_n b\,\sqrt[n]{x_N b^{-N}} = b.$$





Departamento de Matemáticas Universidad de Extremadura

**117** El resultado anterior puede completarse con estos ejemplos.

• Si $(x_n) = (1, 2^2, 1, 2^4, 1, 2^6, \ldots$, es decir, $x_n = 1$ si $n$ es impar y $x_n = 2^n$ si $n$ es par, entonces

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \begin{cases} 2^{n+1} & n \text{ impar} \\ 1/2^n & n \text{ par} \end{cases} \qquad \sqrt[n]{x_n} = \begin{cases} 1 & n \text{ impar} \\ 2 & n \text{ par} \end{cases} .$$

Por tanto

$$\varliminf_n \frac{x_{n+1}}{x_n} = 0 < 1 = \varliminf_n \sqrt[n]{x_n} < \varlimsup_n \sqrt[n]{x_n} = 2 < +\infty = \varlimsup_n \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

• Si $y_n = n$ para todo $n$, entonces $\lim_n \dfrac{y_{n+1}}{y_n} = \lim_n (1 + 1/n) = 1$. Por tanto, $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$.

• Si $z_n = n^n/n!$ para todo $n$, entonces $\lim_n \dfrac{z_{n+1}}{z_n} = \lim_n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$. Así se tiene que $\lim_n \sqrt[n]{z_n} = \lim_n \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

• El cálculo de $\lim_n \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$ no es fácil. En cambio, si se considera $x_n = \binom{2n}{n}$, entonces es sencillo comprobar que $\lim_n \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 4$. Por tanto, $\lim_n \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} = 4$.

**118** Probar que

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!}, \quad 2e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$$

Basta utilizar que $e = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ y así

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e.$$

Por otra parte,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} = 2e.$$

Otra forma es utilizar el polinomio de Taylor

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{n!}$$

**119** Calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n + 3^n}{5^n}$

Basta escribirla como suma de dos series geométricas.

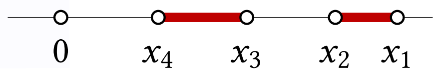
**120** La sumabilidad de la serie armónica alternada $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ puede probarse viendo que las sumas parciales

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots$$

se corresponden a longitudes de segmentos $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ para $n = 1, 3, 5, \ldots$

El mismo argumento prueba la sumabilidad de una serie alternada $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots$ con $(x_n) \searrow 0$.

Las sumas $(x_1 - x_2) + (x_3 - x_4) + \ldots$ representan longitudes de segmentos $[x_{n+1}, x_n]$ para $n = 1, 3, 5, \ldots$ (en el dibujo, en rojo)




Esto prueba que la sucesión de sumas parciales pares $(s_2, s_4, s_6, \ldots)$ es convergente (es creciente y acotada). Como además $|s_{n+1} - s_n| = \frac{1}{n+1}$, también converge la sucesión $(s_n)$.

**121** Jacob Bernoulli probó la no sumabilidad de la serie armónica $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ viendo que para $n > 1$ se tiene

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n^2} \;>\; \frac{1}{n} + \frac{n^2 - n}{n^2} \;=\; 1.$$

Así,

$$1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{25}\right) + \left(\frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{36}\right) + \ldots$$

tiene sumas parciales no acotadas. Parece ser que este mismo argumento ya fue encontrado por N. Oresme en el s.XIV.

**122** J. Bernoulli también consiguió probar la sumabilidad de la serie $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$ utilizando la desigualdad

$$\frac{1}{k^2} \;\leq\; \frac{2}{k(k+1)} \;=\; \frac{2}{k} - \frac{2}{k+1}.$$

Así

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \;\leq\; 2\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] \;<\; 2.$$

**123** La sumabilidad de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ depende del valor $s$. La serie no es sumable para $s = 1$ y sí lo es para $s > 1$. Se llama función zeta de Riemman a

$$\zeta(s) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Esta función puede ampliarse para definirla en todo número complejo $s \neq 1$. Se conocen algunos valores (Euler encontró una fórmula general para valores pares de $s$) como

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \ldots$$



Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Para números impares no se conoce una expresión general, aunque sí aproximaciones con la precisión que se quiera.

Por ejemplo, puede utilizarse Sagemath con el código

```
var('k,n')
for n in range (2,12):
    show([n,sum(1/k^2,k,1,oo)])
```

para hallar estos valores de la función zeta de Riemman.

Es fácil encontrar lecturas sobre esta función: por qué se llama función de Riemann y no función de Euler, su relación con la distribución de números primos, etc.

## Funciones reales de una variable. Límites, continuidad, diferenciabilidad

**124** Utilizar la definición de límite de una función en un punto para comprobar que

$$\lim_{x\to 2}\left(4x-3\right)=5,\qquad \lim_{x\to -1}\left(x+|x|\right)=0,\qquad \lim_{x\to 2}\left(x^3-x^2-x+4\right)=6.$$

**125** Encontrar ejemplos de funciones que verifiquen

$$\lim_{x\to a} f(x)=0,\quad \lim_{x\to a} h(x)=0,\quad \lim_{x\to a} g(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=0,\quad \lim_{x\to a} h(x)\cdot g(x)=2.$$

**126** Sea $f : A\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continua.

a) Si $f(a)<0$ entonces existe un intervalo $(a-\delta, a+\delta)$ en el cual $f$ es negativa.

b) Deducir que $\{x\in A\ :\ f(x)<0\}=f^{-1}(-\infty,0)$ es un conjunto abierto.

c) Si $f(a)\in U$ y $U\subset\mathbb{R}$ es abierto, entonces existe un intervalo $(a-\delta, a+\delta)$ que verifica $f(a-\delta, a+\delta)\subset U$.

d) Deducir $\{x\in A\ :\ f(x)\in U\}=f^{-1}(U)$ es un conjunto abierto.

Como consecuencia para cualquier función $f$ se tiene

$$f \text{ es continua } \Leftrightarrow f^{-1}(C) \text{ es abierto de } A \quad (\forall C\subset\mathbb{R} \text{ abierto}),$$

es decir,

$$f \text{ es continua } \Leftrightarrow f^{-1}(C)=\{x\in A : f(x)\in C\} \text{ es abierto para cada } C \text{ abierto de } \mathbb{R}.$$

**127** Se consideran las funciones $f(x)=x^2-3x+2$ y $g(x)=\sqrt{x}+1$ definidas cada una en el mayor dominio posible. Calcular las funciones $f\circ g$ y $g\circ f$, y los dominios en los que están definidas.

**128** Para las funciones

$$f : x\in(-1,1)\cup(2,+\infty)\longrightarrow\begin{cases} x & \text{si } x<1\\ 10-x^2 & \text{si } 2<x\end{cases}\qquad g : x\in[-8,+\infty)\longrightarrow |x|,$$



Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

calcular $g \circ f$ y $f \circ g$.

**129** Dadas $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, la composición $g \circ f$ tiene como dominio

$$\mathrm{Dom}(g \circ f) = \left\{x : x \in \mathrm{Dom}(f),\ f(x) \in \mathrm{Dom}(g)\right\} = \left\{x : x \in A,\ f(x) \in B\right\} = A \cap f^{-1}(B).$$

En particular, si $f(A) \subset B$ (es decir, $f(x) \in B$ para todo $x \in A$) entonces $A = A \cap f^{-1}(B)$. En este caso, la función $g \circ f$ está definida en $A$.

Por ejemplo, si $f(x) = \log(x-2)$ y $g(x) = \sqrt{x}$, entonces $A = (2, +\infty)$, $B = [0, +\infty)$, y la composición $g \circ f$ está definida en todos los valores $x \in A$ tales que $\log(x-2) \in [0, +\infty)$. Luego $\mathrm{Dom}(g \circ f) = [3, +\infty)$.

Esta composición es la función $(g \circ f)(x) = \sqrt{\log(x-2)}$.

**130** Escribir la función

$$f(x) = \frac{1 + \operatorname{sen}(x^2 + e^x)}{e^{x + \cos x} + 1}$$

como composición de funciones elementales básicas.

**131** Se considera la función

$$f : x \in (0,1) \cup (2,3) \longrightarrow \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } 2 < x < 3 \end{cases}$$

Probar que $f$ es continua. Calcular $\lim_{x \to 1} f(x)$.

**132** La función $f(x) = 1/x$ es continua en todos los puntos $x \neq 0$. Esto es fácil de comprobar ya que se trata de una función que es cociente de dos funciones continuas (el numerador es la función constante igual a 1 y el denominador en la función identidad). También se puede probar su continuidad utilizando la igualdad

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|x-a|}{|x| \cdot |a|},$$

con la que se puede probar que si $a \neq 0$ entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}.$$

**133** Sea $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en un punto de acumulación $a \in I$. Entonces, para cada $(x_n) \to a$ se tiene $f(x_n) \to f(a)$ (se dice que $f$ es secuencialmente continua en $a$). En este caso, como $a = \lim x_n$, se suele escribir

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \to +\infty} x_n\right),$$

que expresa la idea de que las funciones continuas y los límites pueden permutarse.

Y recíprocamente, si una función $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ verifica que para cada $(x_n) \to a$ se tiene $f(x_n) \to f(a)$, entonces $f$ es continua en $a$.

**134** La función $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en cualquier punto $a \geq 0$.

Una forma (que prueba además que $f$ es uniformemente continua): Dado $\varepsilon > 0$ se elige $\delta = \varepsilon^2$. Entonces, si $|x - y| < \delta$ se tiene

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}|^2 \leq |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \cdot |\sqrt{x} + \sqrt{y}| = |x - y| < \varepsilon^2,$$

y por tanto $|x - y| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon$.

Otra forma: se trata de probar que $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$. Para ello hay que comprobar que si $x \longrightarrow a^+$ o si $x \longrightarrow a^-$ entonces $|\sqrt{x} - \sqrt{a}|$ se puede hacer arbitrariamente pequeño. Ahora bien, si $x \longrightarrow a^+$ (el otro caso $x \longrightarrow a^-$ es similar) entonces

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} < \varepsilon \iff \sqrt{x} < \sqrt{a} + \varepsilon \iff x < \varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{a} + a \iff x - a < \varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{a},$$

y se puede elegir $\delta = \varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{a}$ en la definición de continuidad.

Este mismo argumento sirve para probar que una función como $f(x) = x^{1/n}$ es continua, donde $n = 2, 3, \ldots$. Como corolario, las funciones potenciales

$$f(x) = x^{m/n} = (x^{1/n})^m$$

son continuas, por ser composición de funciones continuas. Estos argumentos llevan además a la continuidad de las funciones potenciales $f(x) = x^p$ para $p \in \mathbb{R}$.

**135** Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y $f[a, b] \subset [a, b]$ entonces existe un punto fijo para $f$ (un valor $c$ que cumple $f(c) = c$)

Considerar la función $g(x) = f(x) - x$. Se tiene $g(a) = f(a) - a \geq 0$ y $g(b) = f(b) - b \leq 0$. Si alguno de ellos es cero la prueba se ha terminado. En caso contrario se aplica el teorema de Bolzano.

**136** Para hallar $\lim_{x\to 0+} x^{2/\log x}$ se puede calcular el límite de la base y del exponente y entonces

$$\lim_{x\to 0+} x^{2/\log x} = 0^0 = 1.$$

Esto es incorrecto (el segundo signo igual es cierto, el falso es el primero). Al escribir $f(x) = x^{2/\log x}$ se tiene $\log\left(f(x)\right) = \dfrac{2}{\log x}\log x$. Por tanto $f(x) = e^2$ y $\lim_{x\to 0+} x^{2/\log x} = e^2$.

**137** Sobre la ecuación $xe^x = 1$.

Al escribir dicha ecuación como $f(x) = xe^x - 1$, el teorema de Bolzano permite encontrar una solución de $f(x) = 0$, cuyo valor es $c = 0.5671432\ldots$. Es la única solución posible, ya que sólo puede haber soluciones positivas y además $f'(x) > 0$ para $x > 0$. De haber otra solución se obtendría una solución de $f'(x) =$, que no es posible.

Esta solución se llama constante $\Omega$. Es el único valor que cumple $\Omega e^\Omega = 1$. Este valor coincide con $W(1)$, donde $W$ es la función de Lambert, que se define como la inversa de la función $f(W) = We^W$. Así, $W(1)$ es la solución de $We^W = 1$, $W(2)$ es la solución de $We^W = 2$, etcétera. Por ejemplo, $W(e) = 1$.




Departamento de Matemáticas Universidad de Extremadura

La constante $\Omega$ es un punto fijo de la función $e^{-x}$, es decir, un punto que cumple $\Omega = e^{-\Omega}$. Por tanto, $\Omega$ puede calcularse como el límite de la sucesión $(\Omega_n)$, donde $\Omega_1$ es cualquier valor arbitrario positivo y $\Omega_{n+1} = e^{\Omega_n}$. Por ejemplo, si se comienza por $\Omega_1 = 1$, entonces la sucesión es

$$(\Omega_1,\ \Omega_2 = e^{-\Omega_1} = e^{-1} = 1/e,\ \Omega_3 = e^{-\Omega_2} = e^{-1/e},\ \ldots)$$

La ecuación $xe^x = 1$ puede escribirse de otra forma: si $e^x = \alpha$, es decir, $x = \log \alpha$, entonces la ecuación $xe^x = 1$ se transforma en $\log \alpha \cdot \alpha = 1$. Por tanto, $\alpha$ es la solución de la ecuación $x^x = e$.

Por último, también puede aplicarse el logaritmo en la ecuación $xe^x = 1$ y se obtiene $\log x + x = 0$. Luego $\Omega$ el es valor en el que se cortan las gráficas de las funciones $-x$ y $\log x$.

**138** La función de Lambert permite conocer soluciones de ecuaciones del tipo $x^2 = e^x$ o similares. Para ello se hace lo siguiente

$$x^2 = e^x \Rightarrow \frac{x}{2} = \pm\frac{1}{2}e^{x/2} \Rightarrow -\frac{x}{2}e^{-x/2} = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{x}{2} = W\left(\pm\frac{1}{2}\right).$$

Como además $W(-1/2)$ es complejo, la solución real buscada es $x = -2W(1/2) = -0.70346742249839165205\ldots$. También podría haberse hecho así:

$$x^2e^{-x} = 4\left(\left(-\frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}\right)^2.$$

**139** (Demostración alternativa al teorema de Bolzano sobre funciones continuas) Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua que verifica $f(a) < 0 < f(b)$ (el caso $f(a) > 0 > f(b)$ es similar). Entonces existe un valor $c \in (a, b)$ que verifica $f(c) = 0$.

La demostración comienza definiendo $x_1 = a$, $y_1 = b$. Se elige el término medio $(x_1 + y_1)/2$, que divide en dos mitades el intervalo original. De esas dos mitades, se define $[x_2, y_2]$ como aquella en la que $f$ cambia de signo. Sobre este nuevo intervalo se vuelve a hacer el mismo proceso. Y así continuamente. Se construye así una sucesión $[x_1, y_1] \supset [x_2, y_2] \supset \ldots$ en los que $f$ vale negativo en cada $x_n$ y positivo en cada $y_n$. La sucesión $(x_n)$ converge (es creciente y acotada) al mismo sitio que converge $(y_n)$. Sea $c = \lim x_n = \lim y_n$. Como $f(x_n) < 0$ para todo $n$ entonces $f(c) \leq 0$. Como $f(y_n) > 0$ para todo $n$ entonces $f(c) \geq 0$. Por tanto $f(c) = 0$.

**140** Un algoritmo sencillo para utilizar el teorema de Bolzano. Se considera una ecuación $f(x) = 0$, de la que se trata de calcular sus soluciones. Se buscan en primer lugar valores en los que $f$ cambie de signo. Si $a$ y $b$ son tales valores, y $f$ es continua en $[a, b]$, entonces es posible encontrar una solución de dicha ecuación con la precisión que se quiera.

Paso 1. Encontrar valores de $a$ y $b$. Esto se puede hacer rastreando cómo son los valores de $f$ sobre a lo largo de la recta real.

Paso 2. Se define $c = (a + b)/2$.

Paso 3. Si $|f(c)| < 10^{-12}$ entonces se imprime el valor de $c$ y se termina (la igualdad $f(c) = 0$ es virtualmente imposible de alcanzar, así que se pone como criterio que sea menor que $10^{-12}$, o cualquier otro valor que se quiera).

Paso 4. En caso contrario, se mira cómo es el valor de $f(c)$.

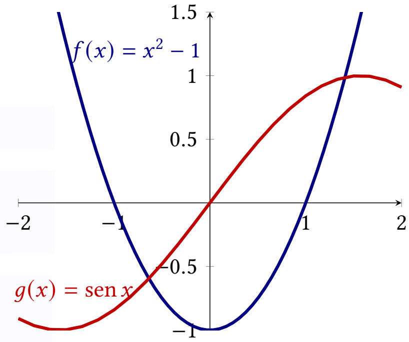
Si $f(a) \cdot f(c) < 0$ entonces se define $b = c$.

Si $f(b) \cdot f(c) < 0$ entonces se define $a = c$.

Se vuelve al paso 2.

**141** Calcular las soluciones de la ecuación

$$x^2 - 1 = \operatorname{sen} x$$




Soluciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= -0.63673265080528201089\ldots \\ x_2 &= 1.4096240040025962492\ldots \end{aligned}$$

**142** Calcular las soluciones de $x^2 = e^x$ con al menos 6 cifras decimales (la solución debe salir $x = -0.7034674224\ldots$)

**143** **Una técnica para probar la continuidad y la continuidad uniforme.** Se puede probar que la función $f(x) = 1/x$ es continua en $a = 1$ haciendo lo siguiente:

$$\left|f(a+\delta) - f(a)\right| = \left|\frac{1}{1+\delta} - \frac{1}{1}\right| = \frac{\delta}{1+\delta} < \frac{\delta}{1} < \varepsilon$$

siempre que $\delta < \varepsilon$. Por tanto, esta función es continua en $a = 1$ y para $\varepsilon > 0$ hay que elegir $\delta < \varepsilon$ en la definición de continuidad.

Continuidad de la misma función en $a = 2$:

$$\left|f(a+\delta) - f(a)\right| = \left|\frac{1}{2+\delta} - \frac{1}{2}\right| = \frac{\delta}{(2+\delta)2} < \frac{\delta}{4} < \varepsilon \qquad \text{si } \delta < 4\varepsilon.$$

Continuidad en $a = 7$:

$$\left|f(a+\delta) - f(a)\right| = \left|\frac{1}{7+\delta} - \frac{1}{7}\right| = \frac{\delta}{(7+\delta)7} < \frac{\delta}{49} < \varepsilon \qquad \text{si } \delta < 49\varepsilon.$$

Continuidad en $a = 0.2$:

$$\left|f(a+\delta) - f(a)\right| = \left|\frac{1}{0.2+\delta} - \frac{1}{0.2}\right| = \frac{\delta}{(0.2+\delta)0.2} < \frac{\delta}{(0.2)^2} < \varepsilon \qquad \text{si } \delta < (0.2)^2\varepsilon = \frac{\varepsilon}{25}.$$

A medida que $a$ se acerca a 0 la relación $\varepsilon$-$\delta$ es «peor». La función no es uniformemente continua en $(0, +\infty)$ ni en $(0, 1)$. En cambio sí lo es en $[0.1, +\infty)$, ya que para $a \in [0.1, +\infty)$ se tiene $a \geq 0.1$ y entonces

$$\left|f(a+\delta) - f(a)\right| = \left|\frac{1}{a+\delta} - \frac{1}{a}\right| = \frac{\delta}{(a+\delta)a} < \frac{\delta}{a^2} < \frac{\delta}{0.1^2} < \varepsilon \qquad \text{si } \delta < \varepsilon/100.$$

Este $\delta$ es válido para cualquier $a \in [0.1, +\infty)$, lo que indica la uniforme continuidad de $f$ en dicho intervalo.

**144** **Continuidad de la función exponencial**. Ya se ha visto en un problema anterior la desigualdad

$$(1+x)^n > 1+nx \qquad (\forall x > 0, n \in \mathbb{N}),$$

conocida como desigualdad de Bernoulli. Como consecuencia, $(1+x)^n > 1+nx > nx$. Si se escribe $a = (1+x)^n$, entonces $a$ es un número mayor que 1 y además $a^{1/n} - 1 = x$. Reescribiendo la desigualdad anterior en estos términos se tiene

$$1 < a^{1/n} < 1 + \frac{a}{n} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Dado $\varepsilon > 0$ se elige $n$ tal que $\frac{a}{n} < \varepsilon$. Así, para $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$ se tiene

$$a^x < a^{1/n} < 1 + \frac{a}{n} < 1 + \varepsilon$$

y por tanto

$$a^x > a^{-1/n} > \frac{1}{1+\varepsilon} > 1 - \varepsilon.$$

Tomando entonces $\delta = 1/n$ se tiene

$$|x| < \delta \Rightarrow |a^x - 1| < \varepsilon.$$

Esto dice que

$$\lim_{x \to 0} a^x = 1,$$

que es la continuidad de la función exponencial $a^x$ en 0. Para ver la continuidad en cualquier otro punto $b$ se hace

$$\lim_{x\to b} a^x = \lim_{x\to b} a^b(a^{x-b}) = a^b \lim_{x\to b} a^{x-b} = a^b \lim_{t\to 0} a^t = a^b.$$

(En el problema 79, pág. 19, puede verse otra forma de probar la continuidad de la función exponencial.)

**145** **Derivada de la función exponencial**. Utilizando de nuevo la fórmula de Euler [problema 80, pág. 19], si $f(x) \to$ y $g(x) \to \infty$ para $x \to a$, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} \;=\; e^{\lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1)},$$

se puede calcular la derivada de la función $e^x$.

Para ello, si $a \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\lim_{x\to a} \frac{e^x - e^a}{x-a} \;=\; \lim_{x\to a} \frac{e^a(e^{x-a}-1)}{x-a} \;=\; e^a \lim_{x\to a} \frac{(e^{x-a}-1)}{x-a}.$$

Además

$$\lim_{x\to a} (e^{x-a})^{1/(x-a)} \;=\; e$$

y entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{(e^{x-a}-1)}{x-a} \;=\; 1.$$

Esto prueba que la función exponencial es derivable en todo punto. Por tanto, también es continua en todo los puntos.



Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

**146** **Derivada de cualquier otra función exponencial $a^x$.** De la igualdad

$$a^x = e^{\log a^x} = e^{x \log a}$$

se sigue que

$$(a^x)' = (\log a)e^{x \log a} = (\log a)a^x.$$

Análogamente,

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} \Rightarrow (\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}.$$

**147** Si $f$ es derivable en $a$ se puede escribir el valor de la derivada como

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Por ejemplo, si $f(x) = x^2$, entonces

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x\to a} x + a = 2a,$$

y también

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2ah + h^2}{h} = 2a.$$

**148** Utilizando la definición de derivada se puede calcular la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ en $a = 1$.

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{1}}{x - 1} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1+t} - \sqrt{1}}{t}.$$

En cualquiera de los dos casos se obtiene $f'(1) = 1/2$ (para realizar los cálculos basta multiplicar y dividir por el conjugado del numerador).

**149** Procediendo como en el problema anterior se puede calcular la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ en cualquier punto $a > 0$.

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{a+t} - \sqrt{a}}{t}.$$

De aquí resulta que $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ si $a > 0$. En $a = 0$ la función $f(x) = \sqrt{x}$ no es derivable.

**150** **Consecuencias de la regla de la cadena**. Dada una función derivable $f(x)$, se puede considerar la función $f^n(x)$, que es la composición de la función original con la función $g(x) = x^n$. Aplicando la regla de la cadena,

$$(f^n(x))' = nf^{n-1}(x)f'(x).$$

El mismo argumento sirve para probar que

$$(\log(f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Como consecuencia se pueden derivar funciones haciendo ciertas transformaciones *antes* de derivar:

$$f(x)=x^p \;\Rightarrow\; \log f(x)=p\,\log x \;\Rightarrow\; \frac{f'(x)}{f(x)}=p\,\frac{1}{x} \;\Rightarrow\; f'(x)=p\,f(x)\,\frac{1}{x}=p\,x^{p-1}.$$

$$f(x)=x^x \;\Rightarrow\; \log f(x)=x\,\log x \;\Rightarrow\; \frac{f'(x)}{f(x)}=\log x+1 \;\Rightarrow\; f'(x)=(1+\log x)\,x^x.$$

Esta forma de proceder se suele llamar *derivación logarítmica*, por utilizar el logaritmo antes de derivar.

También puede calcularse la derivada de $f(x)=x^x$ haciendo lo siguiente:

$$f(x)=x^x=e^{\log x^x}=e^{x\log x} \;\Rightarrow\; f'(x)=(x\log x)'e^{x\log x}=(1+\log x)\,x^x.$$

**151** Calcular el polinomio de Taylor de $f(x)=e^x$ en $a=0$. Calcular el valor de $e$ con un error menor que $10^{-8}$.

**152** Dibujar con ayuda de Geogebra, WxMaxima, o algún otro, el polinomio de Taylor de $f(x)=\log x$ en $a=2$. A medida que el grado aumenta, esos polinomios toman valores cada vez mayores en $x=6$ o $x=7$. ¿Qué significa eso? ¿No es una función analítica en $a=2$?

**153** Se considera la función

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)$$

definida en $(0,+\infty)$.

Para calcular su valor mínimo, se puede probar directamente [ver ejemplo 94, pág. 24] que $f(x)\geq\sqrt{a}$ para todo $x>0$. Como además $f(\sqrt{a})=\sqrt{a}$, este valor es dónde se alcanza el mínimo.

También se puede proceder derivando e igualando a cero:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{x^2}\right)=0 \;\Leftrightarrow\; x=\sqrt{a}\,.$$

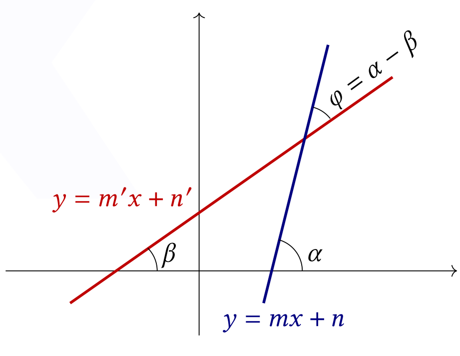
Como $f''(x)$ es siempre positiva, se trata de un mínimo. Por tanto $f(x)\geq f(\sqrt{a})=\sqrt{a}$ para todo $x>0$.

**154** (**Derivadas, pendientes y ángulos de corte**) Dadas dos rectas $y=mx+n$ e $y=m'x+n'$, de pendientes $m$ y $m'$, se verifica

$$\operatorname{tg}\alpha=m,\;\; \operatorname{tg}\beta=m'.$$

El ángulo $\varphi$ de corte entre ellas verifica

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\left|\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}\right|=\left|\frac{m-m'}{1+m\cdot m'}\right|$$




**Ejemplo**. Se pueden calcular los ángulos de corte de las rectas del tipo $y=x$ o $y=2x$, en general $y=mx$, con el eje $X$. Esos ángulos son

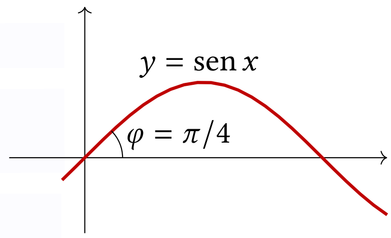
**1)** con la recta $y = x$ un ángulo de $45^\circ$ ($\pi/4 = 0.25\pi$ radianes),

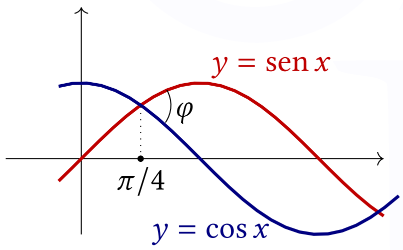
**2)** con la recta $y = 2x$ un ángulo aproximado de $63.43^\circ$ (unos $0.35\pi$ radianes),

**3)** con la recta $y = 4x$ un ángulo ángulo aproximado de $75.96^\circ$, unos $0.42\pi$ radianes, y

**4)** en general, con la recta $y = mx$ el ángulo es $\operatorname{arctg}|m|$.

**Ejemplo**. La gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ atraviesa al eje $X$ por el origen. Para calcular el ángulo de corte en ese punto $a = 0$ se calcula la recta tangente a la gráfica de la función: $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. En este caso, la recta tangente es $y = f(0) + f'(0)(x - 0) = x$. El ángulo que forma con el eje $X$ es $\pi/4$. La gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ sale del origen con la misma dirección que la diagonal del primer cuadrante.




**Ejemplo**. Las gráficas de la funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ se cortan en el valor $a = \pi/4$. El ángulo de corte es el que forman las rectas tangentes en dicho punto $a = \pi/4$, es decir, el ángulo de las rectas

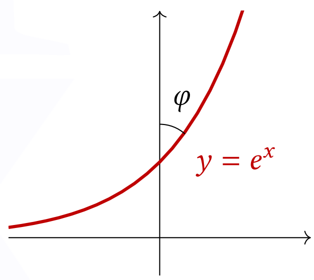
$$y = f(a) + f'(a)\,(x - a) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \pi/4),$$
$$y = g(a) + g'(a)\,(x - a) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \pi/4).$$

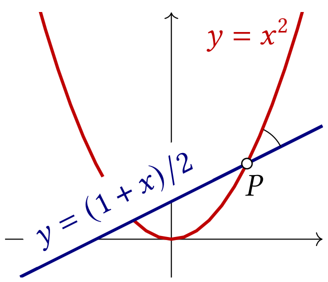
El ángulo $\varphi$ se calcula entonces utilizando las pendientes $m = \sqrt{2}/2$ y $m' = -\sqrt{2}/2$ y se obtiene

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{m - m'}{1 + m \cdot m'} \right| = \left| \frac{\sqrt{2}}{1 - 1/2} \right| = 2\sqrt{2}\,.$$

Luego $\varphi \approx 70.53^\circ \approx 0.39\pi$.

**Ejemplo**. Con este procedimiento se pueden calcular ángulos de corte de gráficas de funciones. Para ello, se calculan en qué puntos se cortan, y en cada uno de estos puntos de corte se mira cómo son los ángulos que forman las rectas tangentes a las gráficas.
La gráfica de la función $f(x) = e^x$ corta al eje $Y$. Eso ocurre cuando $a = 0$. La recta tangente en ese punto es $y = f(a) + f'(a)(x - a) = 1 + 1 \cdot (x - 0) = 1 + x$. Por tanto, el ángulo de corte con el eje $Y$ es $\pi/4$.




**Ejemplo**. Para calcular el ángulo de corte de las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = (1+x)/2$ es necesario hallar primero los puntos de corte.

$$\left.\begin{array}{rcl} y & = & x^2 \\ y & = & (1 + x)/2 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1 \ \text{ o } \ x = -1/2.$$

Estos puntos de corte son entonces $P(1, 1)$ y $Q(-1/2, 1/4)$.

En el punto $P$ se trata entonces de ver cómo son las pendientes de las gráficas en $x = 1$. Son $f'(1) = 2$ y $g'(1) = 1/2$. El ángulo de corte verifica $\operatorname{tg}\varphi = 3/4$ y se obtiene $\varphi \approx 36.87°$.

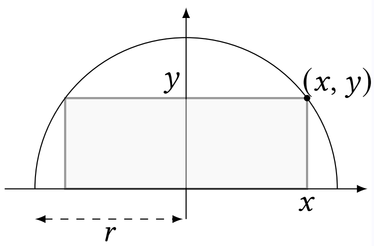
**155** Calcular el rectángulo de área máxima que se puede hacer con una cuerda de determinada longitud.

Si $L$ es la longitud y se denotan por $x$ e $y$ sus lados, entonces $2x + 2y = L$, y se trata de calcular el máximo valor que puede alcanzar el área $A = x \cdot y$. Como $y = (L - 2x)/2$, entonces $A = x(L - 2x)/2$ y el problema se traduce en encontrar el máximo de esta función «área». Como $A' = L/2 - 2x$, al igualar a cero se obtiene $x = L/4$, que es un valor máximo ya que $A'' < 0$. La solución es pues $x = y = L/4$. El valor máximo del área es $A = L^2/16$.

**156** Se cortan dos trozos de una cuerda. Con uno de ellos se forma un círculo y con el otro un cuadrado. ¿Cómo debe hacerse el corte para que la suma de áreas (del círculo y el cuadrado) sea máxima?

**157** Calcular cómo debe ser el rectángulo de mayor tamaño que cabe en un semicírculo.

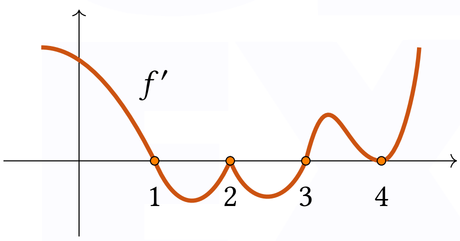
Si el semicírculo tiene radio $r$, entonces los puntos $(x, y)$ del borde verifican $x^2 + y^2 = r^2$. Se trata de calcular cuál de estos puntos hace máximo el valor $2xy$, que es el área (tamaño) del rectángulo.
Como $2xy = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$, se trata de calcular las soluciones de $\left(2x\sqrt{r^2 - x^2}\right)' = 0$. Se obtiene $x = r/\sqrt{2}$, que es un máximo. Así, la solución pedida es $x = y = r/\sqrt{2}$ y el área máxima es $r^2$.




**158** Descomponer $e$ como suma de dos números positivos que hagan máxima la suma de sus logaritmos.

Se trata de calcular el máximo valor de $\log x + \log y$ sabiendo que $x$ e $y$ son números positivos que cumplen $x + y = e$. Por tanto, el problema se traduce en el calcular el valor máximo de $\log x + \log(e - x)$.

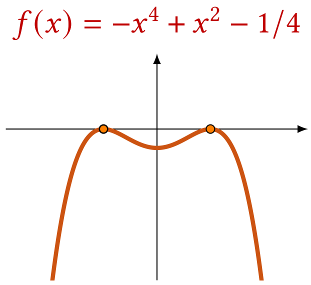
**159** Calcular los máximos y mínimos de $f$ viendo cómo es la gráfica de $f'$



**160** El cálculo de máximos y mínimos puede ayudar a encontrar soluciones de ecuaciones. La función

$$f(x) = -x^4 + x^2 - 1/4$$

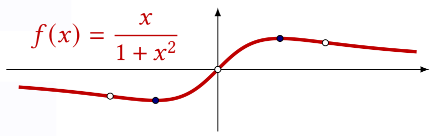
no presenta cambios de signo. Para cualquier valor $a$ que se pruebe se tiene $f(a) \leq 0$. No se puede aplicar el teorema de Bolzano y parece que la ecuación $f(x) = 0$ no tiene soluciones. En este caso se mira cuál es el valor máximo de $f$. Podría darse el caso que $f$ alcanza el valor 0 (y la ecuación $f(x) = 0$ tiene solución) sin que haya cambios de signo.




La función presenta un mínimo en $x = 0$ y dos máximos en $x = \pm 1/\sqrt{2}$. El valor de la función en esos máximos es $f\left(\pm 1/\sqrt{2}\right) = 0$. La ecuación $f(x) = 0$ tiene dos soluciones.

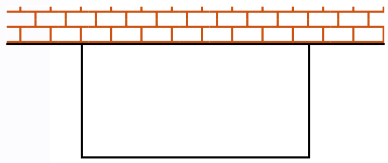
**161** Calcular los máximos y mínimos de la función

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$



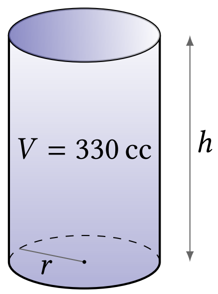

Hallar los puntos de inflexión. Dibujar su gráfica.

**162** Aprovechando una pared, y utilizando un alambre, se quiere hacer un recinto rectangular lo mayor posible (que tenga área máxima).
¿Cómo debe hacerse?



Si $L$ es la longitud del alambre, entonces $L = 2x + y$, donde $y$ es el lado paralelo a la pared. Se trata de calcular el máximo valor del área $A = xy = x(L - 2x)$. El resto es sencillo: derivando e igualando a cero se llega a $L - 4x = 0$. Así $x = L/4$, que es un máximo; $y = L/2$; y el área máxima es $L^2/8$.

**163** Calcular las dimensiones de una lata cilíndrica de volumen 33 cl. (es decir, 330 $\text{cm}^3$) que sea lo más barata posible (con superficie lateral mínima). Se entiende que la lata está cerrada superior e inferiormente.
¿Son así las latas de refrescos que vemos habitualmente?




**164** Comprobar que para cualquier valor de $n = 0, 1, 2\ldots$ se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^{-2}}}{x^n} = 0.$$

Utilizar este hecho para comprobar que la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

verifica

$$0 = f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = \ldots$$

**165** Dibujar las gráficas de

$$f(x) = xe^x, \qquad g(x) = \frac{x+1}{x} \qquad \text{y} \qquad h(x) = \frac{x^2+1}{x+3}$$

y sus asíntotas.

Como ayuda para representar una función:

- Tabla de valores. Puntos de corte con los ejes. Valores de la función cuando $x \longrightarrow \pm\infty$.
- Puntos extremos. Signo de la derivada (para saber dónde la función crece y decrece)
- Asíntota vertical: es la recta $x = a$ siempre que exista alguno de los límites

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty.$$

- Asíntota horizontal: es la recta $y = b$ si existe

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$$

- Asíntota oblicua: es la recta $y = mx + n$ si existen los límites (que se han de calcular en este orden)

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad n = \lim_{x \to \pm\infty} \Big( f(x) - mx \Big)$$

- Simetrías (si es una función par, o impar)

**166** Utilizar el programa `Geogebra` para dibujar las gráficas de las funciones $f(x) = \operatorname{sen} 1/x$ y $g(x) = x \operatorname{sen}$. Dibujar las gráficas de $h(x) = \cos ax$ según sea el valor de $a$ (este valor se coloca en un deslizador; al moverlo se obtiene una gráfica distinta)

**167** Estudiar la función $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$. ¿Puede definirse de forma continua en $x = 0$? Estudiar también su función derivada.

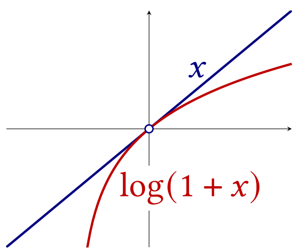
**168** Se consideran las funciones

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ \ \ 0 & \text{si } x = 0 \\ +1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Representar ambas funciones. Calcular las funciones compuestas $g \circ f$ y $f \circ g$. Para estas dos últimas funciones, hallar $\lim_{x \to 0} \big(g \circ f\big)(x)$ y $\lim_{x \to 0} \big(f \circ g\big)(x)$.

**169** Demostrar que $\log(1+x) < x$ para todo $x \neq 0$ (se entiende que para todo $x \in (-1, +\infty)$ no nulo, que son los valores en los que tiene sentido).

Para probarlo se considera la función $f(x) = x - \log(1+x)$, que es continua y derivable en todo su dominio $(-1, +\infty)$. Su derivada es




$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$



Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Por tanto $f$ es decreciente en $(-1,0)$, y creciente en $(0,+\infty)$. Como además $f(0)=0$ entonces $f(x)\geq 0$ en cualquier $x$. Y además, si $x\neq 0$ entonces $f(x)>0$: no puede haber otro valor $x\neq 0$ en el que $f(x)=0$ pues en ese caso (teorema de Rolle) existiría un valor $c$ entre 0 y $x$ en el que $f'(c)=0$, cosa que es imposible.

**170** Probar que $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x}=1$. Deducir de este resultado que

a) si $a_n\to 1$ entonces $\log a_n\sim a_n-1$, es decir, $\lim_n \dfrac{\log a_n}{a_n-1}=1$ (se dice que son infinitésimos equivalentes).

b) En particular, $\sqrt[n]{a}-1\sim \dfrac{1}{n}\log a$ para todo $a>0$, y así $\lim_n n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=\log a$.

**171** Aplicando la regla de L'Hôpital se obtiene

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{1}=+\infty,$$

que es falso. Un ejemplo más que recuerda aplicar dicha regla verificando antes que se cumplan las condiciones. El valor correcto es

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{x}=-\infty.$$

Otro ejemplo

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+1}{2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{2}=3.$$

El valor correcto es $-4$.

**172** **(Sobre la regla de L'Hôpital) A)** Si $f$ y $g$ son funciones diferenciables en $a$ con $f(a)=g(a)=0$, entonces

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{\big(f(x)-f(a)\big)/(x-a)}{\big(g(x)-g(a)\big)/(x-a)}=\frac{f'(a)}{g'(a)},$$

donde la última igualdad se obtiene aplicando límite en el numerador y denominador, y tiene sentido siempre que $g'(a)\neq 0$. Hay que notar que $g'(a)\neq 0$ significa que $\lim_{x\to a}\big(g(x)-g(a)\big)/(x-a)=g'(a)\neq 0$; por tanto, $g(x)\neq g(a)$ en algún entorno de $a$, y puede hablarse de $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)=\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))/(g(x)-g(a))$. En consecuencia

$$\left.\begin{array}{c} f(a)=0=g(a)\\ g'(a)\neq 0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Lógicamente, si $g'(a)=0$ esto no puede aplicarse. Por ejemplo, si $f(x)=e^x-x-1$ y $g(x)=x^2$, entonces

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\frac{f'(0)}{g'(0)}=\frac{0}{0},$$

que no tiene sentido.

**B)** La regla de L'Hôpital añade algo más, que puede aplicarse tanto si $g'(a)\neq 0$ como si $g'(a)=0$.

$$\text{Si existe } \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ entonces existe } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Por tanto, si $g'(a) \neq 0$ pueden aplicarse ambos resultados A) y B), y se tiene:

**Corolario 1**: *Si $f$ y $g$ son funciones diferenciables en $a$ con $f(a) = g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$, entonces*

$$\textit{si existe } \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \textit{ tambien existe } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

En particular, para $g(x) = x - a$,

**Corolario 2**: *Si $f$ es diferenciable en $a$ con $f(a) = 0$, entonces*

$$\textit{si existe } \lim_{x\to a} f'(x), \textit{ tambien existe } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} f'(x) = f'(a).$$

**Corolario 3**: *Si $f$ es diferenciable en $a$, entonces*

$$\textit{si existe } \lim_{x\to a} f'(x), \textit{ tambien existe } \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} f'(x) = f'(a).$$

(es una consecuencia directa del corolario anterior aplicado a la función $f(x) - f(a)$)

• Por tanto, si $f'$ no es continua en $a$ entonces eso ocurre porque no existe $\lim_{x\to a} f'(x)$. Se trata de una discontinuidad esencial.

• La función $f(x) = x^2 \operatorname{sen} 1/x$ (y $f(0) = 0$) es diferenciable en $0$ y verifica $f'(0) = 0$, pero $\lim_{x\to 0} f'(x)$ no existe (caso de existir sólo podría ser igual a 0). Si $g(x) = x$, resulta que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{no existe,}$$

y muestra que la regla de L'Hôpital sólo se cumple en un sentido.

• El Corolario 3 es también una consecuencia directa de la regla de L'Hôpital, sin tener que recurrir al resultado dicho en A). Si $f$ es diferenciable en $a$ y existe $\lim_{x\to a} f'(x)$ entonces

$$\lim_{x\to a} f'(x) \;=\; \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \;=\; f'(a),$$

(la última igualdad es la definición de $f'(a)$) y $f'$ es continua en $a$.

• Otro ejemplo más: como

$$0 \;=\; \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{e^x}$$

entonces (regla de L'Hôpital)

$$0 \;=\; \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{e^x} \;=\; \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x} \;=\; \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^x} \;=\; \lim_{x\to +\infty} \frac{x^n}{e^x}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. La regla de L'Hôpital dice que si existe el límite del cociente de funciones, también existe (y coincide) el límite del cociente de las primitivas (primitivas que en $a$ se anulan).

**173** (**Sobre la regla de L'Hôpital**). La regla de L'Hôpital extendida

$$\left.\begin{array}{r} \displaystyle\lim_{x\to\square} f(x) = \lim_{x\to\square} g(x) = \odot \\ \displaystyle\lim_{x\to\square} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \triangle \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to\square} \frac{f(x)}{g(x)} = \triangle,$$



Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

es válida en los casos ($a$ y $b$ son números reales)

$$\begin{array}{rcl} \square & = & a,\ a^+,\ a^-,\ +\infty,\ -\infty, \\ \odot & = & 0,\ \pm\infty, \\ \triangle & = & b,\ \pm\infty. \end{array}$$

**Ejemplos:** [Algunos se hacen directamente; otros necesitan cierta manipulación, que suele ser tan simple como

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/g(x)}{1/f(x)},$$

o similar; otras veces hay que hacer manipulaciones más elaboradas].

**1)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen} 1/x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} 1/x}{1/x} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1.$

**2)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{2x} = +\infty$ (se dice del tipo $\frac{\infty}{\infty}$)

**3)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{6x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{6} = +\infty.$

**4)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{6x-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$

**5)** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x \log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0$ (del tipo $0\cdot\infty$)

**6)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \frac{1}{2}$ (es del tipo «normal», es decir, $\frac{0}{0}$)

**7)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x - \sqrt{x^2-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x-\sqrt{x^2-x}\,\right)\left(x+\sqrt{x^2-x}\,\right)}{x+\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+\sqrt{x^2-x}} = \frac{1}{2}$ (es del tipo $\infty-\infty$ y se transforma multiplicando y dividiendo por el *conjugado* para convertirla en una en que se pueda aplicar la regla de L'Hôpital). La última igualdad se consigue dividiendo por $x$ el numerador y el denominador.

**174** Utilizando la igualdad vista en el problema anterior, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen} 1/x = 1$, probar que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^4}\right)}{\sqrt{x^4+1}-x^2} = 2.$$

**175** Como puede verse en `https://goo.gl/no3YVb`, al aplicar la regla de L'Hôpital para calcular

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

se obtiene, aplicando dos veces la regla,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x},$$

y no se llega a nada. El cálculo correcto es

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

**176** Partiendo de la definición de número $e$ se tiene

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

y por tanto $\lim_n n\log(1+1/n) = 1$. Así $\log(1+1/n) \simeq 1/n$. Con la regla de L'Hôpital se tiene $\log(1+x) \simeq x$ cuando $x \longrightarrow 0$.

**177** Dibujar las graficas de las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^2 \operatorname{sen} 1/x$. Lo mismo con las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3 \operatorname{sen} 1/x$. En general, ¿se puede ver alguna relación entre las gráficas de $f(x) = x^{n-1}$ y $g(x) = x^n \operatorname{sen} 1/x$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$?

**178** Con el programa `WxMaxima` calcular las derivadas hasta orden 5 de la función $f(x) = xe^x$. Dibujar sus gráficas.

**179** Calcular el polinomio de Taylor de $f(x) = \sqrt{x}$ en $a = 1$ de grado 5. Aproximar el valor de $\sqrt{3}$.

$$p_1^5 f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 - \frac{5}{128}(x-1)^4 + \frac{7}{256}(x-1)^5$$

Se puede probar que

$$\sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{n!\,n!\,2^{2n}(2n-1)}(x-1)^n \qquad (|x-1| < 1)$$

y así

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{n!\,n!\,2^{2n}(2n-1)}x^n \qquad (|x| < 1)$$

Otra posible forma de aproximar raíces de números reales es utilizar la expresión

$$\sqrt{x} = 10^{(\log_{10} x)/2} = e^{(\log x)/2}$$

En general,

$$x^a = e^{a \log x}$$

**180** Escribir el polinomio de Taylor de cualquier orden de las funciones

a) $f(x) = (x-2)^2$ en $a = 2$ y $a = 0$

b) $g(x) = 1 + x + 3x^3$ en $a = 0$ y $a = 1$

c) $h(x) = \cos x$ en $a = 0$. Utilizar el programa Geogebra para dibujar los primeros polinomios de Taylor (de grados hasta 10).

**181** **Contacto entre dos funciones**. Sea $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Se dice que $f$ y $g$ tienen un contacto de orden $n$ en $a$ si

$$f(a) = g(a) \ \text{ y } \ \lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Probar que para dos funciones $f$ y $g$ que sean $n$ veces diferenciables en $a$ se tiene

$$f \text{ y } g \text{ tienen un contacto de orden } n \text{ en } a \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} f(a) & = & g(a) \\ f'(a) & = & g'(a) \\ & \dots & \\ f^{(n)}(a) & = & g^{(n)}(a) \end{array} \right.$$

Demostración. La implicación "$\Leftarrow$" es consecuencia directa de la regla de L'Hôpital (aplicada $n$ veces):

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n} &= \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - g'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x) - g''(x)}{n(n-1)(x-a)^{n-2}} = \dots \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - g^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} = \frac{1}{n!}(f^{(n)}(a) - g^{(n)}(a)) = 0 \end{aligned}$$

Para la implicación "$\Rightarrow$" se tiene $f(a) = g(a)$ por definición de contacto. Hay que observar que además

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^k} = 0$$

para cualquier $0 \leq k \leq n$. Luego un contacto de orden $n$ obliga a un contacto de cualquier orden menor.

Por tanto, si $f$ y $g$ tienen un contacto de orden $n$ entonces también tienen un contacto de orden 1 y así

$$f'(a) - g'(a) = \lim_{x \to a} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \right) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{x-a} = 0.$$

Por tener un contacto de orden 2,

$$f''(a) - g''(a) = \lim_{x \to a} \left( \frac{f'(x) - f'(a)}{x-a} - \frac{g'(x) - g'(a)}{x-a} \right) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - g'(x)}{x-a}$$

y entonces, aplicando la regla de L'Hôpital,

$$f''(a) - g''(a) = \lim_{x \to a} 2 \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^2} = 0.$$

Y se continúa así para contacto de orden 3, de orden 4, etcétera. □

Dos funciones se parecen en $a$ si tienen contacto en ese punto. A medida que el contacto sea mayor (de orden) más parecidas serán las funciones. Como una consecuencia de lo visto más arriba, se tiene

*Si $p$ y $q$ son funciones polinómicas de grados $n$ y $m$ respectivamente y tienen en algún punto un contacto de orden mayor o igual que $n$ y $m$, entonces $p = q$.*

ya que al escribir los polinomios en potencias de $(x-a)$,

$$\begin{aligned} p(x) &= r_0 + r_1(x-a) + r_2(x-a)^2 + \cdots + r_n(x-a)^n \\ q(x) &= s_0 + s_1(x-a) + s_2(x-a)^2 + \cdots + s_m(x-a)^m. \end{aligned}$$

los coeficientes coinciden: $r_0 = s_0$ por tener un contacto de orden 0; $r_1 = s_1$ por tener un contacto de orden 1,...

Como consecuencia, si una función cualquiera $f$ tiene contacto de orden $n$ en $a$ con dos polinomios, entonces esos polinomios tienen entre sí un contacto de orden $n$ en $a$. Al escribir ambos polinomios en potencias de $(x-a)$, sus coeficientes deben coincidir hasta el grado $n$. En particular, sólo puede haber un polinomio de grado 1 que tenga un contacto de orden 1 en $a$ con la función $f$; sólo puede haber un polinomio de grado 2 que tenga un contacto de orden 2 en $a$ con la función $f$, etcétera.

Un contacto de orden 0 en $a$ significa

$$f(a) = g(a) \;\text{ y }\; \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

Luego $f$ es continua en $a$ si y sólo si lo es $g$. Así, una función es continua en $a$ si y sólo si tiene un contacto de orden 0 en $a$ con una función continua.

Además, si $f$ tiene un contacto de orden 0 con una función constante, $g(x) = k$, entonces,

$$f(a) = k \;\text{ y }\; \lim_{x\to a} f(x) = k,$$

que es equivalente a la continuidad de $f$ en $a$. Por tanto, una función es continua en $a$ si y sólo si tiene un contacto de orden 0 con una función constante. Esa función constante no puede ser otra que el valor de la función en el punto: $g : x \in \mathbb{R} \longrightarrow f(a)$.

Las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } \; x \neq 0 \\ 1 & \text{si } \; x = 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} x & \text{si } \; x \neq 0 \\ 1 & \text{si } \; x = 0 \end{cases}$$

tiene un contacto de orden 0 en $a = 0$, pero no tienen un contacto de orden 1.

Demostrar que si $f$ y $g$ tienen un contacto de orden $n$, entonces también tienen un contacto de orden inferior $p$ $(0 \leq p \leq n)$.

En resumen, para una función $f$ definida en un entorno de un punto $a$, se tiene

- $f$ es continua en $a$ si y sólo si $f$ tiene un contacto de orden 0 en $a$ con una función constante. La única función constante que cumple esta condición es $x \longrightarrow f(a)$

- $f$ es derivable en $a$ si y sólo si $f$ tiene un contacto de orden 1 en $a$ con una función afín (polinomio de grado menor o igual que 1). La única función afín que cumple esta condición es $x \longrightarrow f(a) + f'(a)(x-a)$.

**Ejemplo**. Ya se ha visto que la función

$$f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \begin{cases} x^3 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } \; x \neq 0 \\ 0 & \text{si } \; x = 0 \end{cases}$$

es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Es más, $f$ es indefinidamente derivable en cada $x \neq 0$, pero $f$ no es dos veces derivable en 0.

Además, $f$ tiene en 0 un contacto de orden 2 con un polinomio de grado menor o igual que 2, en este caso el polinomio $g(x) = 0$, pues

$$f(0) = g(0) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - g(x)}{(x-0)^2} = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0.$$

Ya se ha visto que para el caso $n = 0$, una función es continua si y sólo si tiene un contacto de orden 0 con un polinomio de grado 0. También se ha visto que para el caso $n = 1$, una función es derivable si y sólo si tiene un contacto de orden 1 con un polinomio de grado menor o igual que 1. El ejemplo anterior muestra que ya no es cierta esta equivalencia entre ser 2 veces derivable y tener contacto de orden 2 con un polinomio de grado menor o igual que 2.

Este ejemplo se puede transformar fácilmente para conseguir una función que no sea 3 veces derivable pero que tenga un contacto de orden 3 con un polinomio de grado menor o igual que 3. La misma idea para 4, 5....

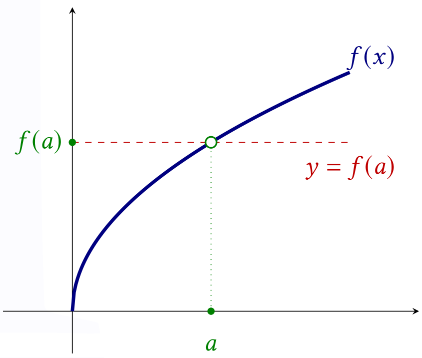
Al contrario de lo que ocurre en los casos $n = 0, 1$ (función continua y derivable), el recíproco del teorema local de Taylor es falso. Es decir, ocurre que si $n > 1$ entonces

$$f \text{ es } n \text{ veces derivable en } a \quad \begin{array}{c}\Rightarrow \\ \not\Leftarrow\end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} f \text{ tiene un contacto de orden } n \text{ en } a \\ \text{con un polinomio de grado } n \end{array} \right.$$

Como resumen, sobre el carácter derivable de una función y tener contacto con algún polinomio de grado cierto grado,

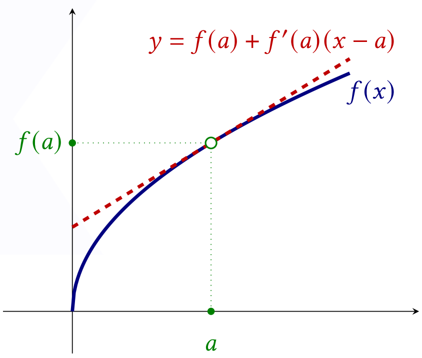
$f$ es continua en $a$ si y sólo si $f$ tiene un contacto de orden 0 en $a$ con la función constante

$$y = f(a).$$




$f$ es derivable en $a$ si y sólo si $f$ tiene un contacto de orden 1 en $a$ con la función

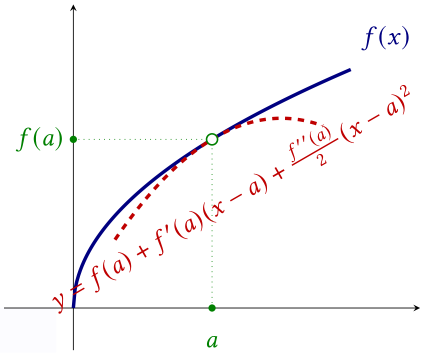
$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$



$f$ derivable dos veces en $a$ implica que $f$ tiene un contacto de orden 2 en $a$ con la función

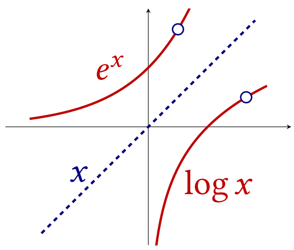
$$y = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2.$$

Pero tener un contacto de ese tipo no implica que $f$ sea dos veces derivable en $a$




**182** **Existencia, continuidad y derivabilidad de la función inversa.** Una función $f$ no siempre tiene inversa. Para que $f^{-1}$ sea una función es necesario y suficiente que $f$ sea inyectiva. En ese caso $f^{-1}$ está definida en la imagen de $f$. Además, $f^{-1}$ es también inyectiva, puesto que $(f^{-1})^{-1} = f$ es una función. Se cumple $f(f^{-1}(x)) = x$ para todo $x$ en el dominio de $f^{-1}$, y $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo $x$ en el dominio de $f$.

Cuando existe la función inversa, las gráficas de las funciones $f$ y $f^{-1}$ son simétricas con respecto a la diagonal del primer y tercer cuadrante: si $(a, b)$ es un punto de la gráfica de $f$ entonces $b = f(a)$. Por tanto $(b, a)$ es un punto de la gráfica de $f^{-1}$. Y los puntos $(a, b)$ y $(b, a)$ son simétricos con respecto de la recta $y = x$.
Por ejemplo, a la derecha se muestran las gráficas de las funciones $e^x$ y $\log x$ (son inversa una de la otra), y un punto de cada gráfica, $(1, e)$ y $(e, 1)$, que son simétricos con respecto a la recta $y = x$.




**1**) Si $f$ es continua e inyectiva en un intervalo, entonces $f$ es creciente o decreciente en dicho intervalo. Por tanto, el dominio de $f^{-1}$ también será un intervalo. Como consecuencia $f^{-1}$ es continua.

Además, si $I$ es un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces $f$ es estrictamente monótona si y sólo si $f$ es inyectiva.

**2**) Al aplicar la regla de la cadena en $f(f^{-1}(x)) = x$ se obtiene

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Pero esta regla sólo se puede aplicar si se sabe que $f^{-1}$ es derivable. Como

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)},$$

parece ser que la clave está en que la derivada de $f$ no se anule.

De hecho, si $f$ es inyectiva y continua en un intervalo y $f'(f^{-1}(a)) = 0$, entonces $f^{-1}$ no es derivable en $a$. Esto es una simple conclusión de la regla de la cadena: como $f(f^{-1}(x)) = x$, si $f^{-1}$ fuese derivable en $a$ se tendría $f'(f^{-1}(a)) \cdot (f^{-1})'(a) = 1$ y así se llegaría a que $0 \cdot (f^{-1})'(a) = 1$, que es absurdo.

Como ejemplo, $f(x) = x^3$ tiene inversa no derivable en 0.

El resultado que muestra la derivabilidad de $f^{-1}$ es

**3**) Sea $f$ continua e inyectiva sobre un intervalo, $f$ derivable en $f^{-1}(b)$ con derivada no nula, $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$. Entonces $f^{-1}$ es derivable en $b$ y

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

También se puede expresar haciendo $a = f^{-1}(b)$, es decir $b = f(a)$ y entonces queda

**3')** Sea $f$ continua e inyectiva sobre un intervalo, $f$ derivable en $a$ con derivada no nula, $f'(a) \neq 0$. Entonces $f^{-1}$ es derivable en $f(a)$ y

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Como corolario, si $I$ es un intervalo y $f$ es derivable en $I$ con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, entonces $f$ es estrictamente monótona, $f^{-1}$ es derivable y su derivada es

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

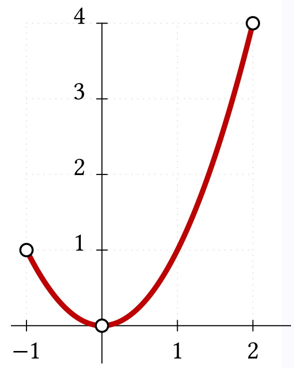
Las demostraciones no son sencillas, y pueden verse en M. Spivak, Cálculo Infinitesimal, capítulo 12.

Con estos resultados, $f(x) = x^n$, definida en todo $\mathbb{R}$ para $n$ par y definida en $[0, +\infty)$ para $n$ impar, es continua e inyectiva y su inversa es $g(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$. Esta función es derivable para $x \neq 0$ y además

$$g'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(f^{-1}(x))^{n-1}} = \frac{1}{n(x^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{n}\, x^{1/n-1}.$$

Y la inversa de la función $f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x) = x^3$, ¿es continua? ¿es derivable?

**183** **Los extremos del intervalo y el cálculo de máximos y mínimos**. La función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-1,\ 2]$ presenta un mínimo relativo en $x = 0$. Es el único punto que anula la derivada. Sin embargo, puede observarse en la gráfica que hay que estudiar qué ocurre en los extremos del intervalo para añadir, si es el caso, otros puntos que sean máximos o mínimos, aunque en ellos no se anule la derivada.
En $x = -1$ la función alcanza un máximo relativo.
En $x = 2$ la función alcanza un máximo absoluto.

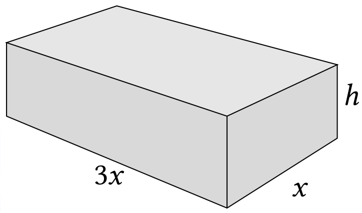



**184** Dados dos puntos $A$ y $B$ del plano, calcular la trayectoria más corta para ir de un punto al otro pasando por el eje $X$ (es un buen ejemplo de un problema con una sencilla solución geométrica y no tan sencilla solución analítica)

**185** Se corta un alambre de longitud $L$ para formar un círculo con uno de los trozos y un cuadrado con el otro. Calcular cómo debe ser el corte para que la suma de las áreas (del cuadrado y el círculo) sea máxima o sea mínima.

Si los trozos que se dedican al cuadrado y círculo son $x$ y $L - x$, entonces la suma de las áreas es $x^2/16 + (l - x)^2/4\pi$. Se trata de calcular el máximo y mínimo absoluto de esa función en el intervalo $[0, L]$. Derivando se obtiene $x = 4L/(4 + \pi)$ que es un mínimo. El máximo debe estar en uno de los extremos del intervalo: se alcanza para $x = 0$.

**186** Considérese un paralelepípedo rectangular de volumen igual a 9 y tal que un lado de su base sea el triple que el otro, como se muestra en la figura.
Determinar las longitudes de sus lados para que el área total (suma de las áreas de sus seis caras) sea mínima.




**187** **Diferenciabilidad de una función definida a trozos**. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Se trata de una función diferenciable en 0, y además $f'(0) = 0$, ya que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0.$$

Pero, si se hacen derivadas en cada trozo, entonces al intentar derivar $x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ se tiene:

$$\left( x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right)' = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Y este límite

$$\lim_{x \to 0} \left( 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right)$$

no existe. Con este método se habría llegado a la conclusión incorrecta de que la función $f$ no es derivable en 0.

En general, la derivada no tiene que ser continua; por lo que el segundo método puede dar "falsos negativos", funciones que *son* diferenciables pero que esta técnica sugiere que no lo son.

**188** Calcular la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x$ en el punto $(1, 3)$. Hallar la recta tangente a la gráfica de $f$ cuya pendiente sea $m = 1/2$ y calcular en qué punto corta esta recta tangente a la recta $y = 0$

**189** Calcular la recta tangente a la gráfica de $f(x) = e^x$ que además pasa por el origen.

**190** Lo mismo para la función $f(x) = 6x$.

**191** Se consideran las funciones $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = -x^2$. Encontrar las rectas que son simultáneamente tangentes a las gráficas de las dos funciones.

**192** Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1/x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

**193** Calcular $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$

**194** Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función

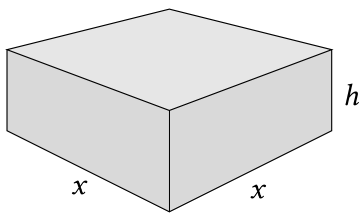
$$f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si} \quad x<0 \\ 3-x & \text{si} \quad 0\le x\le 1 \\ x^2+1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

**195** Calcular

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos^3 x-1}{x^2}$$

**196** En la carretera AP-6, en el puente de Guadarrama, hay un radar de tramo que mide la velocidad media durante 3323 metros. La limitación en esa zona es de 100 km/h. ¿Cuál es el tiempo que debe emplear un conductor en ese tramo para no ser multado?

**197** Se considera un paralelepípedo rectangular de base cuadrada como se muestra en la figura.
Cada una de las cuatro caras laterales tiene perímetro igual a 30 cm. Calcular las dimensiones que debe tener para que su volumen sea máximo.




**198** **Derivadas de orden superior**. Si $f: A\longrightarrow\mathbb{R}$, se dice que $f$ es de clase $n$, y se escribe $f\in C^n(A)$ o $f\in C^n$, si $f$ es $n$ veces derivable y la derivada $n$-ésima $f^{(n)}$ es continua. Se dice que $f\in C^\infty$ (de clase infinito) si $f$ tiene derivadas de cualquier orden, y por tanto, todas esas derivadas son continuas. Es evidente que

$$C^\infty(A)\subsetneq C^{n+1}(A)\subsetneq C^n(A)\subsetneq C^1(A)\subsetneq C(A),$$

donde $C(A)$ denota las funciones continuas.

Probar que la función

$$f: x\in\mathbb{R}\longrightarrow\begin{cases} x^{n+1} & \text{si } x\ge 0, \\ 0 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

es de clase $n$ pero no de clase $n+1$.

La derivada de orden $n$

$$f^{(n)}: x\in\mathbb{R}\longrightarrow\begin{cases} (n+1)!(x-a) & \text{si } x\ge 0, \\ 0 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

es continua, pero no derivable. Luego no puede ser de clase $n+1$ (la derivada $n+1$ ni siquiera existe)

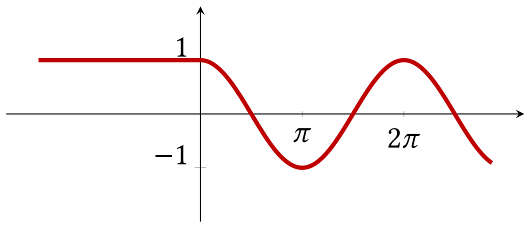
**199** Demostrar que si $f(x)=|x|^3$ entonces $f'(x)=3x|x|$ y $f''(x)=6|x|$. Por tanto $f$ es de clase 2 en 0 pero no de clase 3.

**200** Si $f(x)\to 1$ y $g(x)\to+\infty$ para $x\to a$, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1)}.$$

**201** Probar que la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ \cos x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$




es diferenciable en todo $\mathbb{R}$

**202** **Sobre el teorema del valor intermedio para las derivadas**. *Sea $f$ continua en $a$ y diferenciable en un intervalo que contiene al punto $a$ excepto posiblemente para $a$. Si existe $\lim_{x\to a} f'(x)$ entonces también existe $f'(a)$ y coinciden:*

$$\lim_{x\to a} f'(x) = f'(a).$$

Esto habla de la continuidad de $f'$ en $a$. Para no ser continua, la discontinuidad debe ser por que no existe $\lim_{x\to a} f'(x)$.

Demostración. Se trata de ver que existe

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

y que coincide con $\lim_{x\to a} f'(x)$.

Para valores de $x$ suficientemente próximos a $a$ (se supone $x > a$; para $x < a$ el razonamiento es el mismo) se tiene que $f$ es continua en $[a, x]$ y diferenciable en $(a, x)$ y por el teorema del valor medio existe $c_x \in (a, x)$ que verifica

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x).$$

Como por hipótesis existe $\lim_{x\to a} f'(x)$, se tiene

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} f'(c_x) = \lim_{x\to a} f'(x). \qquad \square$$

**203** Como consecuencia del problema anterior y del teorema del valor intermedio para las derivadas, puede probarse que *si $f$ es derivable en un intervalo que contiene a $a$ pero $f'$ es discontinua en $a$, entonces*

a) los límites laterales $\lim_{x\to a^-} f'(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f'(x)$ no pueden existir a la vez

b) estos límites laterales no pueden existir a las vez ni siquiera admitiendo que puedan valer $\pm\infty$.

(M. Spivak, Cálculo infinitesimal, pág. 297)

**204** Es posible encontrar funciones continuas no derivables: funciones de Cantor (escalera del diablo) y de Weierstrass.

**205** Todos los logaritmos son proporcionales. Para ello se parte de $e^y = x$ y se aplican logaritmos neperianos y logaritmos en otra base:

$$e^y = x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = \ln x \\ y \cdot \log_a e = \log_a x \end{cases}$$


Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

y así

$$\ln x \log_a e = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

[En general, si $f\left(a^b\right) = b \cdot f(a)$ entonces $f(x) = k \cdot \ln(x)$ para todos los valores $x > 0$, ya que si se elige $e^y = x$ entonces $f(x) = f(e^y) = y \cdot f(e) = f(e) \cdot \ln x$.]

Como consecuencia, basta conocer el comportamiento de la función logaritmo neperiano, $\ln x$ o $\log x$. Para el resto de logaritmos basta saber que son múltiplos suyos. Por ejemplo, $(\log x)' = 1/x$. Por tanto

$$\left(\log_3 x\right)' = \left(\frac{\log x}{\log 3}\right)' = \frac{1}{x \log 3}.$$

**206** Si una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ verifica $f'(x) = kf(x)$ entonces debe ser $f(x) = e^{kx}$ o un múltiplo suyo.

La demostración es muy simple: la función $F(x) = f(x)/e^{kx}$ tiene como derivada

$$F'(x) = \frac{f'(x)e^{kx} - f(x)ke^{kx}}{e^{2kx}} = 0$$

y por tanto $F(x)$ es constante. Así $f(x) = Ce^{kx}$

**207** Probar que dos rectas $y = ax + b$ e $y = mx + n$ en el plano son perpendiculares si $a \cdot m = -1$. Utilizar esto para encontrar la familia de curvas perpendiculares a las circunferencias $(x-4)^2 + y^2 = r^2$ (se trata de circunferencias centradas en el punto $(4,0)$ con radios $r$).

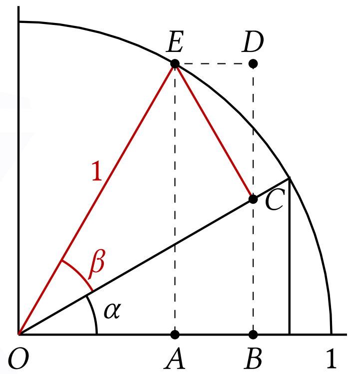
Solución: en cada punto de esas circunferencias se puede calcular la pendiente derivando:

$$2(x-4) + 2yy' = 0.$$

De aquí se sigue que la pendiente de las curvas perpendiculares debe ser $y' = y/(x-4)$, y así $\log y = \log C(x-4)$. Por tanto $y = C(x-4)$. Se trata de rectas que pasan por el punto $(4,0)$.

**208** **Algunas identidades trigonométricas**:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \end{aligned}$$




Para ello basta ver que

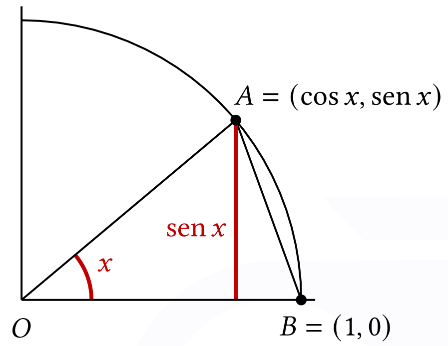
$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= |EA| = |DC| + |CB| \\ &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \end{aligned}$$

ya que $|EC| = \operatorname{sen}\beta$, $|OC| = \cos\beta$ y como en el triángulo $ECD$ el ángulo que toca $C$ es $\alpha$, se tiene

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{|CB|}{\cos\beta}, \quad \cos\alpha = \frac{|DC|}{\operatorname{sen}\beta}.$$

De forma similar,

$$\cos(\alpha+\beta) = |OA| = |OB| - |AB| = |OB| - |ED| = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$




**209** **Demostración de que la función** $\operatorname{sen} x$ **es continua**. Para $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ se considera el triángulo $\triangle OAB$ cuya área es $\frac{1}{2} \operatorname{sen} x$. Este área es menor que el área del sector circular $OAB$. Este sector tiene un área igual a $\frac{x}{2}$. Por tanto

$$0 < \operatorname{sen} x < x$$

y así

$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen} x = 0.$$

Así

$$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sen}(x) = \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen}(-x) = -\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen}(x) = 0.$$

En resumen, $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0 = \operatorname{sen} 0$ y la función $\operatorname{sen} x$ es continua en cero. Ahora, si $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ entonces

$$\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$$

verifica

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \lim_{x \to 0} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{1 - \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}^2 x} = 1 = \cos 0$$

y también es continua en 0. Por último, si $a \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x &= \lim_{h \to 0} \operatorname{sen}(a + h) \\
&= \lim_{h \to 0} \Big( \operatorname{sen}(a) \cos(h) + \cos(a) \operatorname{sen}(h) \Big) \\
&= \operatorname{sen}(a) \lim_{h \to 0} \cos(h) + \cos(a) \lim_{h \to 0} \operatorname{sen}(h) \\
&= \operatorname{sen}(a) \cdot 1 + \cos(a) \cdot 0 \\
&= \operatorname{sen}(a),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \cos x &= \lim_{h \to 0} \cos(a + h) \\
&= \lim_{h \to 0} \Big( \cos(a) \cos(h) - \operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(h) \Big) \\
&= \cos(a) \lim_{h \to 0} \cos(h) - \operatorname{sen}(a) \lim_{h \to 0} \operatorname{sen}(h) \\
&= \cos(a) \cdot 1 - \operatorname{sen}(a) \cdot 0 \\
&= \cos(a).
\end{aligned}$$

Se llega a que ambas funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son continuas en todo $\mathbb{R}$.

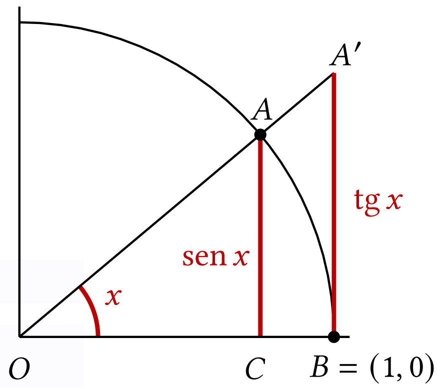

Departamento de Matemáticas Universidad de Extremadura

**210** **Derivadas de las funciones** $\operatorname{sen} x$ **y** $\cos x$. Se considera el gráfico de la derecha.
La longitud del arco $AB$ es igual a $x$ y es mayor que la longitud del segmento $AC$, que es $\operatorname{sen} x$. Esto prueba que

$$\operatorname{sen} x < x.$$

Por otra parte, el área del sector $OAB$ es $x/2$ y es menor que el área del triángulo $OA'B$, que es $\operatorname{tg} x/2$. Por tanto, la desigualdad anterior se puede completar

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x.$$




Dividiendo $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{tg} x$ por cada uno de los términos de esas desigualdades se tiene

$$1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x$$

y también

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\operatorname{tg} x}{x} > 1.$$

De aquí se sigue que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

Como consecuencia (hay que multiplicar arriba y abajo por el conjugado) se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x\left(\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} + 1\right)} = 0.$$

Como corolario de todos estos cálculos se tiene la expresión de las derivadas de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, ya que

$$\operatorname{sen}' x = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x - \operatorname{sen} x}{h} = \cos x.$$

Para la derivada de $\cos x$ se puede utilizar que la función $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ es constante y su derivada entonces es 0. De ahí se obtiene $\cos' x = -\operatorname{sen} x$.

**211** Como ya se ha visto en el problema anterior,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

Se suele decir que $x$, $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{tg} x$ son infinitésimos equivalentes (cuando $x \to 0$) y se expresa

$$x \sim \operatorname{sen} x \sim \operatorname{tg} x.$$

Esto quiere decir que son expresiones intercambiables en cualquier límite cuando $x \to 0$. Por ejemplo, aplicando la regla de L'Hôpital y el cambio $\operatorname{tg} x \sim x$ se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{\operatorname{tg} x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{1 + \operatorname{tg}^2 x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

**212** Definir funciones diferenciables para puntos de acumulación, y no en un entorno del punto, puede llevar a situaciones distintas. Por ejemplo, $f : x \in [0,1] \longrightarrow x$ cumple $f'(0) = f'(1) = 1$ si se definen derivadas para puntos de acumulación. Además en esos puntos hay un máximo y un mínimo. Sin embargo, para funciones definidas en un entorno del punto $a$, si $f$ alcanza un máximo o un mínimo en $a$ entonces $f'(a) = 0$.

**213** **Conjuntos convexos y funciones convexas**. Dados dos puntos $A, B \in \mathbb{R}^2$, al conjunto

$$\{tB + (1-t)A : t \in [0,1]\}$$

se le llama segmento $AB$ y se denota $L[A,B]$ o $[AB]$ o $[A,B]$... Es un conjunto formado por todas las combinaciones convexas entre $A$ y $B$, comenzando en $A$ (cuando $t=0$) y terminando en $B$ (cuando $t=1$). Por ejemplo, si $A=(4,1)$, $B=(2,3)$ entonces los puntos que están en el segmento que une $A$ con $B$ son

$$\{t(2,3) + (1-t)(4,1) : t \in [0,1]\} \;=\; \{(4-2t, 2t+1) : t \in [0,1]\}\,.$$

También se puede escribir

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \begin{array}{c} x = 4-2t \\ y = 2t+1 \end{array},\; t \in [0,1]\right\}.$$

Se dice que un conjunto $H \subset \mathbb{R}^2$ es convexo si dados $A, B \in H$ se tiene $[AB] \subset H$, es decir, si $H$ contiene el segmento que une cualesquiera dos puntos de $H$. Por ejemplo, si $H$ es finito, entonces $H$ es convexo sólo si contiene un sólo punto.

Para una función $f : A \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se llama gráfica de $f$ al conjunto

$$\{(x,y) \in R^2 \;:\; x \in A,\; y = f(x)\}\,.$$

Se llama epigrafo de $f$ a los puntos del plano que están encima de la gráfica, es decir, al conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \in A,\; y \geq f(x)\}\,.$$

Se dice que $f$ es convexa si su epigrafo es un conjunto convexo en $R^2$. Probar que $f(x) = x^2$ es una función convexa, pero $g(x) = x^3$ no lo es.

Si $f$ está definida en un intervalo $I$, $f$ es convexa si y sólo si verifica

$$f\Big(tx + (1-t)y\Big) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

para $x, y \in I$. Por ejemplo, $f(x) = x^3$ es convexa en $[1,2]$ pero no lo es en $[-2,2]$

**214** **Curvatura y radio de curvatura de la gráfica de una función**. Para una curva plana $\mathbf{r}(t)$, se llama curvatura a

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}.$$

Si se trata de la gráfica de una función $y = f(t)$, entonces $\mathbf{r}(t) = (t, f(t))$ y

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & f'(t) & 0 \\ 0 & f''(t) & 0 \end{vmatrix} = f''(t) \cdot \vec{k}.$$



Departamento de Matemáticas Universidad de Extremadura

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

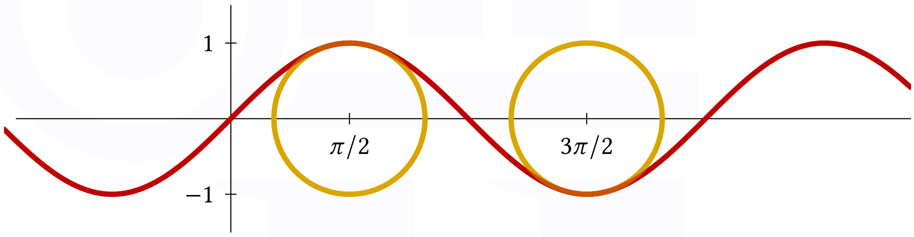
Por tanto, la curvatura de la gráfica de $f$ es

$$\kappa = \frac{|f''(t)|}{\left(\sqrt{1+f'(t)^2}\right)^3} = \frac{|f''(t)|}{\left(1+f'(t)^2\right)^{3/2}}.$$

Se llama radio de curvatura al inverso de este número $\kappa$.

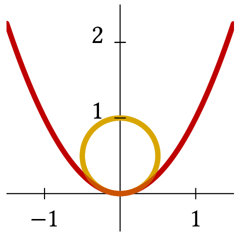
Por ejemplo, en los máximos y mínimos de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, la curvatura es 1, y por tanto el radio de curvatura es 1. Por ejemplo, en $x = \pi/2$ la curvatura es

$$\kappa = \frac{|-\operatorname{sen}(\pi/2)|}{\left(\sqrt{1+\cos^2(\pi/2)}\right)^3} = 1.$$




Al ser 1 el radio de curvatura, la gráfica de la función en esos puntos se comporta "como una circunferencia" de radio 1. En $x = 0$ la curvatura es 0 y el radio es infinito.

La parábola $y = x^2$ tiene curvatura 2 en el punto $(0, 0)$. Su radio de curvatura es $1/2$. Al pasar por el origen, la parábola se comporta como una circunferencia de radio $1/2$ (que por tanto está centrada en el punto $(0, 1/2)$).
En el punto $(1, 1)$ de esa parábola la curvatura es $\kappa = 2/\sqrt{5}^3$, y el radio es su inverso $\sqrt{5}^3/2$




La función $y = \log x$ tiene radio de curvatura $\sqrt{2}^3$ en el punto $(1, 0)$ de la gráfica.

| | |
|---|---|
| 42 | `www.google.es/#q=the+answer+to+life+the+universe+and+everything`<br>`es.wikipedia.org/wiki/Cuarenta_y_dos` |

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

## Ejercicios para practicar con derivadas

I) $f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ ........ $f'(x) = \operatorname{tg}^2 x + 1$

II) $f(x) = \cos^3 x$ ........ $f'(x) = -3 \cos^2 x \operatorname{sen} x$

III) $f(x) = x \operatorname{sen} x^2$ ........ $f'(x) = 2x^2 \cos x^2 + \operatorname{sen} x^2$

IV) $f(x) = \sqrt{x + e^x + 1}$ ........ $f'(x) = \dfrac{e^x + 1}{2\sqrt{x + e^x + 1}}$

V) $f(x) = -\log^3 x + \log\left(x^3\right)$ ........ $f'(x) = -3\,\dfrac{1}{x}\log^2 x + \dfrac{3}{x}$

VI) $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^4 + x^2 + 1}$ ........ $f'(x) = \dfrac{3x^2}{x^4 + x^2 + 1} - \dfrac{2\left(2x^3 + x\right)\left(x^3 + 1\right)}{\left(x^4 + x^2 + 1\right)^2}$

VII) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ ........ $f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1} - \dfrac{e^{2x}}{\left(e^x + 1\right)^2}$

VIII) $f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \cos(x)\right)$ ........ $f'(x) = -(\operatorname{sen}(x) - 1)\cos\left(x + \cos(x)\right)$

IX) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ ........ $f'(x) = \dfrac{2 + 1/\sqrt{x}}{4\sqrt{x + \sqrt{x}}}$

X) $f(x) = e^{e^x}$ ........ $f'(x) = e^{x + e^x}$

XI) $f(x) = x^4 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ........ $f'(x) = 4x^3 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) - x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

XII) $f(x) = x\cos(\operatorname{sen} x)$ ........ $f'(x) = \cos(\operatorname{sen} x) - x\cos(x)\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$

XIII) $f(x) = 10^{\sqrt{x}}$ ........ $f'(x) = \dfrac{10^{\sqrt{x}}\log(10)}{2\sqrt{x}}$

XIV) $f(x) = e^{x^2} + e^x + e^{-x}$ ........ $f'(x) = 2x\,e^{x^2} + e^x - e^{-x}$

XV) $f(x) = \sqrt[x]{\operatorname{sen} x}$ ........ $f'(x) = \sqrt[x]{\operatorname{sen} x}\left(\dfrac{\cos x}{x \operatorname{sen} x} - \dfrac{\log(\operatorname{sen} x)}{x^2}\right)$

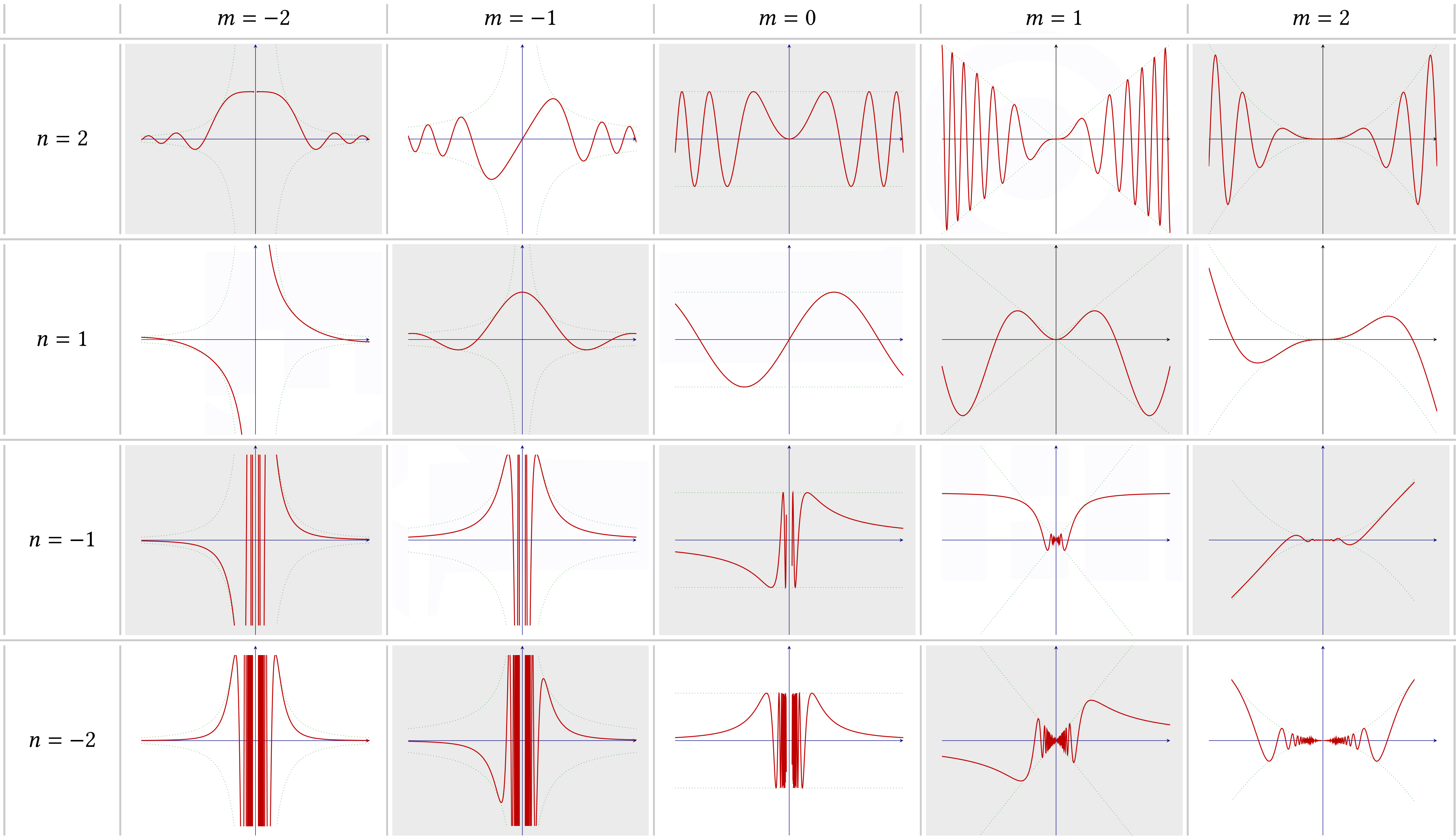
XVI) $f(x) = \log\left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right)$ ........ $f'(x) = \dfrac{2}{x^2 - 1}$

XVII) $f(x) = x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ........ $f'(x) = 2x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$



Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

# Gráficas de $x^m$ sen $x^n$ para distintos valores de $m$ y $n$






matematicas.unex.es/~fsanchez

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura