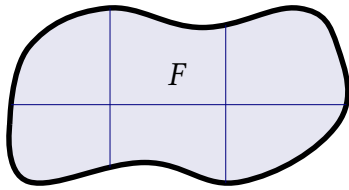


2

Cálculo II

Funciones Riemann integrables



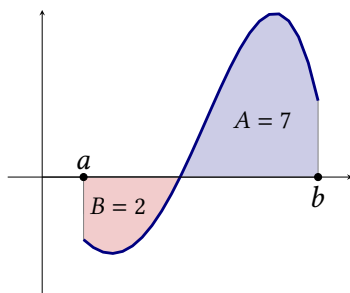
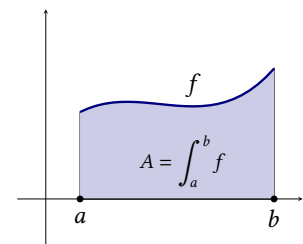
El cálculo de áreas puede simplificarse, en muchos casos, reduciéndose al estudio de regiones que tienen todos sus lados rectos salvo uno. La figura adjunta ilustra esta situación: uno de los subdominios, designado por F , presenta un único lado no recto, definido como la gráfica de una función f .

En este capítulo se estudia una forma de calcular las áreas de conjuntos de ese tipo. Se trata de la integral de Riemann: un proceso en el que se calculan sumas de áreas de rectángulos para encontrar el área total como límite de esas sumas. El método exhaustivo (que proviene de la época de la Grecia antigua) es el origen de esta idea de la integral como límite de sumas de áreas de rectángulos. La integral de Riemann permite el cálculo del área encerrada por la gráfica de una función en un intervalo, al menos para una clase muy amplia de funciones. Más adelante se verá que hay funciones que permiten hacer estos cálculos y otras que no.

Funciones integrables

Para una función no negativa $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ integrar es calcular el área subyacente a la gráfica

$$A = \int_a^b f.$$



Para funciones generales (positivas, negativas o con parte positiva y parte negativa)

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

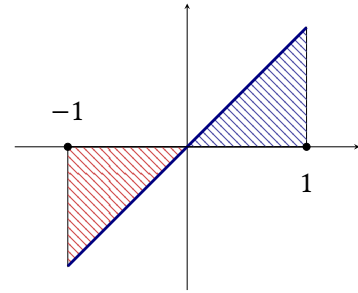
la integral mide el área que hay por encima del eje X menos el área que hay por debajo. En la figura de la izquierda la integral mide $\int_a^b f = 7 - 2 = 5$.

Hay funciones no nulas cuya integral es negativa o cero. Por ejemplo, la función

$$f : x \in [-1, 1] \longrightarrow f(x) = x$$

verifica

$$\int_{-1}^0 f = -\frac{1}{2}, \quad \int_0^1 f = \frac{1}{2}, \quad \int_{-1}^1 f = 0.$$

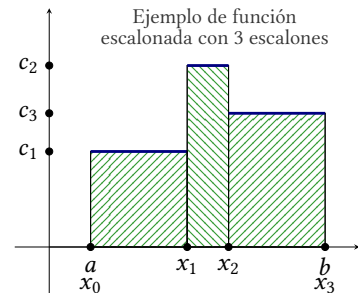


Integración de funciones constantes. Por definición, si $f : x \in [a, b] \longrightarrow f(x) = c \in \mathbb{R}$ es una función constante, la integral de f en $[a, b]$ es

$$\int_a^b f = c \cdot (b - a),$$

que es un número positivo, negativo o cero según sea c .

Integración de funciones escalonadas (o simples o constantes a trozos). Una partición de $[a, b]$ es una colección finita de puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Suele escribirse $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$. Una función escalonada (asociada a esa partición) es una función que es constante en cada intervalo (x_{j-1}, x_j) de la partición, es decir, una función $f : x \in [a, b] \longrightarrow f(x) = c_j$ si $x \in (x_{j-1}, x_j)$. Además, se añade que f sea continua por la derecha o por la izquierda en los puntos x_j de la partición. Por definición, la integral es



$$\begin{aligned} \int_a^b f &= c_1(x_1 - x_0) + c_2(x_2 - x_1) + \dots + c_n(x_n - x_{n-1}) \\ &= \sum_{j=1}^n c_j(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^n c_j \Delta_j \end{aligned}$$

Se denota por $\mathcal{E}[a, b]$ al conjunto de funciones escalonadas en $[a, b]$. Es evidente que se trata de un espacio vectorial, en el cual la integral

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\rightsquigarrow \int_a^b f \end{aligned}$$

es un funcional lineal. En otras palabras, si $f, g \in \mathcal{E}[a, b]$ entonces $\alpha f + \beta g \in \mathcal{E}[a, b]$ y además

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Además es un funcional monótono:

$$f, g \in \mathcal{E}[a, b], f \leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g,$$

donde $f \leq g$ significa que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Es fácil comprobar que si $f, g \in \mathcal{E}[a, b]$ entonces $\inf(f, g), \sup(f, g) \in \mathcal{E}[a, b]$, donde, por definición, $\inf(f, g)(x) = \inf(f(x), g(x))$ y $\sup(f, g)(x) = \sup(f(x), g(x))$.

En general, no hay ninguna relación entre los valores $\int_a^b (f \cdot g)$ y $\left(\int_a^b f\right) \cdot \left(\int_a^b g\right)$. Es fácil encontrar ejemplos en que muestren que puede darse cualquier comparación, menor, mayor o igual.

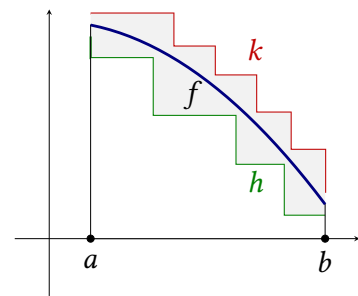
Las funciones escalonadas son la base para el cálculo de integrales de funciones más complejas, que ya no son escalonadas pero que pueden aproximarse en algún sentido por éstas.

Funciones Riemann integrables. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, es decir, existe $M > 0$ que verifica $|f(x)| < M$ para todo $x \in [a, b]$. En lo que sigue se asumirá que las funciones son acotadas, aunque a veces no se diga expresamente. Al final del tema se verá cómo proceder con funciones que no son acotadas.

Definición. Se dice que f es Riemann integrable o \mathcal{R} -integrable (o integrable en el sentido de Riemann) en $[a, b]$ si para todo $\varepsilon > 0$ existen funciones escalonadas $h, k \in \mathcal{E}[a, b]$ tales que

$$\text{a) } h \leq f \leq k \qquad \text{b) } \int_a^b (k - h) \leq \varepsilon$$

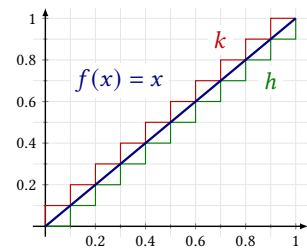
(f está encajada entre funciones escalonadas cuya diferencia en área es tan pequeña como se quiera).



Se denota mediante $\mathcal{R}[a, b]$ al conjunto de funciones Riemann integrables en $[a, b]$.

Ejemplo. Cualquier función escalonada en $[a, b]$ es Riemann integrable: si f es escalonada, entonces se eligen $h = k = f$ que verifican los apartados a) y b) anteriores.

Ejemplo. La función $f(x) = x$ es Riemann integrable en $[0, 1]$. Es un ejercicio simple comprobar cómo hay que elegir dos funciones escalonadas $h \leq f \leq k$ que verifiquen $\int_0^1 (k - h) \leq \varepsilon$ para distintos valores de ε .



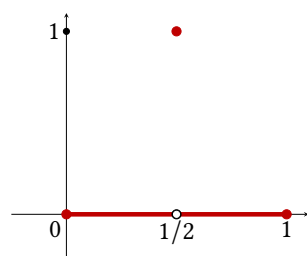
En la gráfica se muestra cómo hacerlo para $\varepsilon = 1/10$. De forma similar se hace para $\varepsilon = 1/100$, etc.

Ejemplo. La función f que vale cero en todos los puntos de $[0, 1]$ salvo $f(1/2) = 1$ es \mathcal{R} -integrable. Para esta función se eligen $h = 0$ y

$$k : x \in [0, 1] \rightarrow k(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left[\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right] \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

que verifican $h \leq f \leq k$ y además

$$\int_0^1 (k - h) = \int_0^1 k = \varepsilon$$



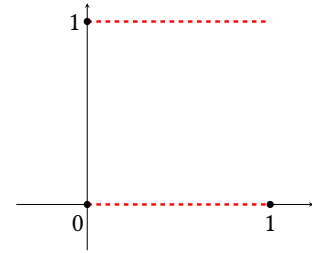
La misma idea sirve para probar que son \mathcal{R} -integrables las funciones que son constantes en un intervalo salvo en una cantidad finita de puntos, en los que la función toma valores arbitrarios.

Más adelante se verán algunas clases de funciones \mathcal{R} -integrables, como las monótonas o las continuas. Sin embargo, hay funciones sencillas que no son \mathcal{R} -integrables.

Ejemplo. La función de Dirichlet

$$f : x \in [0, 1] \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

no es \mathcal{R} -integrable en $[0, 1]$. Para comprobarlo basta observar que si h y k son funciones escalonadas en $[0, 1]$ y verifican $h \leq f \leq k$ entonces deben cumplir $h \leq 0$ y $1 \leq k$.



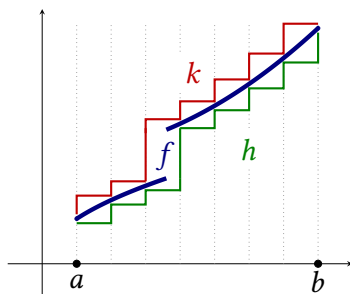
Por tanto, $h \leq 0 \leq 1 \leq k$ y entonces

$$\int_0^1 (k - h) \geq \int_0^1 1 = 1.$$

Se deduce así que f no es \mathcal{R} -integrable, no se puede integrar en el sentido de Riemann. Esta función sí es integrable en un sentido más amplio (la integral de Lebesgue) y su integral de Lebesgue vale 1.

Por otra parte, se muestran a continuación varios teoremas que garantizan la \mathcal{R} -integrabilidad de ciertas funciones.

Teorema 1. Toda función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monótona (creciente o decreciente) es \mathcal{R} -integrable.



Demostración. Sea f creciente (la prueba es similar si f es decreciente) y $\varepsilon > 0$. Al ser f monótona en $[a, b]$ se tiene que f está acotada. Sea $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ una partición de $[a, b]$ con puntos igualmente separados (equidistantes), es decir, $x_j - x_{j-1} = (b - a)/n$ para $j = 1, \dots, n$. Se elige n suficientemente grande para que cumpla $(f(b) - f(a))(b - a)/n \leq \varepsilon$. Se definen las funciones escalonadas

$$\left. \begin{aligned} h : x \in [a, b] &\longrightarrow h(x) = f(x_{j-1}) \\ k : x \in [a, b] &\longrightarrow k(x) = f(x_j) \end{aligned} \right\} \quad (\text{si } x \in (x_{j-1}, x_j]).$$

Es evidente que $h \leq f \leq k$, ya que f es creciente. Además

$$\begin{aligned} \int_a^b (k - h) &= \sum_{j=1}^n \frac{b-a}{n} (f(x_j) - f(x_{j-1})) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n (f(x_j) - f(x_{j-1})) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \dots + f(x_n) - f(x_{n-1})) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

y por tanto f es \mathcal{R} -integrable. \square

Teorema 2. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces es \mathcal{R} -integrable en $[a, b]$.

Demostración. Como f es continua en $[a, b]$, que es un conjunto compacto, entonces f está acotada. Además, f es uniformemente continua en $[a, b]$. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in [a, b], |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Sea una partición $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ tal que $x_j - x_{j-1} < \delta$ para $j = 1, 2, \dots, n$. Se consideran las funciones escalonadas

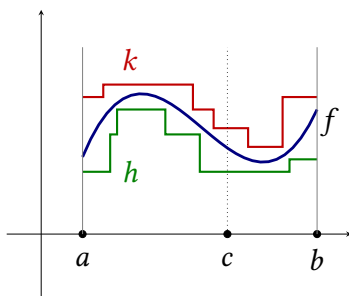
$$\left. \begin{aligned} h : x \in [a, b] &\longrightarrow h(x) = \min\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\} = m_j(f) \\ k : x \in [a, b] &\longrightarrow k(x) = \max\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\} = M_j(f) \end{aligned} \right\} \quad (\text{para } x \in [x_{k-1}, x_k]).$$

Estas funciones cumplen $h \leq f \leq k$. Esto es evidente, ya que en cada intervalo $[x_{j-1}, x_j]$ la función h es el valor mínimo de f y la función k es el valor máximo de f ; valores que se alcanzan por la continuidad de f . Como $M_j(f)$ y $m_j(f)$ se alcanzan en dos valores del intervalo $[x_{j-1}, x_j]$ (valores cuya distancia entre ellos es menor que δ), aplicando la continuidad uniforme de f se tiene $M_j(f) - m_j(f) < \varepsilon/(b - a)$. Por tanto,

$$\int_a^b (k - h) = \sum_{j=1}^n (M_j(f) - m_j(f)) \Delta_j \leq \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{j=1}^n \Delta_j = \frac{\varepsilon}{b - a} (b - a) = \varepsilon$$

y se termina la demostración. \square

Teorema 3. Una función es \mathcal{R} -integrable en un intervalo si y sólo si lo es en cada subintervalo: si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada y $a < c < b$, entonces $f \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow f \in \mathcal{R}[a, c] \cap \mathcal{R}[c, b]$.



La demostración es muy sencilla. Al dividir el intervalo en dos subintervalos $[a, c]$ y $[c, b]$, las funciones escalonadas se dividen en dos trozos, uno en cada subintervalo. Y recíprocamente: funciones escalonadas en cada subintervalo pueden unirse para formar otra definida en todo el intervalo.

Una función es \mathcal{R} -integrable si se puede *rodear adecuadamente* con funciones escalonadas. Esto se puede hacer en un intervalo si y sólo si se puede hacer en cada uno de sus subintervalos.

Estos resultados prueban que las funciones elementales son \mathcal{R} -integrables en los intervalos en los que sean continuas. Por ejemplo, la función $f(x) = 1/x$ es \mathcal{R} -integrable en $[0.2, 4]$. También son \mathcal{R} -integrables las funciones acotadas y continuas a trozos. Y aquellas que a trozos son continuas o monótonas.

Ejemplo. Cualquier función continua (o creciente) en $[a, c]$ y en $[c, b]$ es \mathcal{R} -integrable en $[a, b]$. Esto prueba que las funciones elementales a trozos son integrables. Por ejemplo, para las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \in [-1, 3] \\ -12 & \text{si } x \in (3, 5) \\ \text{sen } x & \text{si } x \in [5, 6] \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 \text{sen}(1/x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

se tiene que $f \in \mathcal{R}[-1, 6]$ y $g \in \mathcal{R}[0, 2]$.

Sin embargo, hay funciones que no se pueden integrar, como en la función de Dirichlet. La integral de Lebesgue, que no se va a estudiar en este curso, permite el cálculo del área subyacente para

todas las funciones Riemann integrables y para muchas más en las que la integral de Riemann no puede calcularse. Esta integral de Lebesgue extiende a la integral de Riemann y puede hallar integrales de funciones que no son Riemann integrables. Al coincidir ambas integrales en las funciones elementales se habla de «la integral», dando a entender que sólo hay un proceso para el cálculo de integrales.

Teorema 4. Para una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, son equivalentes

a) f es \mathcal{R} -integrable en $[a, b]$, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existen funciones escalonadas $h, k \in \mathcal{E}[a, b]$ tales que $h \leq f \leq k$ y $\int_a^b (k - h) \leq \varepsilon$.

$$b) \sup \left\{ \int_a^b h : h \in \mathcal{E}[a, b], h \leq f \right\} = \inf \left\{ \int_a^b k : k \in \mathcal{E}[a, b], f \leq k \right\}$$

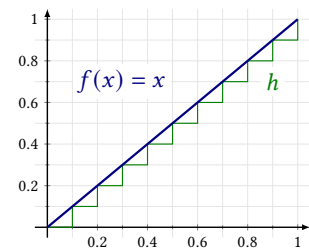
En este caso, al número real que aparece en el apartado b) se le llama integral de f en $[a, b]$ y se escribe

$$\int_a^b f = \sup \left\{ \int_a^b h : h \in \mathcal{E}[a, b], h \leq f \right\} = \inf \left\{ \int_a^b k : k \in \mathcal{E}[a, b], f \leq k \right\}.$$

Ejemplo. Para la función $f(x) = x$ en el intervalo $[0, 1]$, se puede elegir la partición $P = \{0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1\}$ y la función escalonada h verifica

$$\int_0^1 h = 0 + \frac{1}{10^2} + \frac{2}{10^2} + \dots + \frac{9}{10^2} = \frac{1}{100} (1+2+\dots+9) = \frac{1}{100} \cdot \frac{9 \cdot 10}{2}$$

Estos valores de la integral de h se van acercando a $1/2$ a medida que la partición tiene más puntos.



Corolario. Si $a < c < b$, entonces $f \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow f \in \mathcal{R}[a, c] \cap \mathcal{R}[c, b]$ (esto ya se ha visto antes), y además en ese caso,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Demostración. Si h y k son funciones escalonadas con $h \leq f \leq k$, entonces

$$\int_a^b (k - h) = \int_a^c (k - h) + \int_c^b (k - h).$$

El sumando de la izquierda tiende a cero si y sólo si los dos de la derecha tienden a cero. \square

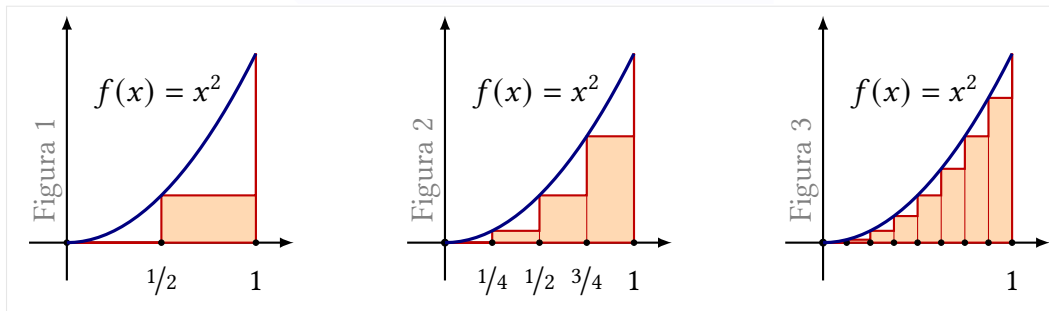
Definición. Si $a < b$ se define $\int_b^a f = -\int_a^b f$ y $\int_a^a f = 0$. Por tanto, para $a < c < b$ el teorema anterior puede escribirse como

$$\int_a^b f + \int_b^c f + \int_c^a f = 0.$$

Cálculo de la integral. Hay varios métodos que permiten aproximar el valor de la integral $\int_a^b f$. El teorema anterior dice que es el mayor valor de todas las integrales de funciones escalonadas que

están por debajo de f . También es el menor valor de todas las integrales de funciones escalonadas que están por encima de f . Una función Riemann integrable tiene la propiedad de que ambos procesos llevan al mismo número. Lógicamente, la elección de tales funciones escalonadas (por debajo de la función o por encima de ella) debe ser acertada, es decir, lo más cerca posible de la función.

Ejemplo. La función $f(x) = x^2$ es Riemann integrable en $[0, 1]$ (bien por ser creciente, bien por ser continua). Por tanto se puede calcular su integral. Si se elige una función escalonada por debajo de f , definida mediante la partición $\{0, 1/2, 1\}$, como se muestra en la figura 1,



se obtiene una función escalonada cuya integral vale $1/8$, y así

$$\int_0^1 x^2 \geq 1/8 = 0.125.$$

En la figura 2 se muestra una función escalonada que está por debajo de f y definida con cuatro escalones, dados por los puntos $\{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$. Su integral vale $7/32$ (es la suma de áreas de esos rectángulos). Por tanto

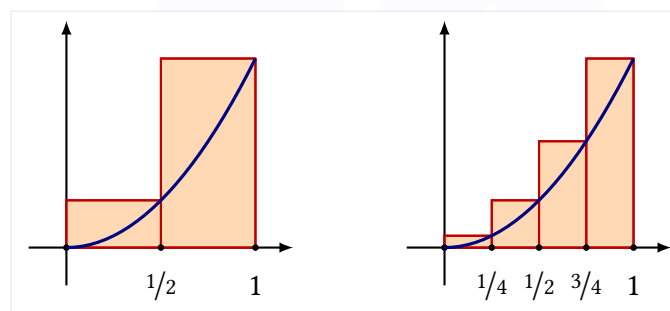
$$\int_0^1 x^2 \geq 7/32 = 0.21875.$$

Se puede continuar este proceso, como en la figura 3 en la que se utilizan 8 escalones. Se obtiene una función escalonada cuya integral es $35/128$, y entonces

$$\int_0^1 x^2 \geq 35/128 = 0.2734375.$$

Haciendo más divisiones del intervalo se van obteniendo funciones escalonadas cuyas integrales valen $6567/20000 = 0.32835$, con una división 100 puntos del intervalo, y $665667/2000000 = 0.3328335$, con una división de 1000 puntos del intervalo. La integral de la función $f(x) = x^2$ es el mayor valor posible de todos estos que se van obteniendo.

También se puede calcular $\int_0^1 f$ con funciones escalonadas por encima de f . De todos los valores que se obtengan, la integral de la función $f(x) = x^2$ es el menor de todos.



Ambos procesos (integrales por defecto o por exceso) llevan a la misma conclusión cuando la función es Riemann integrable. En este ejemplo se llega a

$$\int_0^1 x^2 = 1/3.$$

Ejemplo. Para la función f de Dirichlet vista anteriormente se obtiene

$$\sup \left\{ \int_a^b h : h \in \mathcal{E}[a, b], h \leq f \right\} = 0, \quad \inf \left\{ \int_a^b k : k \in \mathcal{E}[a, b], f \leq k \right\} = 1,$$

y por tanto no es una función Riemann integrable.

Ejemplo. La función f que vale cero en todos los puntos de $[0, 1]$, salvo $f(1/2) = 1$, verifica

$$\sup \left\{ \int_a^b h : h \in \mathcal{E}[a, b], h \leq f \right\} = \inf \left\{ \int_a^b k : k \in \mathcal{E}[a, b], f \leq k \right\} = 0,$$

y así $\int_0^1 f = 0$.

Ya se verá más adelante que para una función f \mathcal{R} -integrable se pueden elegir funciones escalonadas intermedias, no necesariamente por debajo o por encima de f , y la integral de f es el paso al límite de estas integrales. Al elegir puntos de una partición equidistante $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ se tiene

$$\int_a^b f = \lim_n \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f(x_j) = \lim_n (b-a) \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

(el área es el paso al límite del cálculo de la base por la media de las alturas). Por comodidad se eligen los puntos equidistantes, y así

$$a = x_0 < x_1 = x_0 + \frac{b-a}{n} < x_2 = x_1 + \frac{b-a}{n} = x_0 + 2 \cdot \frac{b-a}{n} < \dots < x_n = x_0 + n \cdot \frac{b-a}{n} = b.$$

Ejemplo. Para calcular $\int_0^\pi \text{sen } x^2$ se eligen puntos de una partición de $[0, \pi]$

$$0 = x_0 < \frac{\pi}{10} < \frac{2\pi}{10} < \dots < \frac{9\pi}{10} < \pi$$

y así

$$\int_0^\pi \text{sen } x^2 \simeq (\pi - 0) \frac{\text{sen} \left(\frac{\pi}{10}\right)^2 + \text{sen} \left(\frac{2\pi}{10}\right)^2 + \dots + \text{sen} \left(\frac{9\pi}{10}\right)^2 + \text{sen } \pi^2}{10} = 0.654789 \dots$$

Esta aproximación será poco ajustada, ya que se han utilizado sólo diez valores. Mejor aproximación se consigue eligiendo más puntos, por ejemplo, $\frac{\pi}{100}, \frac{2\pi}{100}, \dots, \pi$, y se tiene

$$\int_0^\pi \text{sen } x^2 \simeq (\pi - 0) \frac{\text{sen} \left(\frac{\pi}{100}\right)^2 + \text{sen} \left(\frac{2\pi}{100}\right)^2 + \dots + \text{sen} \left(\frac{99\pi}{100}\right)^2 + \text{sen } \pi^2}{100} = 0.765425 \dots$$

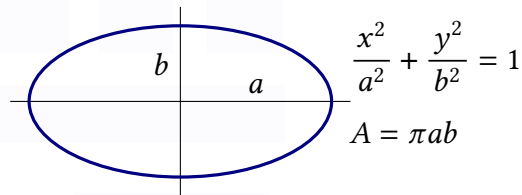
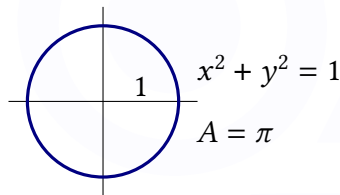
Para 1000 puntos ($n = 1000$) se obtiene el valor $\int_0^\pi \sin x^2 \approx 0.771971 \dots$. Al añadir más puntos cada vez se van obteniendo más cifras decimales exactas,

$$\int_0^\pi \sin x^2 \approx 0.7726517126900656532010918 \dots$$

Con este método se pueden calcular integrales como

$$\int_0^1 e^x \operatorname{tg} x = 1.265376 \dots \quad \int_\pi^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = -0.433785 \dots$$

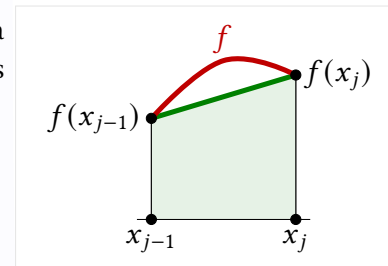
También se puede calcular el área de un círculo (centrado en el origen con radio 1) de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ o el de una elipse de semiejes a y b de ecuación $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.



Algo de cálculo numérico: regla de los trapecios y regla de Simpson. Para hacer el cálculo de la integral $\int_a^b f$, donde f es una función \mathcal{R} -integrable, existen más métodos, como la regla de los trapecios o la regla de Simpson. En ambas se elige una partición $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ de puntos equidistantes ($x_j - x_{j-1} = (b - a)/n$). Lógicamente, la cantidad de puntos aumentará para obtener más precisión.

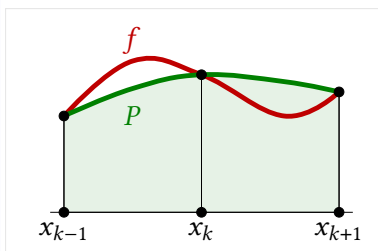
En la regla de los trapecios, en cada intervalo $[x_{j-1}, x_j]$ de la partición se mide el área del trapecio cuya base es $[x_{j-1}, x_j]$ y sus dos alturas son $f(x_{j-1})$ y $f(x_j)$. Este área es

$$\frac{b - a}{n} \cdot \frac{f(x_{j-1}) + f(x_j)}{2}$$



La regla de los trapecios consiste en tomar como aproximación de $\int_a^b f$ la suma de esas áreas de todos los trapecios

$$\int_a^b f \approx \frac{b - a}{2n} \cdot [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$



En la regla de Simpson, en cada dos intervalos consecutivos $[x_{k-1}, x_k]$ y $[x_k, x_{k+1}]$ se considera el polinomio P de grado 2 que pasa por los puntos $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, $(x_k, f(x_k))$ y $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$. Este polinomio encierra en $[x_{k-1}, x_{k+1}]$ un área igual a

$$\frac{b - a}{3n} \left[f(x_{k-1}) + 4f\left(\frac{x_{k-1} + x_{k+1}}{2}\right) + f(x_{k+1}) \right]$$

La regla de Simpson consiste en tomar como aproximación de $\int_a^b f$ la suma de esas áreas encerradas por los polinomios de grado 2, y se obtiene (en este proceso se elige n par)

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{3n} \cdot \left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n) \right]$$

Ver, por ejemplo, «Fórmulas de Newton–Cotes» en alguna página como Wikipedia. Estos métodos se estudian en Análisis Numérico y permiten aproximar las integrales conociendo además la magnitud del error que se comete.

Sumas de Riemann y propiedades de la integral

Dadas dos particiones $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ y $P' = \{a = x'_0 < x'_1 < \dots < x'_n = b\}$ de $[a, b]$, se dice que P es más fina que P' si $P' \subset P$, es decir todos los puntos de P' están en P . Se escribe también $P' \leq P$. Se denotará por $\mathcal{P}[a, b]$ al conjunto de particiones de $[a, b]$.

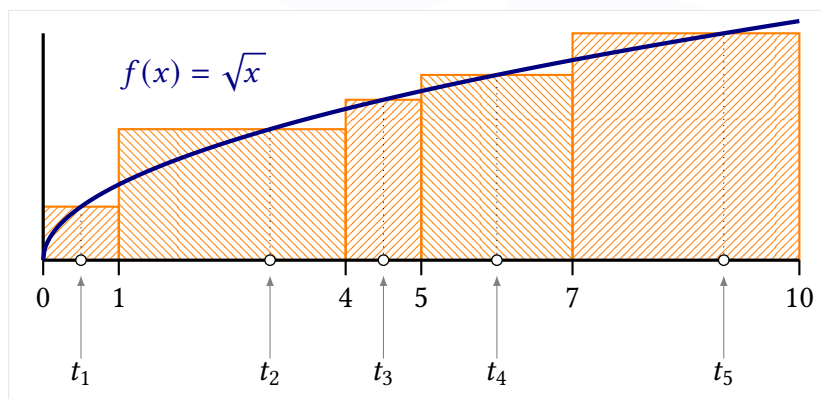
Definición (suma de Riemann). Dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, se llama suma de Riemann de f relativa a la partición P a cualquier suma del tipo

$$\begin{aligned} S(f, P) &= f(t_1) \cdot (x_1 - x_0) + f(t_2) \cdot (x_2 - x_1) + \dots + f(t_n) \cdot (x_n - x_{n-1}) \\ &= f(t_1) \cdot \Delta_1 + f(t_2) \cdot \Delta_2 + \dots + f(t_n) \cdot \Delta_n \\ &= \sum_{k=1}^n f(t_k) \cdot \Delta_k = \sum_P f(t_k) \cdot \Delta_k, \end{aligned}$$

donde $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$ y cada t_k es un punto del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

Cualquier suma de ese tipo se llama suma de Riemann, y hay tantas como elecciones se hagan de los puntos x_k que forman los intervalos de la partición y de los puntos t_k que se elijan dentro de estos intervalos.

Ejemplo: Para la función $f(x) = \sqrt{x}$, definida en el intervalo $[0, 10]$, se considera la partición $P = \{0, 1, 4, 5, 7, 10\}$. En cada uno de los intervalos $[0, 1]$, $[1, 4]$, $[4, 5]$, $[5, 7]$ y $[7, 10]$ de la partición se elige un valor, por ejemplo $t_1 = 0.5$, $t_2 = 3$, $t_3 = 4.5$, $t_4 = 6$, $t_5 = 9$, como se muestra en la gráfica.



La suma de Riemann que se obtiene es (suma de bases por alturas)

$$\begin{aligned} S(f, P) &= \sum_{k=1}^5 f(t_k) \Delta_k \\ &= \sqrt{0.5} \cdot (1 - 0) + \sqrt{3} \cdot (4 - 1) + \sqrt{4.5} \cdot (5 - 4) + \sqrt{6} \cdot (7 - 5) + \sqrt{9} \cdot (10 - 7) \\ &\approx 21.92355903 \dots \end{aligned}$$

Definición (suma inferior y suma superior). Si en cada uno de los intervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de la partición se elige $m_k(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, se llama suma inferior de Riemann relativa a la partición P al valor

$$L(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k(f) \Delta_k = \sum_P m_k(f) \Delta_k,$$

(L es la abreviatura de lower.)

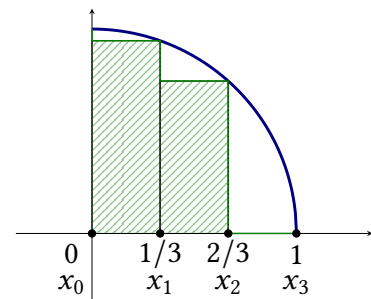
En el caso opuesto, si $M_k(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, la suma superior de Riemann relativa a esa partición P es

$$U(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k(f) \Delta_k = \sum_P M_k(f) \Delta_k,$$

(U es la abreviatura de upper.)

Ejemplo. Se considera la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ en $[0, 1]$, cuya gráfica puede verse a la derecha. Se trata de la cuarta parte de una circunferencia de radio 1 centrada en el origen. Sea la partición $P = \{x_0 = 0, x_1 = 1/3, x_2 = 2/3, x_3 = 1\}$ formada por 3 intervalos de igual tamaño (todos miden $1/3$ de longitud).

Para calcular la suma inferior $L(f, P)$ hay que encontrar en cada intervalo el punto en el que f alcanza el mínimo: es el punto $1/3$ en $[0, 1/3]$; el punto $2/3$ en $[1/3, 2/3]$, y el punto 1 en $[2/3, 1]$. Por tanto,



$$\begin{aligned} L(f, P) &= f(1/3) \cdot (x_1 - x_0) + f(2/3) \cdot (x_2 - x_1) + f(1) \cdot (x_3 - x_2) \\ &= \frac{1}{3} \left(\sqrt{1 - 1/9} + \sqrt{1 - 4/9} \right) = \frac{1}{9} \left(\sqrt{8} + \sqrt{5} \right) \approx 0.562721 \dots \end{aligned}$$

La suma superior se consigue eligiendo en cada intervalo de la partición el valor en el que f alcanza el máximo, y así

$$\begin{aligned} U(f, P) &= f(0) \cdot (x_1 - x_0) + f(1/3) \cdot (x_2 - x_1) + f(2/3) \cdot (x_3 - x_2) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \sqrt{1 - 1/9} + \sqrt{1 - 4/9} \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \left(\sqrt{8} + \sqrt{5} \right) \approx 0.896055 \dots \end{aligned}$$

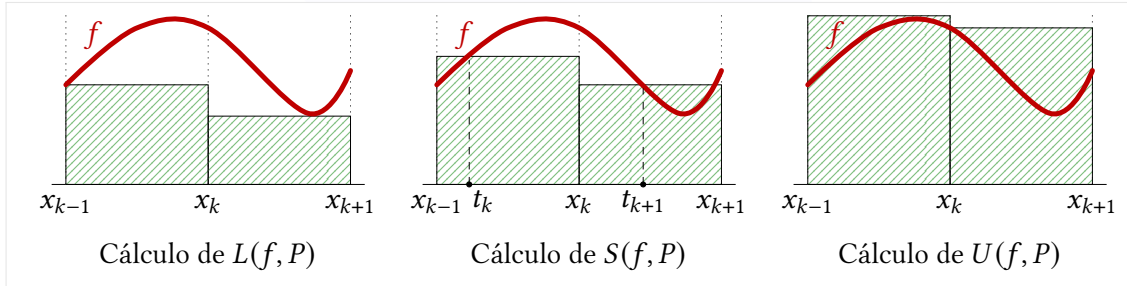
Cualquier suma de Riemann que se haga con esta partición estará comprendida entre estos dos valores. Si se eligen los puntos $t_1 = 0.1$, $t_2 = 0.5$ y $t_3 = 0.87$ (cada uno está en unos de los intervalos, aunque la elección es arbitraria) entonces

$$\begin{aligned} S(f, P) &= f(0.1) \cdot (x_1 - x_0) + f(0.5) \cdot (x_2 - x_1) + f(0.87) \cdot (x_3 - x_2) \\ &= \frac{1}{3} \left(\sqrt{1 - 0.1^2} + \sqrt{1 - 0.5^2} + \sqrt{1 - 0.87^2} \right) \approx 0.784688 \dots \end{aligned}$$

Ejercicio. Comprobar que para la función definida a trozos $f(x) = 1+x$ en $[0, 3]$, y $f(x) = 6-x$ en $(3, 5]$, y la partición $P = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ del intervalo $[0, 5]$ se tiene $L(f, P) = 9$ y $U(f, P) = 14$.

Relación entre las distintas sumas de Riemann. Es evidente que para cualquier función f y para cualquier partición, sea cual sea la elección de los puntos t_k de la partición, se tiene $m_k(f) \leq f(t_k) \leq M_k(f)$, y por tanto

$$L(f, P) \leq S(f, P) \leq U(f, P).$$



Cada suma de Riemann verifica $S(f, P) \in [L(f, P), U(f, P)]$. Para cada partición $P \in \mathcal{P}[a, b]$ la suma inferior $L(f, P)$ corresponde al área que deja encerrada la mayor función escalonada h que está por debajo de f , es decir, $h \leq f$. La suma superior $U(f, P)$ es el área de la menor función escalonada k que verifica $f \leq k$. Por tanto,

$$\sup \{ L(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b] \} = \sup \left\{ \int_a^b h : h \in \mathcal{E}[a, b], h \leq f \right\},$$

$$\inf \{ U(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b] \} = \inf \left\{ \int_a^b k : k \in \mathcal{E}[a, b], f \leq k \right\}.$$

Cambiando entonces «integrales de funciones escalonadas» por «sumas de Riemann» se puede reescribir el resultado ya visto sobre funciones Riemann integrables:

Teorema. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Son equivalentes

- f es \mathcal{R} -integrable en $[a, b]$, es decir, existe $\int_a^b f$.
- Existe un número real $\int_a^b f$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P_0 que verifica $\left| S(f, P) - \int_a^b f \right| < \varepsilon$ para $P \geq P_0$. Es decir, las sumas $S(f, P)$ convergen cuando se va afinando la partición, y su límite es $\int_a^b f$.
- Para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P verificando $\left| U(f, P) - L(f, P) \right| < \varepsilon$.
- $\sup \{ L(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b] \} = \inf \{ U(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b] \} = \int_a^b f$.

Propiedades de la integral de Riemann

Todo lo visto hasta ahora permite probar la mayoría de estos resultados sobre la integral, bien utilizando funciones escalonadas, bien utilizando sumas de Riemann.

1 El conjunto $\mathcal{R}[a, b]$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{R} y $f \in \mathcal{R}[a, b] \rightarrow \int_a^b f \in \mathbb{R}$ es un funcional lineal. Esto quiere decir que si $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}[a, b]$ y

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

2 La integral es un funcional monótono: si $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ y $f \leq g$, entonces

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

3 Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y $P, P' \in \mathcal{P}[a, b]$, entonces

$$m(f) \cdot (b - a) \leq L(f, P) \leq \int_a^b f \leq U(f, P') \leq M(f) \cdot (b - a),$$

donde $m(f) = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ y $M(f) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$.

4 Si $a < c < b$, entonces $f \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow f \in \mathcal{R}[a, c] \cap \mathcal{R}[c, b]$, y en este caso se tiene

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

5 Si $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ (funciones acotadas) entonces $f \cdot g \in \mathcal{R}[a, b]$. Además, salvo casos muy concretos, $\int_a^b f \cdot g$ no coincide con $\left(\int_a^b f\right) \cdot \left(\int_a^b g\right)$.

Más adelante se verán ejemplos de funciones no acotadas con $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ y $f \cdot g \notin \mathcal{R}[a, b]$.

6 Si $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ entonces $\inf(f, g)$, $\sup(f, g)$, f_+ , f_- y $|f|$ también son \mathcal{R} -integrables.

Por definición, f_+ y f_- son las funciones positivas

$$f_+ = \sup(f, 0), \quad f_- = \sup(-f, 0),$$

y se tiene $f = f_+ - f_-$ y $|f| = f_+ + f_-$.

Como además $\pm f \leq |f|$, y la integral es un operador monótono, se tiene la *desigualdad triangular*:

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

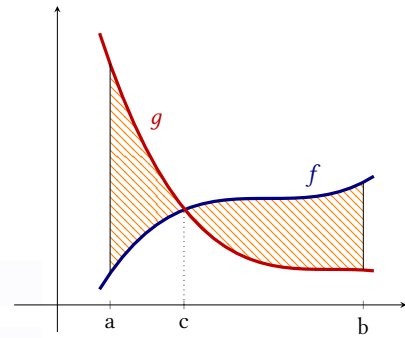
El nombre de desigualdad triangular viene al caso ya que la integral es una suma (de Riemann) llevada al límite. Esta propiedad dice que el valor absoluto de la suma es menor o igual que la suma de valores absolutos, en clara similitud con la desigualdad triangular de números $|x+y| \leq |x|+|y|$.

7 **Área encerrada entre funciones.** Si $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones acotadas Riemann integrables, entonces el área encerrada entre ellas en dicho intervalo es

$$\int_a^b |f - g|.$$

Por ejemplo, para funciones como las de la gráfica de la derecha

$$\int_a^b |f - g| = \int_a^c (g - f) + \int_c^b (f - g).$$



Es fácil comprobar que el área encerrada por las funciones $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \cos x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ es $4\sqrt{2}$.

8 **Valor medio de una función.** Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$, entonces existe un valor $\eta \in [m(f), M(f)]$ que verifica

$$\int_a^b f = \eta \cdot (b - a).$$

Si f es continua en $[a, b]$ (por tanto es acotada y $f \in \mathcal{R}[a, b]$) entonces existe $\xi \in [a, b]$ tal que $f(\xi) = \eta$, es decir,

$$\int_a^b f = f(\xi) \cdot (b - a).$$

Demostración. Ya se ha visto que

$$m(f) \cdot (b - a) \leq \int_a^b f \leq M(f) \cdot (b - a),$$

es decir,

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f = \eta \in [m(f), M(f)].$$

Si además f es continua, entonces f alcanza todos los valores comprendido entre $m(f)$ y $M(f)$ y entonces existe $\xi \in [a, b]$ tal que $f(\xi) = \eta$. \square

Definición. Al número

$$\eta = \frac{1}{b - a} \int_a^b f$$

se le llama valor medio o promedio de f en $[a, b]$. A veces se escribe como $\bar{f}_{[a,b]}$. El teorema asegura la existencia de este valor $\eta \in [m(f), M(f)]$. Además es un valor que alcanza la función si ésta es continua, es decir, $\eta = f(\xi)$ para algún $\xi \in [a, b]$.

Ejemplos: 1) el promedio de la función $f(x) = x^2$ en $[0, 1]$ es

$$\bar{f}_{[0,1]} = \frac{1}{1 - 0} \int_0^1 x^2 = \frac{1}{3}.$$

Este valor se alcanza para $c = 1/\sqrt{3}$, ya que $f(c) = 1/3$.

2) el valor medio de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$ es

$$\bar{f}_{[0,\pi]} = \frac{1}{\pi - 0} \int_0^\pi \operatorname{sen} x = \frac{2}{\pi}.$$

Este valor se alcanza: para algún $c \in [0, \pi]$ se cumple $\operatorname{sen} c = 2/\pi$.

3) la función f que vale 0 en $[0, 1]$ y 1 en $[1, 3]$ tiene un promedio de $2/3$. Es un valor que nunca alcanza la función: en ningún valor x se tiene $f(x) = 2/3$.

4) se puede calcular la altura media de la semicircunferencia superior de radio 1 centrada en el origen. Para ello, basta considerar la semicircunferencia como la gráfica de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ en $[-1, 1]$ y promediar esa función en ese intervalo. El valor medio (la altura media en este caso) es

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \pi/4 \approx 0.7853981633 \dots$$

5) se puede considerar el trozo de la parábola $y = 1 - x^2$ que está por encima del eje X y calcular la distancia media al origen. Cada punto (x, y) de ese trozo de la parábola está a distancia $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ del origen. Además $y = 1 - x^2$ y $-1 \leq x \leq 1$. Por tanto, se trata de promediar la función $d(x, y) = \sqrt{x^2 + (1 - x^2)^2}$ en $[-1, 1]$. Esa distancia media es $0.9297712 \dots$

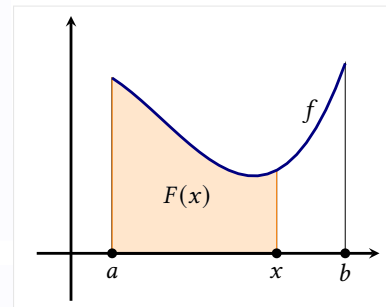
Teoremas fundamentales del cálculo integral

En este apartado se estudian resultados que relacionan el cálculo integral con el diferencial. No debe confundirse el cálculo de áreas con el cálculo de primitivas, aunque en algún resultado parece decirse todo lo contrario.

Teorema 1 (primer teorema fundamental del cálculo).

Sea $f \in \mathcal{R}[a, b]$ acotada. Entonces, la función $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por la expresión $F(x) = \int_a^x f$, verifica

- F es continua en $[a, b]$.
- F es diferenciable en cada punto $c \in [a, b]$ en el que f sea continua, y además $F'(c) = f(c)$.



[En la definición de F se tiene que $F(a) = \int_a^a f = 0$.]

Demostración. a) Sea $x \in [a, b]$. Se trata de ver que F es continua en ese punto. Esto es sencillo, ya que

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow x} |F(y) - F(x)| &= \lim_{y \rightarrow x} \left| \int_a^y f - \int_a^x f \right| = \lim_{y \rightarrow x} \left| \int_x^y f \right| \leq \lim_{y \rightarrow x} \int_x^y |f| \\ &\leq \lim_{y \rightarrow x} M(|f|) \cdot |x - y| = 0, \end{aligned}$$

(donde $M(|f|) = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$). Como consecuencia, $\lim_{y \rightarrow x} F(y) - F(x) = 0$, y por tanto $\lim_{y \rightarrow x} F(y) = F(x)$. Eso dice que F es continua en x .

b) Si además f es continua en c , aplicando el teorema del valor medio del cálculo integral se tiene (para $x > c$; en el otro caso es idéntico)

$$\frac{F(x) - F(c)}{x - c} = \frac{\int_a^x f - \int_a^c f}{x - c} = \frac{\int_c^x f}{x - c} = \eta = \bar{f}_{[c,x]} \quad (\text{valor medio de } f \text{ en } [c, x]).$$

Ya se ha visto que $\eta \in [\inf f_{[c,x]}, \sup f_{[c,x]}]$. Además, f es continua en c , es decir, $f(x) \rightarrow f(c)$ si $x \rightarrow c$. Eso hace que $\inf f_{[c,x]} \rightarrow f(c)$ y que $\sup f_{[c,x]} \rightarrow f(c)$. Por tanto $\eta \rightarrow f(c)$. En resumen,

$$F'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = f(c),$$

de donde se obtiene que F es diferenciable en c y $F'(c) = f(c)$. \square

Nota. En la demostración ha aparecido una propiedad de la función F : verifica la desigualdad $|F(y) - F(x)| \leq M \cdot |y - x|$, donde $M = M(|f|)$. Una función que cumple esta propiedad se dice que es lipschitziana. Con esta desigualdad se prueba fácilmente que F también es uniformemente continua. Al cumplirse

$$|F(y) - F(x)| \leq M \cdot |x - y|$$

para $x, y \in [a, b]$, basta elegir $\delta = \varepsilon/M$ para obtener la continuidad (o la continuidad uniforme).

Definición. Se dice que $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una primitiva de $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si F es diferenciable en $[a, b]$ y $F'(x) = f(x)$ para todo x .

Por ejemplo, $F(x) = x^2 - 6$ es una primitiva de $f(x) = 2x$ en cualquier intervalo $[a, b]$. También $G(x) = x^2 + 45$ es una primitiva de f .

El apartado b) del teorema anterior dice que si f es continua en $[a, b]$ entonces f tiene primitiva, que es

$$F(x) = \int_a^x f \quad (\text{con } F(a) = 0)$$

$$F(x) = 7 + \int_a^x f \quad (\text{con } F(a) = 7)$$

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f \quad (\text{con } F(a) \text{ a elegir})$$

Esto dice que una primitiva de f es la función F cuya expresión verifica

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f \quad (\forall x \in [a, b]).$$

Ejemplo. La función

$$f(x) = \frac{(e^{\sin x} \cos e^x)}{\sqrt{8 + x^4}} + \frac{\log(x^2 - 20)}{x}$$

tiene primitiva en $[5, 12]$. Esa primitiva es

$$F(x) = \int_5^x f = \int_5^x \left(\frac{(e^{\sin t} \cos e^t)}{\sqrt{8 + t^4}} + \frac{\log(t^2 - 20)}{t} \right) dt.$$

Una función que es continua, verifica $F(5) = 0$, y $F'(x) = f(x)$ para $x \in [5, 12]$.

Ejemplo (una función no continua que tiene primitiva). Como ya se ha visto en Cálculo I, la función

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es derivable en todo \mathbb{R} , y su derivada

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

no es continua (ya que no es continua en 0). En este ejemplo, f es no continua pero tiene primitiva. Además, f es Riemann integrable en cada intervalo $[a, b]$ de \mathbb{R} . [En cualquier caso, para ser la derivada de alguna función en un intervalo se debe cumplir el teorema del valor intermedio de las derivadas. Una función que tenga una discontinuidad de salto no puede tener primitiva.]

Ejemplo. La función $f(x) = e^x \operatorname{tg} x$ es continua en $[0, 1]$. Por tanto tiene primitiva F , cuya expresión es

$$F(x) = \int_0^x e^t \operatorname{tg} t \, dt$$

Esta función no es elemental y esto es todo lo que se puede decir de ella, de momento. Se escribe dt para decir cuál es el argumento (la variable t) de la función cuya área se va a calcular. La otra variable x es de la función F .

Ejemplo. También es continua en $[0, 1]$ la función $f(x) = x$. Su primitiva es

$$F(x) = \int_0^x t \, dt = \frac{x^2}{2},$$

ya que es el área de un triángulo de base x y altura x .

Ejemplo. La función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

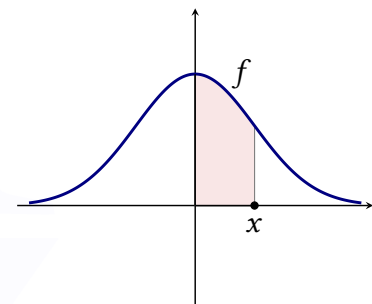
se conoce como función de densidad de la distribución normal $N(0, 1)$ de media 0 y desviación típica 1. Es una función simétrica cuya área total es igual a 1, es decir,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = 1.$$

La función (de distribución, como se conoce en Estadística)

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} \, dt$$

no es elemental. Para cada $x \geq 0$ el valor de $F(x)$ es $F(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x f$, y esta integral es el área marcada en la gráfica anterior. Estos valores suelen aparecer en tablas que permiten conocer $F(x)$ para ciertos $x \geq 0$. Como consecuencia de simples argumentos de simetría se puede conocer además $F(x)$ para $x \leq 0$.



El teorema anterior dice que este proceso $F(x) = \int_a^x f$ de «acumular áreas» es posible siempre que f sea \mathcal{R} -integrable. Además, si f es continua, se consigue una primitiva de ella. El siguiente teorema completa este resultado.

Teorema 2 (regla de Barrow o segundo teorema fundamental del cálculo). Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ tiene primitiva F en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Demostración. Por hipótesis, $F'(x) = f(x)$ en cada $x \in [a, b]$. Sea $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ una partición de $[a, b]$. Entonces

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \dots + F(x_1) - F(x_0) \\ &= F'(t_n)(x_n - x_{n-1}) + F'(t_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + F'(t_1)(x_1 - x_0) \\ &= f(t_n)\Delta x_n + f(t_{n-1})\Delta x_{n-1} + \dots + f(t_1)\Delta x_1 \\ &= S(f, P) \quad (\text{es una suma de Riemann}). \end{aligned}$$

En la segunda igualdad se ha utilizado el teorema del valor medio, y así por ejemplo $F(x_n) - F(x_{n-1}) = F'(t_n)(x_n - x_{n-1}) = F'(t_n)\Delta x_n$ para algún $t_n \in [x_{n-1}, x_n]$. Similarmente para el resto de intervalos de la partición. En la tercera igualdad se utiliza la hipótesis $F'(t_n) = f(t_n)$.

En total $F(b) - F(a) = S(f, P)$ es una suma de Riemann, y así $L(f, P) \leq F(b) - F(a) \leq U(f, P)$. Y esto ocurre para cualquier partición P . Como $f \in \mathcal{R}[a, b]$, al afinar la partición se tiene que $L(f, P)$ y $U(f, P)$ convergen ambas a $\int_a^b f$, es decir:

$$\begin{array}{ccc} & S(f, P) & \\ & \parallel & \\ L(f, P) & \leq F(b) - F(a) \leq & U(f, P) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \int_a^b f & \end{array}$$

Como consecuencia, $F(b) - F(a) = \int_a^b f$. □

Un corolario evidente de esta regla de Barrow: ya se ha probado que si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y $a < x < b$ entonces $f \in \mathcal{R}[a, x]$. Por tanto, en este último intervalo se tiene $\int_a^x f = F(x) - F(a)$, es decir

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f.$$

Resumen de los teoremas fundamentales

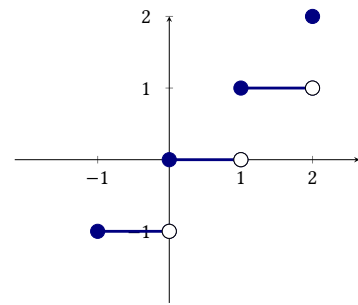
$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x), \quad \int_a^b \frac{d}{dx} f(x) dx = f(b) - f(a).$$

Ejemplo. La función «parte entera»

$$E(x) = [\text{mayor número entero } \leq x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$$

en $[-1, 2]$ es una función escalonada (y así es \mathcal{R} -integrable)

$$E(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-1, 0) \\ 0 & \text{si } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{si } x \in [1, 2) \\ 2 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$



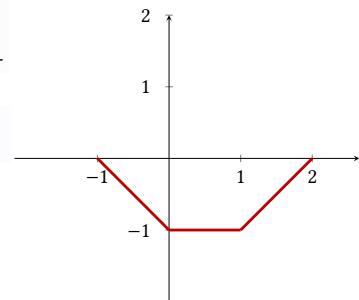
Se puede calcular la función $F : x \in [-1, 2] \rightarrow F(x) = \int_{-1}^x E$, que es continua.

La función E no tiene primitiva en $[-1, 2]$ ya que tiene discontinuidad de salto, en cambio sí tiene primitiva definida a trozos.

Si $x \in [-1, 0)$ entonces $F(x) = \int_{-1}^x E = -x - 1$. Si $x \in [0, 1)$

entonces $F(x) = \int_{-1}^x E = \int_{-1}^0 E + \int_0^x E = -1$. Si $x \in [1, 2]$ entonces

$$F(x) = \int_{-1}^x E = \int_{-1}^1 E + \int_1^x E = x - 2.$$



Otra forma de calcular F es escribiendo en cada trozo la primitiva de E y hallando las constantes que vayan apareciendo para que $F(-1) = 0$ y F sea continua (la última constante C_4 se calcula por continuidad):

$$F(x) = \begin{cases} -x + C_1 & \text{si } x \in [-1, 0) \\ C_2 & \text{si } x \in [0, 1) \\ x + C_3 & \text{si } x \in [1, 2) \\ C_4 & \text{si } x = 2 \end{cases} = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \in [-1, 0) \\ -1 & \text{si } x \in [0, 1) \\ x - 2 & \text{si } x \in [1, 2) \end{cases}$$

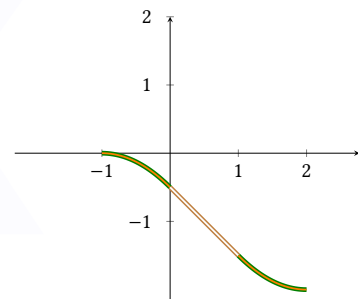
Esta función F es continua, por tanto la función

$$G : x \in [-1, 2] \rightarrow G(x) = \int_{-1}^x F$$

es diferenciable. Se puede calcular fácilmente y se obtiene

$$G(x) = \begin{cases} -x^2/2 - x - 1/2 & \text{si } x \in [-1, 0) \\ -x - 1/2 & \text{si } x \in [0, 1) \\ x^2/2 - 2x & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$$

Es una función que tiene tres trozos, uno parabólico a la izquierda que conecta con un trozo recto (marcado con otro color) y con otro parabólico a la derecha. Esta función G no sólo es continua; es también diferenciable ya que F es continua.

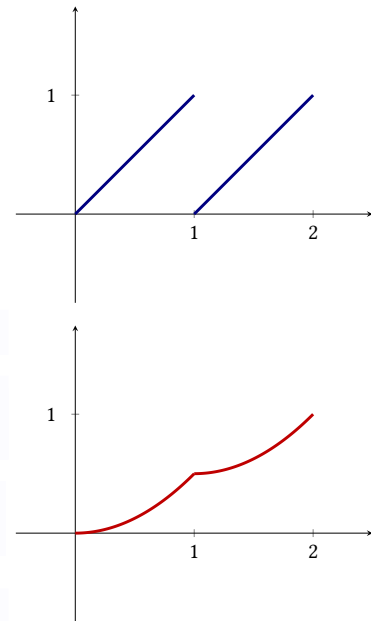


Ejemplo. Se considera la función

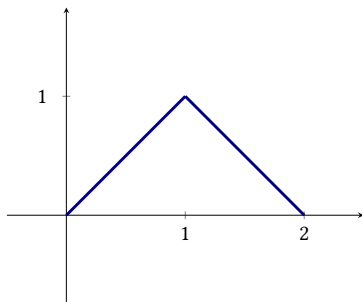
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1) \\ x - 1 & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$$

para la cual se obtiene

$$F(x) = \int_0^x f = \begin{cases} x^2/2 & \text{si } x \in [0, 1) \\ x^2/2 - x + 1 & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$$

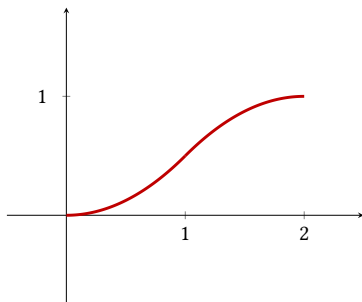


Ejemplo. Para la función



$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1) \\ 2 - x & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$$

es fácil comprobar que la función F asociada es



$$F(x) = \int_0^x f = \begin{cases} x^2/2 & \text{si } x \in [0, 1) \\ 2x - x^2/2 - 1 & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$$

(F es diferenciable: a pesar de estar definida mediante dos trozos parabólicos distintos, éstos encajan bien)

Teorema 3 (de Lebesgue). Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Son equivalentes

- $f \in \mathcal{R}[a, b]$
- $\{x \in [a, b] : f \text{ no es continua en } x\}$ tiene medida de Lebesgue igual a 0

El apartado b) también se expresa diciendo que « f es continua salvo en los puntos de un conjunto de medida (de Lebesgue) cero» o también que « f es continua casi por doquiera». Esta expresión casi por doquiera se suele abreviar como c.p.d. También se utilizan las abreviaturas c.s. (casi siempre), a.e. (almost everywhere), p.p. (presque partout). Así que el teorema de Lebesgue se puede enunciar

$$f \text{ es Riemann-integrable en } [a, b] \Leftrightarrow f \text{ es continua c.p.d. en } [a, b]$$

No se va a demostrar este teorema, aunque sí se va a estudiar qué significa ser un conjunto de medida de Lebesgue cero. Después se verán algunas consecuencias de este teorema.

Contenido y medida cero (medida de Jordan y de Lebesgue)

Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo de extremos a y b , se define la longitud de I como $|I| = b - a$. Por ejemplo, los intervalos $(3, 7]$, $[3, 7]$ y $(3, 7)$ tienen longitud 4. Si $a = b$ se puede considerar $I = [a, a] = \{a\}$ como un intervalo de longitud cero.

Se dice que un subconjunto acotado $A \subset \mathbb{R}$ tiene contenido (o medida de Jordan) cero si para todo $\varepsilon > 0$ existen intervalos I_1, \dots, I_n tales que $A \subset I_1 \cup \dots \cup I_n$ y $|I_1| + \dots + |I_n| \leq \varepsilon$. Con otras palabras, A puede ser cubierto por una cantidad finita de intervalos cuyas sumas de longitudes es arbitrariamente pequeña.

Por ejemplo, un conjunto formado por un sólo punto, $A = \{5\}$, tiene contenido cero, ya que $\{5\} \subset (5 - \varepsilon/2, 5 + \varepsilon/2)$ (como alternativa $\{5\} \subset [5, 5]$ cuya longitud es $|[5, 5]| = 0$). El mismo argumento sirve para probar que todo conjunto finito tiene contenido cero. Si $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ se eligen $I_1 = [x_1 - \varepsilon/4, x_1 + \varepsilon/4]$, $I_2 = [x_2 - \varepsilon/8, x_2 + \varepsilon/8], \dots$ Así se tiene $A \subset I_1 \cup \dots \cup I_n$ y $|I_1| + \dots + |I_n| = \varepsilon/2 + \varepsilon/4 + \dots < \varepsilon$ (como alternativa $A \subset [x_1, x_1] \cup \dots \cup [x_n, x_n]$ cuya suma de longitudes es cero)

Hay conjuntos infinitos que tienen contenido cero. Por ejemplo $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene contenido cero: todos los elementos de A , salvo una cantidad finita de ellos, están contenidos en el intervalo $[0, \varepsilon]$; el resto, al ser una cantidad finita, tiene contenido cero.

Todo conjunto con contenido cero es forzosamente acotado, ya que $A \subset I_1 \cup \dots \cup I_n$ y esta unión es un conjunto acotado, ya que cada intervalo que interviene es acotado.

La unión finita de conjuntos de contenido cero es un conjunto de contenido cero. Los subconjuntos de conjuntos de contenido cero son conjuntos de contenido cero.

Además, si A tiene contenido cero entonces su adherencia \bar{A} también tiene contenido cero. Es fácil probar esto, ya que en la definición de contenido cero se pueden considerar los intervalos I_1, \dots, I_n cerrados; si no lo son, se cierran y su longitud no varía. Al ser todos cerrados, la unión finita de ellos es cerrado. Por tanto (aplicando la propiedad $M \subset N \Rightarrow \bar{M} \subset \bar{N}$)

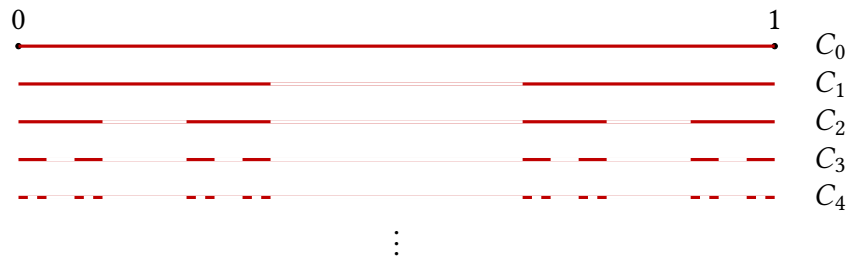
$$A \subset I_1 \cup \dots \cup I_n \Rightarrow \bar{A} \subset I_1 \cup \dots \cup I_n.$$

Como consecuencia de esto último se obtiene que el conjunto $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ no tiene contenido cero, pues $\bar{A} = [0, 1]$.

Sin embargo, hay conjuntos «grandes» con contenido cero. El siguiente ejemplo muestra un conjunto no numerable, con el mismo cardinal que el de \mathbb{R} , cuyo contenido es cero.

Ejemplo: el conjunto ternario de Cantor. Se trata de un conjunto acotado no numerable cuyo contenido es cero. Puede verse en http://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_Cantor más sobre este conjunto.

Se comienza con $C_0 = [0, 1]$. Como resultado de quitarle a C_0 su tercio central abierto, se obtiene $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. A este conjunto C_1 se le quita de nuevo el tercio central abierto de cada subintervalo suyo, y se tiene $C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$. Se continua así con la construcción de C_3, C_4, \dots . Gráficamente [aunque todos están contenidos en el intervalo $[0, 1]$, se dibujan así para ver con más claridad qué conjuntos son]:



Es evidente que $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \dots$. Se llama conjunto de Cantor a

$$C = \bigcap_{n \geq 0} C_n = C_0 \cap C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \dots$$

Evidentemente $C \neq \emptyset$, ya que por ejemplo $0, 1/3, 1 \in C$. Además, $C \subset C_n$ para todo $n = 0, 1, \dots$ y cada C_n está formado por una cantidad finita de intervalos, cuyas longitudes suman

$$|C_n| = \left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Como consecuencia C tiene contenido cero. Este conjunto es compacto y no puede contener ningún intervalo.

Además, C es no numerable. Para comprobarlo se escriben los elementos del intervalo $[0, 1]$ en base 3. Cada número se escribe como $x = 0.a_1a_2a_3 \dots$ donde cada cifra decimal a_i es 0, 1 o 2.

Es importante entender que esta escritura de números como expresiones decimales puede no ser única. Por ejemplo, en base 10 se puede considerar $0.1 = 0.099999 \dots$. En base 3 un mismo número se puede escribir de varias formas: $0.1 = 0.022222 \dots$. Otro ejemplo: el número $2/3$ se escribe en base 3 como $0.122222 \dots = 0.2$.

- El conjunto C_0 es todo el intervalo $[0, 1]$, $C_0 = \{0.a_1a_2a_3 \dots : a_i = 0, 1, 2 \text{ para cada } i \geq 1\}$.
- El conjunto C_1 está formado por los números cuya primera cifra decimal es distinta de 1, es decir, $C_1 = \{0.a_1a_2a_3 \dots : a_1 \neq 1\}$.
- El conjunto C_2 está formado por los números cuya primera y segunda cifra decimal son distintas de 1, es decir, $C_2 = \{0.a_1a_2a_3 \dots : a_1 \neq 1, a_2 \neq 1\}$.
- etcétera

El conjunto de Cantor C son todos los números del intervalo $[0, 1]$ cuya expresión decimal en base 3 se puede escribir sin que contenga ninguna cifra igual a 1. Por ejemplo, $1/4$ escrito en base 3 es $0.02020202 \dots$ y es un elemento de C . También es verdad que $1/3 \in C$. Este número en base 3 se escribe como 0.1 y puede escribirse como $0.022222 \dots$, un número que no contiene ninguna cifra igual a 1. La misma idea para todos los demás números. Por ejemplo, $1/3^n \in C$ para todo n , y son números que se pueden escribir en base 3 sin utilizar la cifra 1. En cambio, el número (escrito en base 3) $x = 0.11$ no es un elemento de C .

Este conjunto C tiene el mismo cardinal que $[0, 1]$. Si se escribe $[0, 1]$ en base 2, cada número es $x = 0.a_1a_2a_3 \dots$ donde cada cifra decimal a_i es 0 o 1. La aplicación «cambiar 2 por 1 en cada cifra decimal»

$$\begin{aligned} C &\longrightarrow [0, 1] \quad (\text{en base 2}) \\ 0.202002220 \dots &\rightsquigarrow 0.101001110 \dots \end{aligned}$$

es una biyección entre los elementos de C y los elementos de $[0, 1]$ (escritos en base 2).

Definición. Se dice que $A \subset \mathbb{R}$ tiene medida (de Lebesgue) cero si para todo $\varepsilon > 0$ existen intervalos I_1, I_2, \dots tales que $A \subset I_1 \cup I_2 \cup I_3 \dots$ y $|I_1| + |I_2| + |I_3| + \dots < \varepsilon$. Se dice que A es un conjunto de medida nula.

En la definición ya no se exige que la cantidad de intervalos sea finita (como en la definición de contenido cero), puede ser hasta numerable. Por tanto, es evidente que si A tiene contenido cero entonces A tiene medida cero. Sin embargo, el recíproco no es cierto.

Si A es numerable entonces A tiene medida cero. Para probarlo basta escribir A como $A = \{x_1, x_2, \dots\}$ y entonces

$$\begin{aligned} A &\subset \left[x_1 - \frac{\varepsilon}{4}, x_1 + \frac{\varepsilon}{4} \right] \cup \left[x_2 - \frac{\varepsilon}{8}, x_2 + \frac{\varepsilon}{8} \right] \cup \left[x_3 - \frac{\varepsilon}{16}, x_3 + \frac{\varepsilon}{16} \right] \cup \dots \\ &\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right] \end{aligned}$$

donde la suma de longitudes de esos intervalos es $\sum_n \varepsilon/2^{n+1} = \varepsilon$.

El mismo argumento sirve para probar que la unión numerable de conjuntos de medida cero es un conjunto de medida cero.

Como consecuencia, $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ y \mathbb{N} son conjuntos de medida cero, ya que son numerables. El primero de ellos muestra además un ejemplo de conjunto acotado de medida cero que no es de contenido cero.

Ejemplo. La función

$$f : x \in [0, 1] \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

no es \mathcal{R} -integrable en $[0, 1]$, su conjunto de discontinuidades es $[0, 1]$ que no mide cero. En cambio

$$f : x \in [0, 1] \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{5} \right\} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

sí es \mathcal{R} -integrable en $[0, 1]$.

Ejemplo. La función de Thomae (https://es.wikipedia.org/wiki/Función_de_Thomae) es un caso de función discontinua sólo en los números racionales. Se trata de una función Riemann integrable y su integral puede calcularse fácilmente.

El teorema de Lebesgue tiene varias consecuencias. Ahora es fácil probar algunas proposiciones sobre funciones Riemann integrables.

Corolario. Si $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ entonces $\lambda f + \mu g$, $f \cdot g$, $|f|$, f_+ , f_- , $\inf(f, g)$, $\sup(f, g)$ son funciones Riemann integrables.

La demostración es simple. Por ejemplo, es conocido que si f y g son continuas en un punto entonces $f \cdot g$ también lo es. En otras palabras

$$\{\text{discontinuidades de } f \cdot g\} \subset \{\text{discontinuidades de } f\} \cup \{\text{discontinuidades de } g\}.$$

Basta entonces aplicar el teorema de Lebesgue.

Generalización de la integral

Hasta ahora se ha estudiado la integración (en el sentido de Riemann) para funciones acotadas definidas en intervalos compactos. Ahora se trata de quitar esas restricciones y estudiar el cálculo integral para funciones no acotadas y también para funciones definidas en intervalos no acotados.

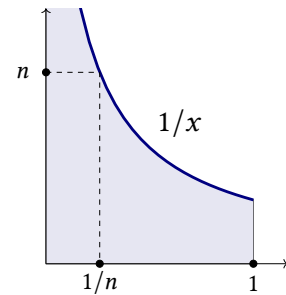
En https://es.wikipedia.org/wiki/Integral_impropia se encuentra una lectura interesante sobre este tipo de integrales, que se suelen llamar *integrales impropias*.

A) Integrales de funciones no acotadas

Por ejemplo, la función $f : x \in (0, 1] \rightarrow f(x) = 1/x \in \mathbb{R}$, ¿se puede integrar? Para ello se trata de saber si el área sombreada de la figura, que es una región no acotada, es un área finita.

Se considera la figura hasta una altura n , es decir, se considera la función no negativa $\inf(f, n)$. Esta función es acotada y continua y así $\inf(f, n) \in \mathcal{R}[0, 1]$. Su integral vale

$$\int_0^1 \inf(f, n) = \int_0^{1/n} n + \int_{1/n}^1 \frac{1}{x} = 1 + \log n$$



Este valor tiende a $+\infty$ por lo que el área de la región sombreada es infinita. Esto quiere decir que $f \notin \mathcal{R}(0, 1]$.

A veces se dice también $f \notin \mathcal{R}[0, 1]$, admitiendo que el valor de f en 0 es irrelevante, ya que no influye en el valor de la integral.

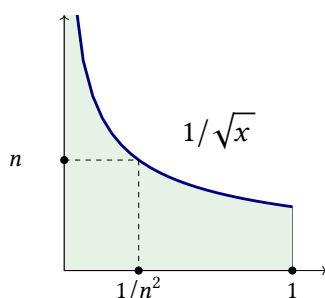
Definición. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función no negativa (puede ser acotada o no), se dice que $f \in \mathcal{R}[a, b]$ si $\inf(f, n) \in \mathcal{R}[a, b]$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la sucesión $\left(\int_a^b \inf(f, n)\right)$ converge. En ese caso se define

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \inf(f, n) = \sup_n \int_a^b \inf(f, n)$$

(es una sucesión creciente y su límite y su supremo coinciden.) La misma definición puede aplicarse a cualquiera de los intervalos $(a, b]$, $[a, b]$ o (a, b) .

Para una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, siempre puede escribirse $f = f_+ - f_-$ (una diferencia de funciones no negativas). Se dice que $f \in \mathcal{R}[a, b]$ si las funciones f_+ y f_- son Riemann integrables en $[a, b]$. En este caso se define

$$\int_a^b f = \int_a^b f_+ - \int_a^b f_-$$



Ejemplo. La función $f : x \in (0, 1] \rightarrow f(x) = 1/\sqrt{x}$ es no negativa. Para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $\inf(f, n) \in \mathcal{R}[0, 1]$, pues es continua. Se puede calcular su integral,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \inf(f, n) &= \int_0^{1/n^2} n + \int_{1/n^2}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{n} + 2\sqrt{x} \Big|_{1/n^2}^1 = \frac{1}{n} + 2 - \frac{2}{n} = 2 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Por tanto la función $f(x) = 1/\sqrt{x}$ verifica $f \in \mathcal{R}[0, 1]$ y además

$$\int_0^1 f = 2.$$

Ejemplo. Para las funciones $f(x) = 1/x^p$ se puede comprobar que $f \in \mathcal{R}[0, 1] \Leftrightarrow p < 1$.

Ejercicio. Se considera la función $f(x) = \text{signo}(x) \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ en $[-1, 1]$, es decir,

$$f : x \in [-1, 1] \longrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{-x}} & \text{si } x \in [-1, 0) \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in (0, 1] \end{cases}$$

Identificar las funciones f_+ y f_- . Comprobar que f es integrable y calcular $\int_{-1}^1 f$.

B) Integrales en intervalos no acotados

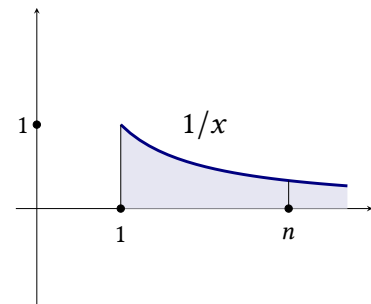
Un ejemplo que muestra la situación en este apartado: la función $f : x \in [1, +\infty) \longrightarrow f(x) = 1/x \in \mathbb{R}$ está definida en un intervalo infinito. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se considera la función

$$f_n : x \in [1, n] \longrightarrow f_n(x) = \frac{1}{x}.$$

que es \mathcal{R} -integrable por ser continua. Su integral vale

$$\int_1^n f_n = \int_1^n \frac{1}{x} = \log x \Big|_1^n = \log n - \log 1 = \log n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

y por tanto el área (no acotada) sombreada que encierra la función f es infinita. Se tiene entonces que $f \notin \mathcal{R}[1, +\infty)$.



Definición. Se dice que una función no negativa $f : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ es \mathcal{R} -integrable en $[a, +\infty)$ si para todo $n \in \mathbb{N}$ (con $n > a$) la función $f_n : x \in [a, n] \longrightarrow f_n(x) = f(x)$ es \mathcal{R} -integrable en $[a, n]$ y la sucesión $(\int_a^n f_n)$ converge. En este caso se define

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^n f_n = \sup_n \int_a^n f_n$$

(es una sucesión creciente y su límite y su supremo coinciden.)

Para una función $f : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que $f \in \mathcal{R}[a, +\infty)$ si las funciones no negativas f_+ y f_- son Riemann integrables en $[a, +\infty)$, y se define

$$\int_a^{+\infty} f = \int_a^{+\infty} f_+ - \int_a^{+\infty} f_-.$$

Ejemplo: la función $f(x) = 1/x^2$ es \mathcal{R} -integrable en $[1, +\infty)$, y su integral vale

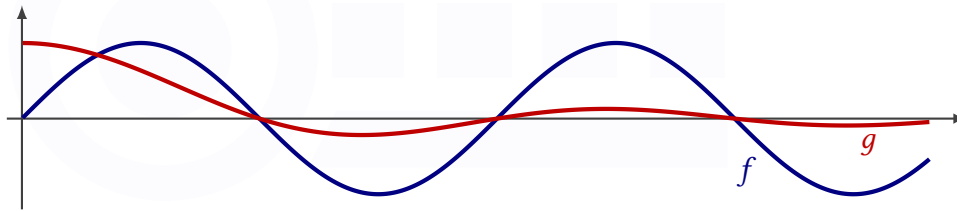
$$\int_1^{+\infty} 1/x^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n 1/x^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} + 1 \right) = 1.$$

En cambio, $g(x) = 1/\sqrt{x}$ no es \mathcal{R} -integrable en $[1, +\infty)$, ya que

$$\int_1^n 1/\sqrt{x} = \left[2\sqrt{x} \right]_1^n = 2\sqrt{n} - 2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

Ejercicio. ¿Para qué valores de p las funciones $f(x) = x^p$ son Riemann integrables en $[1, +\infty)$?

Ejercicio. ¿Es Riemann integrable en $[0, +\infty)$ la función $f(x) = \text{sen } x$? ¿Y $g(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$?



Ejercicio. Comprobar que para la función $f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$ se tiene

a) f es Riemann integrable en $(0, 2)$ y se tiene $\int_0^1 f = -4$ y $\int_0^2 f = 2\sqrt{2}(-2 + \log 2)$

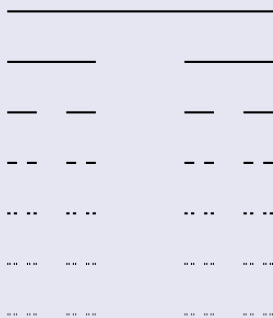
b) f no es Riemann integrable en $[4, +\infty)$

(Una primitiva de f se consigue mediante integración por partes, tomando $u = \log x$, $dv = dx/\sqrt{x}$)

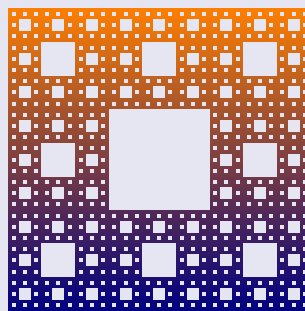
Para pensar. Aplicar directamente la regla de Barrow en este tipo de integrales puede dar resultados que son claramente falsos. Por ejemplo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \neq \left[-\frac{1}{x} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^2} \neq \left[-\frac{1}{x-1} \right]_0^{+\infty} = -1.$$

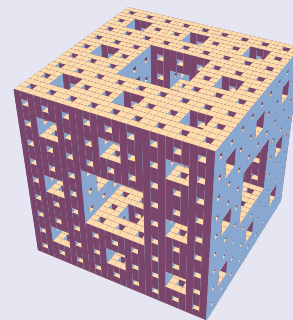
El Conjunto de Cantor y generalizaciones (en otras dimensiones)



Conjunto de Cantor



Alfombra de Sierpinski



Esponja de Menger

https://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_Cantor