1

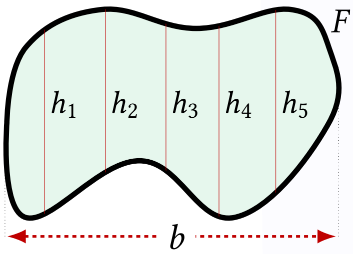
Cálculo II

El cálculo de áreas (y volúmenes)

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

02 · 02 · 2023

Para calcular el área de una figura plana se puede hacer lo siguiente: por una parte se mide la longitud de la base, y por otra se hace la media de varias alturas. Con esto se consigue una aproximación del área:



$$\text{área}(F) \approx \text{base} \times (\text{altura media}) = b \times \frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5}{5}.$$

La aproximación será mejor a medida que aumenta el número de alturas que se utilizan, que dependerá de la naturaleza del objeto y de la precisión que se desee. Es un método equivalente (aunque más sencillo) a ir contando las áreas de los rectángulos que pueden encontrarse dentro de la figura, o también al recuento de las áreas de los cuadrados que hay dentro de ella.

Este método funciona con casi todos los conjuntos. Se verá más adelante cómo son aquellos en los que sí se puede realizar este método (y algunos en los que no).

La mayor ventaja de este proceso es que permite hallar el área de casi cualquier figura plana. La desventaja es que se trata de un procedimiento en el que se exige hacer numerosos cálculos. Con ayuda de calculadoras, ordenadores,... es posible aplicar este método para hallar áreas con una precisión muy alta. Una idea similar se puede utilizar para calcular el volumen de un sólido en el espacio. De momento, sólo se tratará con figuras planas.

Utilizando un atlas, por ejemplo, se puede determinar la superficie de España o de la provincia de Badajoz. Para ello, se mide la base y se miden unas cuantas alturas (a mayor número de ellas, más precisión). Se calcula el producto de la base por la media de las alturas y se multiplica por el número correspondiente para deshacer la escala a la que esté representado el mapa.

Para figuras sencillas, como por ejemplo un círculo de radio 1, se trata de medir la base (que mide 2) y hacer la media de varias alturas. A medida que aumentan el número de alturas consideradas

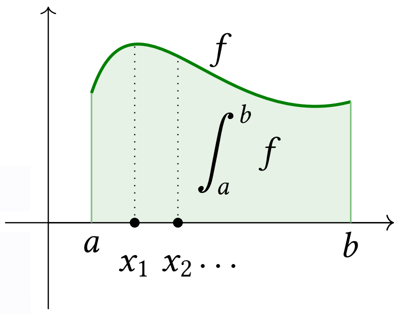
Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

se va obteniendo una aproximaxión del área del círculo, y los valores se van pareciendo cada vez más a 3.141592 . . .

Este método también se puede utilizar para calcular el área encerrada por la gráfica de una función. Así,

$$A \approx (b-a) \times \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}$$

donde los puntos $x_1, \ldots, x_n$ se eligen en el intervalo $[a, b]$ (a mayor número de puntos se obtiene más precisión en el cálculo del área).



Para calcular el valor de A suelen elegirse los puntos $x_1, \ldots, x_n$ equidistantes, por la sencillez que tiene esta elección: dado $n \in \mathbb{N}$, se define $h = (b-a)/n$ y

$$x_1 = a + h,\ x_2 = a + 2h,\ x_3 = a + 3h,\ \ldots,\ x_n = a + nh = b.$$

En lugar de escribir A para indicar el área, se utiliza el símbolo

$$\int_a^b f\,.$$

Si f es una función que tiene primitiva F (que se supone se sabe calcular), se puede determinar el área utilizando la regla de Barrow: $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. La principal ventaja de esta regla es la sencillez. La desventaja es que requiere conocer dicha función F, que no siempre es fácil de calcular.

Por ejemplo, realizando el primer cálculo (base por la media de las alturas) resulta que

$$\int_0^1 e^x \operatorname{tg} x\, dx \ = \ 1.265376481211213\ldots$$

aunque no se sepa calcular una primitiva de $e^x \operatorname{tg} x$ y no se pueda utilizar por tanto la regla de Barrow.

Hay muchas funciones que no tienen una primitiva elemental, es decir, que no se puede expresar como una función elemental. Por ejemplo, las funciones

$$\operatorname{sen} x^2, \quad \cos x^2, \quad \frac{1}{\log x}, \quad x \operatorname{tg} x, \quad \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \ldots$$

no tienen primitivas elementales. Así, para el cálculo de

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x^2\, dx$$

no se puede utilizar la regla de Barrow. Eso no quiere decir que no se pueda calcular esa integral. Utilizando la expresión escrita más arriba

$$A \approx (\pi - 0) \times \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n},$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

para esta función $f(x) = \operatorname{sen} x^2$ y un valor de n suficientemente alto, por ejemplo $n = 10$, se obtiene $A \approx 0.654789$, es decir,

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x^2\, dx \approx (\pi - 0)\cdot \frac{\operatorname{sen}(\pi/10)^2 + \operatorname{sen}(2\pi/10)^2 + \cdots + \operatorname{sen}(9\pi/10)^2 + \operatorname{sen}\pi^2}{10} = 0.654789.$$

El resultado más aproximado, para $n = 2000$, es $A \approx 0.772313$. Para valores mayores de n se obtienen valores cercanos a $A = 0.77265171269006565\ldots$

Este método puede utilizarse para «cualquier» integral definida

$$\int_a^b f$$

sin importar lo complicada que sea la expresión de la función f que aparece en la integral. Con este procedimiento cualquier programa de cálculo puede hacer en un instante aproximaciones del tipo

$$\int_2^3 \frac{\log(x^2 - \operatorname{sen} x^4)}{3 + \cos(e^x - x)}\, dx = 0.637454\ldots$$

¿Se puede hacer el cálculo del área $\int_a^b f$ para cualquier función f? Por ejemplo, si $f(x) = 1$ para $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$ para $x \notin \mathbb{Q}$, ¿tiene sentido hablar de $\int_0^1 f$?

La integral de Riemann, y posteriormente la integral de Lebesgue, aparecen como construcciones matemáticas que muestran cómo es este cálculo de áreas. ¿Cuántas funciones se pueden integrar? ¿Cómo se hacen esos cálculos?

Euclides, 325–265 a.C.
  `http://es.wikipedia.org/wiki/Euclides`
Arquímedes de Siracusa, 287–212 a.C.
  `http://es.wikipedia.org/wiki/Arquímedes`
Bernhard Riemann, 1826-1866
Henri Lebesgue, 1875-1941
Mapa de España:
  `http://d-maps.com/m/europa/spain/espagne/espagne48.pdf`