Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

3 Cálculo II

Cálculo de primitivas

25 · 03 · 2026

Consideraciones previas

Si f es una función elemental, se trata de encontrar una función F que cumpla $F'(x) = f(x)$. Para una clase amplia de funciones ya se ha demostrado la existencia de esta función F. Se dice que F es una primitiva de f y en ese caso también lo es la función $F(x) + C$, donde $C \in \mathbb{R}$. Para expresar todo esto se escribe

$$F(x) = \int f(x)\, dx + C.$$

Además, si G es otra primitiva, entonces en cada intervalo $I \subset \mathbb{R}$ se tiene $G(x) = F(x) + C$ para $x \in I$.

La demostración de este resultado es fácil: si F y G son primitivas de f en un intervalo I, entonces $f(x) = G'(x) = F'(x)$ para $x \in I$. Por tanto $F'(x) - G'(x) = 0$ en todos los puntos de I. Como ya se ha visto en Cálculo I, esto obliga a que $F - G$ sea una función constante en I.

¿Hay otras primitivas de f que no sean de la forma $F(x) + C$? Desde luego, en un intervalo sólo puede ser de la forma $F(x) + C$. Pero en otro caso, puede haber primitivas algo distintas…

Ejemplo. Las funciones

$$F : x \in [1,2] \cup [3,4] \longrightarrow \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [1,2] \\ x+6 & \text{si} \quad x \in [3,4] \end{cases} \qquad G : x \in [1,2] \cup [3,4] \longrightarrow G(x) = x$$

son primitivas de $f(x) = 1$. En cada intervalo difieren en una constante, pero no es verdad que $F - G$ sea una función constante.

Definición. El conjunto de primitivas de f se suele denotar por $\int f(x)\, dx$,

$$\Big\{ \text{primitivas de } f \Big\} = \int f(x)\, dx$$

y se le llama integral indefinida de f.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

El nombre proviene del primer teorema fundamental del cálculo integral, que dice que si $f \in \mathscr{R}[a,b]$ entonces f tiene una primitiva, que es la función $F : x \in [a,b] \longrightarrow \int_a^x f$. Se suele escribir $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, indicando que la primitiva es F o cualquiera que sea F más una constante.

Ejemplo: $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)^2} = \frac{x}{1+x} + C = \frac{-1}{1+x} + C$; $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + C$.

Hay que tener en cuenta que hay funciones que no tienen primitiva, como la función de Dirichlet. Y de las que sí tienen primitiva, hay muchas funciones, como $f(x) = \operatorname{sen} x^2$, cuya primitiva no puede expresarse como una función elemental.

Función	**Primitiva**		**Primitiva elemental**
de Dirichlet	No tiene		
$\operatorname{sen} x^2$	$\int_0^x \operatorname{sen} t^2\,dt$		no tiene
x	$\int_0^x t\,dt$	$=$	$\frac{x^2}{2}$
e^x	$\int_0^x e^t\,dt$	$=$	$e^x - 1$
$\cos x$	$\int_0^x \cos t\,dt$	$=$	$\operatorname{sen} x$

En este capítulo se entenderá que calcular una primitiva de una función significa expresarla como una función elemental (o como combinación de funciones elementales). En la tabla anterior (columna de la derecha) aparece la indicación «no tiene» como primitiva elemental de la función $f(x) = \operatorname{sen} x^2$. Demostrar esta afirmación —es decir, que no posee primitiva elemental— requiere herramientas que quedan fuera del contenido de este curso. No obstante, más adelante se verá cómo expresar una primitiva suya mediante una serie de potencias, la cual no constituye una función elemental.

Otro ejemplo más: $f(x) = \cos\left(\sqrt{1+x^2+e^x}\right)$ tiene primitiva en $[0,\ 2]$, y es la función

$$F(x) = \int_0^x \cos\left(\sqrt{1+t^2+e^t}\right)\,dt.$$

Ya se ha probado que

$$F'(x) = \left(\int_0^x \cos\left(\sqrt{1+t^2+e^t}\right)\,dt\right)' = \cos\left(\sqrt{1+x^2+e^x}\right) = f(x).$$

Sin embargo, no es esta la respuesta que se está buscando.

Primitivas inmediatas

Encontrar una primitiva de una función f no siempre es fácil. En algunos casos ni siquiera existe primitiva que se pueda expresar como una función elemental. Tal es el caso de funciones tan simples como

$$\sqrt{x^4+1}, \quad \operatorname{sen} x^2, \quad \cos x^2, \quad \frac{1}{\log x}, \quad x \operatorname{tg} x, \quad \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad \frac{1}{x+\operatorname{sen} x}, \ldots$$

que no tienen primitivas elementales. Así, para el cálculo de

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x^2 \, dx$$

no se puede utilizar la regla de Barrow. Eso no quiere decir que no se pueda calcular esa integral.

Para el cálculo de primitivas, es decir, funciones cuya derivada sea una función dada, es esencial conocer las derivadas de las funciones elementales,

- Potencias: $(x^r)' = rx^{r-1}$
- Exponenciales: $(a^x)' = a^x \log a, \quad (e^x)' = e^x$
- Logarítmicas: $(\log_a x) = \dfrac{1}{x \log a}, \quad (\log x)' = \dfrac{1}{x}$
- Trigonométricas: $(\operatorname{sen} x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\operatorname{sen} x$
- Funciones trigonométricas inversas: $(\operatorname{arcsen} x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$ y $(\operatorname{arctg} x)' = 1/(1+x^2)$.

Además, las reglas más elementales permiten simplificar muchos cálculos:

- $\displaystyle\int \Big(\lambda f(x) + \mu g(x)\Big)\, dx \; = \; \lambda \int f(x)\, dx + \mu \int g(x)\, dx,$ la integral se puede separar en sumandos y los números pueden colocarse fuera del signo integral;
- $\displaystyle\int f(x) g'(x)\, dx \; = \; f(x)g(x) - \int f'(x) g(x)\, dx,$ es la regla de la derivada del producto, que en términos de cálculo de primitivas se llama regla de integración por partes;
- $\displaystyle\int f'(g(x)) \cdot g'(x)\, dx \; = \; f(g(x)) + C,$ la regla de la cadena expresada en términos de primitivas.

Ejemplos (aplicación –*a la inversa*– de estas reglas básicas de derivación):

1) Saber hacer derivadas lleva a conocer primitivas, por ejemplo, $\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$. Como $(f^n)' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$, es fácil comprobar que

$$\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C \qquad \int 7\sqrt{\operatorname{sen} x}\, \cos x \, dx = \frac{14}{3} \operatorname{sen}^{3/2} x + C$$

$$\int \frac{\log^3 x}{x}\, dx = \frac{\log^4 x}{4} + C \qquad \int x\sqrt{1-x^2}\, dx = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} + C$$

2) Conviene recordar algunas derivadas de funciones compuestas:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \log(f(x)) + C, \qquad \int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\, dx = \operatorname{arctg} f(x) + C$$

que se utilizarán más adelante. Por ejemplo

$$\int \frac{1+e^x}{2+x+e^x}\, dx = \log(2+x+e^x) + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+2x+2}\, dx = \operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

3) En el caso de potencias se puede resumir con las siguientes expresiones

$$\int f^n(x)f'(x)\,dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C, \qquad (n \neq -1),$$

y para el caso $n = -1$

$$\int f^{-1}(x)f'(x)\,dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log(f(x)) + C.$$

4) La regla de la cadena $\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ también tiene su regla inversa para el cálculo de primitivas. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \int \cos(x^2)\cdot 2x\,dx &= \operatorname{sen} x^2 + C \\ \int \frac{1}{\operatorname{tg} x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx &= \log(\operatorname{sen} x) + C \\ \int \frac{3x}{1+x^4}\,dx &= \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C \end{aligned}$$

Esta forma de proceder se conoce como integración inmediata: se trata de funciones cuya primitiva o *antiderivada* se conoce directamente como proceso inverso de derivación. No es habitual que con este proceso se consiga encontrar una primitiva, pero es siempre lo primero que debe hacerse. Sin embargo, hay funciones aparentemente simples, como x^2e^x, para las que no es fácil encontrar de forma directa una primitiva haciendo un proceso inverso de derivación.

Por este motivo se suelen estudiar métodos que ayuden al cálculo de primitivas para los casos que ya no son inmediatos.

Notación. Para una función $f(x)$ la derivada es

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x).$$

Es frecuente escribir entonces $df = f'(x)\,dx$ o también $df(x) = f'(x)\,dx$. Por ejemplo, con esta notación, si $u = \operatorname{sen} x$, entonces $du = \cos x\,dx$. Dadas dos funciones u y v se tiene $d(uv) = u\,dv + v\,du$, que representa la regla de derivación de un producto de funciones.

Métodos de integración

En este curso se verán algunos métodos, como

1) integración por partes,

2) integración de funciones racionales mediante fracciones simples y,

3) integración mediante cambio de variable.

Son los más habituales en un primer curso de Cálculo. Antes de aplicar cualquiera de ellos, se debe comprobar si la función tiene una primitiva inmediata.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Método 1: Integración por partes

Es una técnica de integración que consiste en aplicar la regla de derivación de un producto:

$$\int f(x)g'(x)\,dx \;=\; f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

La integral de la izquierda se conoce si se conoce la de la derecha. Se suele escribir

$$\int u\,dv \;=\; u\cdot v - \int v\,du.$$

En la práctica, para calcular una integral $\int f(x)\,dx$ mediante este método se elige qué parte será la función u y el resto será dv. Si la elección es correcta se podrá aplicar la fórmula anterior y hacer la integral. Como regla general se deberá elegir como u aquello que no se complique derivando, y como dv aquello que permita calcular v y no se complique integrando.

Ejemplos:

1) $\displaystyle\int xe^x\,dx = \left[\begin{array}{cc} u=x & du=dx \\ dv=e^x dx & v=e^x \end{array}\right] = xe^x - \int e^x dx \;=\; xe^x - e^x + C.$

2) $\displaystyle\int \log x\,dx = \left[\begin{array}{cc} u=\log x & du=dx/x \\ dv=dx & v=x \end{array}\right] = x\log x - \int dx \;=\; x\log x - x + C.$

3) Utilizando el apartado anterior, $\displaystyle\int \log^2 x\,dx \;=\; x\left(\log^2 x - 2\log x + 2\right) + C.$

4) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\,dx \;=\; x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} \;=\; x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C.$ (se ha elegido $u = \operatorname{arctg} x,\ dv = dx$)

5) A veces la integración requiere aplicar este método dos veces,

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = \left[\begin{array}{cc} u=\operatorname{sen} x & du=\cos x dx \\ dv=e^x dx & v=e^x \end{array}\right] = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{cc} u=\cos x & du=-\operatorname{sen} x dx \\ dv=e^x dx & v=e^x \end{array}\right] = e^x \operatorname{sen} x - e^x\cos x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx.$$

Así,

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx \;=\; e^x\,\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{2} + C.$$

6) Aplicando dos veces la integración por partes,

$$\int x^2 e^x\,dx \;=\; e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$

Y con un poco de más paciencia,

$$\int x^4 e^x\,dx \;=\; e^x\left(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24\right) + C.$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

7) $\displaystyle\int x\log x\,dx = \frac{1}{2}\left(x^2\log x - \frac{x^2}{2}\right) + C.$

Método 2: Integración de funciones racionales mediante fracciones simples

Se llama función *racional* a cualquiera del tipo

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios. Por ejemplo, son funciones racionales

$$\frac{1}{x^2},\quad \frac{x^7-1}{x^4+7x+2},\quad \frac{1-x}{x^3+x+1}.$$

En el cálculo de primitivas tienen especial interés porque aparecen con frecuencia. Hay funciones de otros tipos, como trigonométricas, exponenciales... a las que se les hace un cambio de variable y se transforman en funciones racionales.

No suele ser fácil calcular

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx.$$

Por ejemplo,

$$\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\left(x^2 - \log(x^2+1)\right) + C.$$

El método que se explica a continuación consiste en descomponer P/Q como suma de fracciones más sencillas, que se puedan integrar. La integral total será la suma de todas esas integrales. Por ejemplo

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1},$$

y así

$$\int \frac{2}{x^2-1}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx,$$

que son integrales inmediatas.

¿Cómo se puede escribir P/Q como una suma de fracciones más sencillas?

Paso 1. Si grado$(P) \geq$ grado(Q) entonces se hace la divisón y se obtiene $P(x) = C(x)Q(x) + R(x)$ (C y R son el cociente y el resto de la divisón) y por tanto

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Además grado$(R) <$ grado(Q). En total,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int C(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx.$$

Para el cálculo de primitivas, el término $C(x)$ es un polinomio, cuya primitiva es inmediata. Así, la única dificultad se encuentra en expresiones en las que el grado del numerador es menor que el denominador.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Este paso 1 no es necesario si grado(P) < grado(Q).

Ejemplo. Para la expresión

$$\frac{x^3+5x^2-7x}{x^2+6x+1}$$

se hace la división y se tiene

$$x^3+5x^2-7x=(x-1)(x^2+6x+1)+1-2x.$$

Así

$$\frac{x^3+5x^2-7x}{x^2+6x+1} = x-1+\frac{1-2x}{x^2+6x+1}.$$

(el algoritmo de la división es idéntico al que se hace con números) y entonces

$$\int \frac{x^3+5x^2-7x}{x^2+6x+1}\,dx = x^2/2-x+\int \frac{1-2x}{x^2+6x+1}\,dx.$$

Paso 2. Una vez completado el paso 1 (siempre que sea necesario) el problema se transforma en el cálculo de la primitiva de una función racional P/Q con grado(P) < grado(Q) .

Si $Q(x)=a_0+a_x+\cdots+a_nx^n$ es un polinomio de grado n, entonces tiene n raíces $r_1,\ldots,r_n$ y se escribe

$$Q(x)=a_n\,(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n).$$

Se agrupan las raíces repetidas y cada raíz compleja con su conjugada. Así, $Q(x)$ tendrá factores $(x-r)^k$ por cada raíz real repetida k veces y factores $((x-a)^2+b^2)^m$ por cada raíz $a+ib$ y su conjugada $a-ib$ repetidas m veces.

Ejemplos:

1) El polinomio $3x^2-6x+3$ tiene dos raíces $r_1=1$ y $r_2=1$. Por tanto

$$3x^2-6x+3=3(x-1)(x-1)=3(x-1)^2.$$

2) El polinomio $x^4-5x^3+17x^2-13x$ tiene como raíces $0, 1, 2+3i$ y $2-3i$ (siempre que aparece una raíz compleja también está su conjugada). Así,

$$\begin{aligned} x^4-5x^3+17x^2-13x &= x\,(x-1)\Big(x-(2+3i)\Big)\Big(x-(2-3i)\Big) \\ &= x\,(x-1)\Big((x-2)^2+9\Big) = x\,(x-1)\Big(x^2-4x+13\Big). \end{aligned}$$

Puede parecer una tarea sencilla, pero el cálculo de las n raíces de un polinomio de grado n no es fácil, ni siquiera para valores pequeños de n.

Es simple para $n=2$, un polinomio ax^2+bx+c tiene como raíces

$$r_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad r_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Para $n=3$ ya es bastante más complicado: las tres raíces de un polinomio ax^3+bx^2+cx+d de grado 3 ($a\neq 0$) son (una de ellas, la tercera, es obligatoriamente real; las otras otras dos pueden ser reales o complejas y conjugadas)

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

$$r_1=-\frac{1}{2}\left(i\sqrt{3}+1\right)\left(\frac{\sqrt{9a^2d^2+\frac{4}{3}ac^3-\frac{1}{3}b^2c^2-\frac{2}{3}(9abc-2b^3)d}}{6a^2}-\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{54a^3}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}-\frac{b}{3a}+\frac{\left(-i\sqrt{3}+1\right)\left(3ac-b^2\right)}{18\left(\frac{\sqrt{9a^2d^2+\frac{4}{3}ac^3-\frac{1}{3}b^2c^2-\frac{2}{3}(9abc-2b^3)d}}{6a^2}-\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{54a^3}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}a^2}$$

$$r_2=-\frac{1}{2}\left(-i\sqrt{3}+1\right)\left(\frac{\sqrt{9a^2d^2+\frac{4}{3}ac^3-\frac{1}{3}b^2c^2-\frac{2}{3}(9abc-2b^3)d}}{6a^2}-\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{54a^3}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}-\frac{b}{3a}+\frac{\left(i\sqrt{3}+1\right)\left(3ac-b^2\right)}{18\left(\frac{\sqrt{9a^2d^2+\frac{4}{3}ac^3-\frac{1}{3}b^2c^2-\frac{2}{3}(9abc-2b^3)d}}{6a^2}-\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{54a^3}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}a^2}$$

$$r_3=\left(\frac{\sqrt{9a^2d^2+\frac{4}{3}ac^3-\frac{1}{3}b^2c^2-\frac{2}{3}(9abc-2b^3)d}}{6a^2}-\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{54a^3}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}-\frac{b}{3a}-\frac{3ac-b^2}{9\left(\frac{\sqrt{9a^2d^2+\frac{4}{3}ac^3-\frac{1}{3}b^2c^2-\frac{2}{3}(9abc-2b^3)d}}{6a^2}-\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{54a^3}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}a^2}$$

El teorema Abel-Ruffini (que es parte de la teoría de Galois) demuestra que no pueden resolverse por radicales las ecuaciones polinómicas generales de grado igual o superior a cinco. A veces la regla de Ruffini, o cualquier otro método, permite encontrar raíces de polinomio de grados elevados, pero en general, no hay fórmulas que expresen cuáles son esas raíces.

Teorema (de descomposición en fracciones simples) *Si grado(P) $<$ grado(Q), entonces la fracción $P(x)/Q(x)$ puede escribirse como una suma de fracciones simples. En esta suma aparecen términos de la forma*

$$\frac{A_1}{(x-r)}+\ldots+\frac{A_k}{(x-r)^k}$$

si r es una raíz real que se repite k veces, y términos de la forma

$$\frac{B_1x+C_1}{(x-a)^2+b^2}+\ldots+\frac{B_mx+C_m}{((x-a)^2+b^2)^m}$$

si $a+ib$ es una raíz compleja que se repite (ella y su conjugada) m veces.

Se obtiene una igualdad que tiene este aspecto:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\left[\frac{A_1}{(x-r)}+\ldots+\frac{A_k}{(x-r)^k}\right]+\left[\frac{B_1x+C_1}{(x-a)^2+b^2}+\ldots+\frac{B_mx+C_m}{((x-a)^2+b^2)^m}\right]+\ldots$$

donde los sumandos de la derecha se llaman factores simples y aparecen según sean las raíces (y su multiplicidad) de $Q(x)$.

Los coeficientes que aparecen A_i, B_i, C_i han de calcularse. Para ello se pueden identificar los polinomios que resultan a ambos lados de la igualdad y se identifican los términos del mismo grado. También se pueden dar valores a la variable x para ir determinando dichos coeficientes. A veces se pueden utilizar de forma conjunta ambos métodos.

Ejemplo:

$$\frac{1+x}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Para calcular A, B, C se escribe

$$1+x=A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$$

Una forma de calcular es igualando términos semejantes (del mismo grado) de un lado y otro de la igualdad:

$$\begin{aligned}1&=A-C\\1&=-B+C\\0&=A+B\end{aligned}$$

y se obtiene $A = -B = 1, C = 0$.

Otra forma de calcular esos coeficientes consiste en dar valores a x en la expresión

$$1 + x = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x - 1).$$

Por ejemplo, para $x = 1$ se tiene $2 = 2A$. Para otros valores, como $x = 0$ se tiene $1 = 1 + C(-1)$ y así $C = 0$, etc. Estos dos métodos se puede combinar y a veces se agilizan los cálculos.

Ejemplo:

$$\frac{4}{x(x+5)^2(x^2-4x+13)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+5} + \frac{C}{(x+5)^2} + \frac{Dx+E}{x^2-4x+13} + \frac{Fx+G}{(x^2-4x+13)^2}.$$

donde los coeficientes se calculan según se ha explicado antes. Se puede escribir $x^2 - 4x + 13$ o $(x-2)^2 + 3^2$. Son el mismo polinomio, asociado a las raíces complejas $2 + 3i$ y $2 - 3i$.

Ejemplo. Al hacer la división y calcular las raíces del denominador se tiene

$$\frac{x^3-7}{x^2-5x+6} = x + 5 + \frac{19x-37}{x^2-5x+6} = x + 5 + \frac{19x-37}{(x-2)(x-3)}.$$

Esta última expresión puede escribirse como

$$\frac{19x-37}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

donde

$$19x - 37 = A(x-3) + B(x-2).$$

Bien dando valores a x, bien igualando los coeficientes de igual grado, se obtiene el mismo resultado $A = -1,\ B = 20$. Así

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-7}{x^2-5x+6}\,dx &= \int (x+5)\,dx + \int \frac{19x-37}{x^2-5x+6}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 5x + \int \frac{-1}{x-2}\,dx + \int \frac{20}{x-3}\,dx. \\ &= \frac{x^2}{2} + 5x - \log(x-2) + 20\log(x-3) + C \\ &= \frac{x^2}{2} + 5x + \log\frac{(x-3)^{20}}{x-2} + C\end{aligned}$$

Consecuencia: el cálculo de primitivas de funciones racionales se reduce entonces a conocer primitivas de expresiones del tipo

$$\frac{A}{(x-r)^k},\ \frac{Bx+C}{((x-a)^2+b^2)^m}$$

para valores $k, m = 1, 2, 3, \ldots$

Las primeras, correspondientes a raíces reales son sencillas. Para $k = 1$ se tiene

$$\int \frac{A}{x-r}\,dx = A\log(x-r) + C$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

y para $k > 1$

$$\int \frac{A}{(x-r)^k}\,dx = A\,\frac{(x-r)^{-k+1}}{-k+1} + C.$$

Para las expresiones correspondientes a raíces complejas simples (sin repeticiones), es decir, para $m = 1$, se tiene

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2}\,dx &= \int \frac{Bx-Ba+Ba+C}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \int \frac{Bx-Ba}{(x-a)^2+b^2}\,dx + \int \frac{Ba+C}{(x-a)^2+b^2}\,dx \\ &= \frac{B}{2}\int \frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b^2}\,dx + \frac{Ba+C}{b}\int \frac{1/b}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2+1}\,dx \\ &= \frac{B}{2}\log\left((x-a)^2+b^2\right) + \frac{Ba+C}{b}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-a}{b}\right) + K\end{aligned}$$

Sin embargo, para expresiones correspondientes a raíces complejas repetidas el cálculo de primitivas no es sencillo: si $m > 1$ no es fácil calcular

$$\int \frac{Bx+C}{\left((x-a)^2+b^2\right)^m}\,dx.$$

Para este tipo de integrales hay que utilizar algún método, como el de reducción de exponente o también el método de Hermite (o Hermite-Ostrogradski). Este último es el que se va a utilizar aquí. Con este método basta saber realizar las primitivas de factores correspondientes a raíces simples.

Método de Hermite. *Para una expresión racional $P(x)/Q(x)$, donde grado$(P) <$ grado(Q), se puede calcular su primitiva mediante la fórmula*

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx \qquad (\dagger)$$

donde Q_2 contiene los factores $(x-r)$ o $(x-a)^2+b^2$ de las raíces de Q pero sólo una vez cada uno, y Q_1 contiene el resto de factores, es decir, $Q = Q_1 \cdot Q_2$. Los polinomios indeterminados P_1 y P_2 tienen como mucho un grado menos que su denominador y sus coeficientes se calculan derivando la fórmula $(\dagger)$.

Ejemplo:

$$\int \frac{3}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \int \frac{Cx+D}{x^2+1}\,dx.$$

Derivando,

$$\frac{3}{(x^2+1)^2} = \frac{A(x^2+1)-(Ax+B)2x}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

y así

$$3 = A(x^2+1) - (Ax+B)2x + (Cx+D)(x^2+1)$$

y se calculan A, B, C, D por cualquiera de los dós métodos ya vistos. Se puede comprobar que entonces $A = D = 3/2$, $B = C = 0$ y así

$$\int \frac{3}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{3}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}\,dx &= \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^2(x^2+1)} + \int \frac{Ex^2+Fx+G}{x(x^2+1)}\,dx \\ &= \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^2(x^2+1)} + \int \frac{H}{x}\,dx + \int \frac{Mx+N}{x^2+1}\,dx \\ &= \frac{5x^2+2}{2x^2(x^2+1)} + 5\log x - \frac{5}{2}\log\left(x^2+1\right) + C\end{aligned}$$

ya que al derivar se obtienen los valores $A = C = N = 0$, $B = 5/2$, $D = 1$, $H = -M = 5$

Ejemplo: utilizando este método de Hermite se obtiene

$$\begin{aligned}\int \frac{5x^5+6x^4+22x^3+22x^2+24x+4}{x^2(x^2+2)^2}\,dx &= \frac{x^2-2}{x^2(x^2+1)} + \int \frac{6}{x}\,dx + \int \frac{-x+7}{x^2+2}\,dx \qquad (1) \\ &= \frac{x^2-2}{x^2(x^2+1)} + 6\log|x| - \frac{1}{2}\log\left(x^2+2\right) + \frac{7}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C\end{aligned}$$

Otros ejemplos resueltos de cálculo de primitivas utilizando el método de descomposición en fracciones simples (en el resultado final pueden aparecer los sumandos desordenados). Se han clasificado según sean las raíces del denominador.

1. Raíces reales y todas distintas

$$\frac{x^2}{4x^2+12x-160} = \frac{x^2}{4\,(x-5)(x+8)} = \frac{1}{4} + \frac{25}{52\,(x-5)} - \frac{16}{13\,(x+8)}$$

$$\int \frac{x^2}{4x^2+12x-160}\,dx = \int \frac{x^2}{4\,(x-5)(x+8)}\,dx \;=\; \frac{x}{4} + \frac{25}{52}\log(x-5) - \frac{16}{13}\log(x+8)$$

2. Raíces reales y algunas repetidas

$$\frac{x-2}{(x-6)^2x} = \frac{1}{18\,(x-6)} + \frac{2}{3\,(x-6)^2} - \frac{1}{18\,x}$$

$$\int \frac{x-2}{(x-6)^2x}\,dx = -\frac{2}{3\,(x-6)} + \frac{1}{18}\log(x-6) - \frac{1}{18}\log(x)$$

3. Raíces complejas sin repeticiones

$$-\frac{3\,x-1}{\left((x-2)^2+3\right)(x^2+x+1)} = \frac{x-7}{7\,(x^2-4\,x+7)} - \frac{x-2}{7\,(x^2+x+1)}$$

$$\int -\frac{3\,x-1}{\left((x-2)^2+3\right)(x^2+x+1)}\,dx = -\frac{5}{21}\,\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{3}\,(x-2)\,\sqrt{3}\right) + \frac{5}{21}\,\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{3}\,(2\,x+1)\,\sqrt{3}\right) + \frac{1}{14}\,\log\left(x^2-4\,x+7\right) - \frac{1}{14}\,\log\left(x^2+x+1\right)$$

4. Raíces complejas algunas con repeticiones

$$\frac{4}{(x^2+3)^2(2\,x^2+5)} = -\frac{8}{x^2+3} - \frac{4}{(x^2+3)^2} + \frac{16}{2\,x^2+5}$$

$$\int \frac{4}{(x^2+3)^2(2\,x^2+5)}\,dx = -\frac{26}{9}\,\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{3}\,\sqrt{3}\,x\right) + \frac{8}{5}\,\sqrt{10}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{5}\,\sqrt{10}\,x\right) - \frac{2\,x}{3\,(x^2+3)}$$

5. Raíces reales y complejas sin repeticiones

$$\frac{2\,x-7}{(x+2)(x^2+x+6)} = \frac{11\,x+5}{8\,(x^2+x+6)} - \frac{11}{8\,(x+2)}$$

$$\int \frac{2\,x-7}{(x+2)(x^2+x+6)}\,dx = -\frac{1}{184}\,\sqrt{23}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{23}\,(2\,x+1)\,\sqrt{23}\right) - \frac{11}{8}\,\log(x+2) + \frac{11}{16}\,\log\left(x^2+x+6\right)$$

6. Raíces reales y complejas repetidas

$$\frac{-2\,x}{(x-1)^2(x+1)(x^2+1)(x^2+3)^2} = \frac{x-2}{16\,(x^2+3)} - \frac{x-1}{8\,(x^2+1)} + \frac{x-3}{16\,(x^2+3)^2} + \frac{3}{64(x-1)} - \frac{1}{32(x-1)^2} + \frac{1}{64(x+1)}$$

$$\int \frac{-2\,x}{(x-1)^2(x+1)(x^2+1)(x^2+3)^2}\,dx = -\frac{5\,\sqrt{3}}{96}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{3}\,\sqrt{3}\,x\right) - \frac{x+1}{32\,(x^2+3)} + \frac{1}{32\,(x-1)} + \frac{3}{64}\,\log(x-1) + \frac{1}{64}\,\log(x+1) - \frac{1}{16}\,\log\left(x^2+1\right) + \frac{1}{32}\,\log\left(x^2+3\right) + \frac{1}{8}\,\mathrm{arctg}\,(x)$$

Estos ejemplos se han realizado con SageMath. Se pueden utilizar otros programas de cálculo como WxMaxima.

Al escribir en un celda de WxMaxima

```
f(x):=x^2/((x-1)*(x-2));
partfrac(f(x), x);
```

se obtiene como resultado (hay que pulsar Mayúsc+Enter)

$$f(x) := \frac{x^2}{(x-1)(x-2)}$$
$$-\frac{1}{x-1} + \frac{4}{x-2} + 1$$

Tambien se pueden utilizar algunas páginas web, como `www.wolframalpha.com`, y teclear

```
fractions of  (x^3-7)/(x^2-5x+6)
```

o también

```
integrate (x^3-7)/(x^2-5x+6) by partial fractions
```

Método 3: Integración mediante cambio de variable

Un ejemplo para empezar: calcular una primitiva de $h(x) = x\sqrt{x-5}$. Los métodos anteriores ya vistos no pueden aplicarse: no es una integral inmediata, ni se puede hacer por partes, ni es una función racional... En estos caso hay una alternativa que funciona para esta función h y para otras muchas. Se trata de hacer transformaciones hasta conseguir escribir h como una expresión que tenga una primitiva conocida.

Si se eligen las funciones $f(x) = 2x^5/5 + 10x^3/3$ y $g(x) = \sqrt{x-5}$, se puede comprobar que $h(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$. Esto es un ejercicio sencillo, ya que

$$f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = \frac{2(x-5)^2 + 10(x-5)}{2\sqrt{x-5}} = x\sqrt{x-5} = h(x).$$

Por tanto

$$\int h(x)\,dx = \int f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\,dx = f\big(g(x)\big) + C.$$

[Como ejercicio, en este caso también podrían haberse elegido las funciones $g(x) = x-5$ y $f(x) = 2x^{5/2}/5 + 10x^{3/2}/3$ para obtener $h(x) = f'(g(x))g'(x)$.]

Este tipo de expresiones $f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$ tienen siempre como primitiva $f\big(g(x)\big)$. Es la aplicación directa de la regla de la cadena: $\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Si se escribe $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)dx$, y la igualdad anterior queda como

$$\int h(x)\,dx = \int f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\,dx = \int f'(u)\,du = f(u) + C = f\big(g(x)\big) + C.$$

Por tanto,

$$\int h(x)\,dx = \int x\sqrt{x-5}\,dx = \int f'(u)\,du = \frac{2}{5}u^5 + \frac{10}{3}u^3 = \frac{2}{5}(x-5)^{5/2} + \frac{10}{3}(x-5)^{3/2} + C.$$

Descripción teórica del método: esta forma de proceder se conoce como método de integración mediante cambio de variable. Es una consecuencia de la regla de la cadena. De forma más general, puede explicarse así:

Sea h una función definida en algún intervalo $[a, b]$ de la que se desconoce cómo expresar su primitiva. Si h es $\mathscr{R}$-integrable (esto ocurre por ejemplo si h es continua), su primitiva es la función $x \longrightarrow \int_a^x h(t)\,dt$, pero en muchos casos no se sabe cómo escribir esta primitiva.

El método mediante cambio de variable consiste en encontrar funciones f y g tales que $h(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$. Todas las funciones h que puedan escribirse así tienen una primitiva, que es la función $f\big(g(x)\big)$. En ese caso se tendrá

$$\int_a^x h(t)\,dt \;=\; \int_a^x f'(g(t)) \cdot g'(t)\,dt \;=\; f(g(x)) - f(g(a)),$$

o también

$$\int h(x)\,dx \;=\; \int f'(g(x)) \cdot g'(x)\,dx \;=\; f(g(x)) + C.$$

Esto dice que la primitiva buscada de h es la función $f \circ g$, como consecuencia directa de la regla de la cadena: $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g' = h$.

Se suele resumir el cambio escribiendo la expresión de la función g como $u = g(t)$, y de ahí el nombre de *cambio de variable*, ya que aparece una nueva variable u que es función de la que ya existe. Como $u = g(t)$ entonces $du = g'(t)dt$. Una vez que se decide qué función es g, la función f ya queda determinada para que se cumpla $h = (f' \circ g) \cdot g'$. Por supuesto, el nombre de la nueva variable es arbitrario: u, t, w o como se quiera llamar.

Este método se puede establecer formalmente en un resultado conocido como teorema de cambio de variable o fórmula de sustitución.

Teorema (cambio de variable). *Si f' y g' son continuas, entonces*

$$\int_{g(a)}^{g(x)} f' \;=\; \int_a^x (f' \circ g) \cdot g', \quad \textit{es decir,} \quad \int_{g(a)}^{g(x)} f'(u)\,du \;=\; \int_a^x f'(g(t)) \cdot g'(t)\,dt.$$

Demostración. Los cálculos son sencillos:

$$\int_{g(a)}^{g(x)} f'(u)\,du \;=\; f(g(x)) - f(g(a)).$$

Por otra parte $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$, y así $f \circ g$ es una primitiva de $(f' \circ g) \cdot g'$, con lo que se tiene

$$\int_a^x f'(g(t)) \cdot g'(t)\,dt \;=\; (f \circ g)(x) - (f \circ g)(a) \;=\; f(g(x)) - f(g(a))$$

y se termina la demostración. □

Ejemplo. Calcular una primitiva de $h(x) = \operatorname{sen}^5 x \cdot \cos x = (\operatorname{sen} x)^5 \cdot \cos x$ (es una integral inmediata, aunque se va a hacer con un cambio de variable).

Se elige $g(x) = \operatorname{sen} x$ y $f(x) = x^6/6$. Entonces se tiene $h(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Llamando $t = g(x)$ se tiene $dt = g'(x)dx$ y

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cdot \cos x\,dx \;=\; \int f'(g(x)) \cdot g'(x)\,dx \;=\; \int f'(t)\,dt \;=\; \frac{t^6}{6} + C.$$

Por último, como $t = g(x) = \operatorname{sen} x$, se tiene

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cdot \cos x\,dx \;=\; \frac{\operatorname{sen}^6 x}{6} + C.$$

Descripción práctica del método: lo habitual en este tipo de cálculos es sólo indicar cuál es la elección de la función g expresando $t = g(x)$. La función f queda determinada a partir de aquí. Muchas veces no se hace ninguna mención a esta función f ni se dice explícitamente qué función es. Para el ejemplo anterior se suele decir "calcular una primitiva de $\operatorname{sen}^5 x \cdot \cos x$ mediante el cambio $t = \operatorname{sen} x$."

Se trata pues de transformar una función con primitiva desconocida en otra con primitiva conocida haciendo un cambio adecuado $t = g(x)$, donde t es una nueva variable. Si el cambio es acertado, la función original se transforma en una función de una nueva variable t cuya primitiva se sabe calcular. A veces el cambio $t = g(x)$ se expresa mediante su función inversa $x = g^{-1}(t)$. Por último, la nueva variable se cambia por la original en el resultado final.

No es fácil la elección de la función g (y por tanto de la función f) que hagan posible el cálculo de la primitiva. Sin embargo es posible estudiar varias técnicas que ayudan a la elección del cambio apropiado.

Ejemplo (del comienzo de esta sección). Haciendo $t = \sqrt{x-5}$ se tiene

$$\int x\sqrt{x-5}\;dx \;=\; \int (t^2+5)\cdot t \cdot 2t\,dt$$

ya que $t^2 = x-5$ y así $dx = 2tdt$. Luego

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x-5}\;dx \;&=\; \int (t^2+5)\cdot t\cdot 2t\,dt \;=\; 2\left(\frac{t^5}{5}+\frac{5t^3}{3}\right)+C \\ &=\; \frac{2}{15}(x-5)^{3/2}(3x+10)+C \end{aligned}$$

deshaciendo el cambio, es decir, cambiando t por su valor $t = (x-5)^{1/2}$.

Ejemplo. Mediante el cambio $t = \sqrt{x}$ (equivalentemente, $t^2 = x$ y $2tdt = dx$) se tiene

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} \;=\; \int \frac{2t\,dt}{t^2+t} \;=\; \int \frac{2\,dt}{t+1} \;=\; 2\log(t+1)+C \;=\; 2\log(\sqrt{x}+1)+C.$$

En este ejemplo, las funciones $g(x) = \sqrt{x}$ y $f(x) = 2\log(x+1)$ son las que hacen $\frac{1}{x+\sqrt{x}} = f'(g(x))g'(x)$, y así, la primitiva es $f(g(x))$.

Con ese mismo cambio se puede calcular $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx = x + 4\sqrt{x} + 4\log|\sqrt{x}-1| + C$.

Ejemplo. Algo similar, como $t = \log x$ no funciona para hacer el cálculo de

$$\int \frac{dx}{\log x} \;=\; \int \frac{e^t\,dt}{t} \;=\; \ldots$$

ya que no se obtiene una función con primitiva conocida. Para esta integral no es fácil saber si hay algún cambio que la transforme en una función con primitiva conocida.

► Conviene recordar algunas fórmulas trigonométricas esenciales, como

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a \;&=\; 1 \\ \operatorname{sen}(a \pm b) \;&=\; \operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b \\ \cos(a \pm b) \;&=\; \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \end{aligned}$$

Departamento de Matemáticas Universidad de Extremadura

En particular, $\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = 2\cos^2 a - 1$, de donde se obtiene

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}, \qquad \operatorname{sen}^2 a = 1 - \cos^2 a = 1 - \frac{1+\cos 2a}{2} = \frac{1-\cos 2a}{2}.$$

Estas fórmulas permiten calcular primitivas de las funciones $\operatorname{sen}^2 x$ y $\cos^2 x$.

Ejemplo. Mediante el cambio $x = \operatorname{sen} t$ (así $dx = \cos t dt$) se tiene

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}}\cos t\,dt &= \int \operatorname{sen}^2 t\,dt = \int \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left(t - \frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right) + C \\ &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen} x - x\sqrt{1-x^2}\right) + C\end{aligned}$$

Ejemplo. Para el cálculo de

$$\int \operatorname{sen} x^2\,dx$$

no se conoce ningún cambio que funcione (es una función elemental cuya primitiva no es elemental)

Ejemplo. Haciendo $e^x = t$ (así $e^x dx = tdx = dt$) se tiene

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x - 3e^{2x}}{1+e^x}dx = \int \frac{t-3t^2}{1+t}\frac{dt}{t} &= \int \frac{1-3t}{1+t}dt = \int \left(-3 + \frac{4}{1+t}\right)dt \\ &= -3t + 4\log(1+t) + C = -3e^x + 4\log(1+e^x) + C\end{aligned}$$

¿Cómo elegir el cambio adecuado? Estos ejemplos muestran que la dificultad está en saber cuál es el cambio que funciona, aquel que permite calcular la primitiva de una función. Una vez que se conoce que cierto cambio sí funciona, la mecánica del cálculo es sencilla. Por este motivo se suelen estudiar ciertos tipos de funciones y aprender cuáles son los cambios de variables que permiten calcular sus primitivas.

En los siguientes apartados aparecen cambios que se deben conocer para calcular la primitiva. Se suelen clasificar y estudiar según sean las funciones que aparecen en la integral: que sea racional, trigonométrica, par, impar... Para ello es preciso conocer ciertos conceptos.

Definición. Una función racional en α es una función cociente de polinomios

$$R(\alpha) = \frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}.$$

Una función racional en las variables $\alpha, \beta, \ldots$ es un cociente de funciones polinómicas

$$R(\alpha,\ \beta, \ldots) = \frac{P(\alpha,\ \beta, \ldots)}{Q(\alpha,\ \beta, \ldots)}.$$

Por ejemplo, una función racional en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ es

$$R(\operatorname{sen} x,\ \cos x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos x + \operatorname{sen} x \cos x + 2}{\cos^2 x + 4}.$$

Departamento de Matemáticas Universidad de Extremadura

Se dice que una función racional $R(\alpha, \beta)$ es par en α si $R(-\alpha, \beta) = R(\alpha, \beta)$. Se dice que es impar en α si $R(-\alpha, \beta) = -R(\alpha, \beta)$. De forma análoga se define par o impar en β.

Por ejemplo,

- $R(\operatorname{sen} x, \cos x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos x$ es par en $\operatorname{sen} x$, pero no es ni par ni impar en $\cos x$. Es par en $\operatorname{sen} x$ puesto que si se cambia $\operatorname{sen} x$ por $-\operatorname{sen} x$, el valor de R no cambia.
- $R(\operatorname{sen} x, \cos x) = \operatorname{sen} x \cos^2 x$ es impar en $\operatorname{sen} x$ y par en $\cos x$. Es impar en $\operatorname{sen} x$ ya que si se cambia $\operatorname{sen} x$ por $-\operatorname{sen} x$, el valor de R cambia de signo.
- $R(\operatorname{sen} x, \cos x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ no es ni par ni impar en ambos. No es ni par ni impar en $\operatorname{sen} x$ pues al cambiar $\operatorname{sen} x$ por $-\operatorname{sen} x$ el valor de R ni se mantiene ni cambia de signo.

Cambios que hay que hacer según sea la función que aparece en la integral

A continuación se muestran los cambios que se hacen para poder calcular una primitiva de $f(x)$ en varios casos, que se agrupan según sea esa función. Por supuesto, si $f(x)$ tiene varios sumandos, a cada uno de ellos se le aplica el cambio correspondiente.

A) Función racional de potencias racionales de x.

Es una expresión racional del tipo

$$\int R\left[x^{p_1/q_1}, x^{p_2/q_2}, \ldots\right] dx$$

donde R es una función racional y $p_1/q_1, p_2/q_2$ son números racionales. Para el cálculo de su primitiva se hace el cambio

$$x = t^m$$

donde $m = \operatorname{mcm}\{q_1, q_2, \ldots\}$. Un ejemplo de este tipo es el ya visto al calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$.

Ejemplo. Para calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ se hace el cambio $x = t^6$. Así $dx = 6t^5 dt$ y se tiene

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} &= \int \frac{6t^5 dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3 dt}{t+1} = 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right) dt \\ &= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\log\left(\sqrt[6]{x} + 1\right) + C\end{aligned}$$

B) Función racional de potencias racionales de $\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Es una expresión racional del tipo

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1/q_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_2/q_2}, \ldots\right] dx$$

donde R es una función racional y $p_1/q_1, p_2/q_2$ son números racionales. Se hace el cambio

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$$

donde $m = \text{mcm}\{q_1, q_2, \ldots\}$.

Por ejemplo, haciendo el cambio $x+2 = t^6$ se tiene $dx = 6t^5 dt$ y así

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt{x+2}} = \int \frac{(t^6-2)6t^5 dt}{t^4 - t^3} = 6\int \frac{t^8 - 2t^2}{t-1}\,dt$$

que es una integral de una función racional muy sencilla de hacer.

Su valor es $3t^8/4 + 6t^7/7 + t^6 + 6t^5/5 + 3t^4/2 + 2t^3 - 3t^2 - 6t - 6\log(1-t) + C$. Finalmente hay que deshacer el cambio y queda

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt{x+2}} = \frac{3}{4}(x+2)^{4/3} + \frac{6}{7}(x+2)^{7/6} + (x+2) + \frac{6}{5}(x+2)^{5/6} + \frac{3}{2}(x+2)^{2/3}$$
$$+ 2\sqrt{x+2} - 3\sqrt[3]{x+2} - 6\sqrt[6]{x+2} - 6\log\left(1 - \sqrt[6]{x+2}\right) + C.$$

C) Función racional de irracionales cuadráticas

Es una expresión de la forma

$$\int R\left[x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right] dx$$

donde R es una función racional, a, b, c números reales y $a \neq 0$.

Para transformarlas en una integral racional se debe hacer el cambio:

- $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\, x + t$ si $a > 0$
- $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$ si $c > 0$
- Si $a, c < 0$ se escribe $ax^2+bx+c = a(x-r_1)(x-r_2)$ y se hace el cambio $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-r_1)$.

También pueden convertirse en integrales trigonométricas en los siguientes casos:

- $\int R\left[x, \sqrt{a^2-x^2}\right] dx$ se hace $x = a \operatorname{sen} t$ o $x = a\cos t$
- $\int R\left[x, \sqrt{a^2+x^2}\right] dx$ se hace $x = a \operatorname{tg} t$
- $\int R\left[x, \sqrt{x^2-a^2}\right] dx$ se hace $x = \frac{a}{\cos t}$

Ejemplo: con el cambio $\sqrt{1+x+x^2} = x + t$ se tiene

$$x = \frac{t^2-1}{1-2t}, \quad dx = \frac{-2(t^2-t+1)}{(1-2t)^2}dt,$$

y se tiene

$$\int \frac{dx}{(1+x)\ \sqrt{1+x+x^2}} = \int \frac{2dt}{t(t-2)} = -\log t + \log(t-2) + C$$

$$= -\log\left(\sqrt{1+x+x^2} - x\right) + \log\left(\sqrt{1+x+x^2} - x - 2\right) + C$$

Con ese mismo cambio se obtiene

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}} = -\log\left(1 - 2\sqrt{1+x+x^2} + 2x\right) + C.$$

Ejemplo: haciendo el cambio $x = 2\,\mathrm{tg}\, t,\ dx = 2dt/\cos^2 t$ se tiene

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{dt}{\cos t} = \log\left(\frac{1+\operatorname{sen} t}{\cos t}\right) = \log\left(\frac{1}{\cos t} + \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right)$$

$$= \log\left(\sqrt{\frac{x^2}{2}+1} + \frac{x}{2}\right) + C = \log\left(\sqrt{4+x^2} + x\right) + C'$$

ya que

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \log\left(\frac{1+\operatorname{sen} t}{\cos t}\right)$$

como se verá más adelante, en el apartado de primitivas de funciones racionales en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

Ejemplo: haciendo el cambio $x = \operatorname{sen} t,\ dx = \cos(t)dt$ se tiene

$$\int \sqrt{1-x^2}\ dx = \int \cos^2(t)dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt$$

que tiene primitiva elemental.

Como ejercicio adicional, puede comprobarse que si se eligen $g(x) = \operatorname{arcsen} x$ y $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}$, entonces $\sqrt{1-x^2} = f'(g(x))g'(x)$, de donde se obtiene que la primitiva de $\sqrt{1-x^2}$ es $f(g(x))$.

D) Función racional de alguna exponencial

Es una integral del tipo

$$\int R\,[a^x]\,dx$$

y basta hacer el cambio $a^x = t$ para convertirla en una integral racional. Por ejemplo

$$\int \frac{e^x - 3e^{2x}}{1+e^x} dx = \int \frac{1-3t}{1+t} dt$$

después de hacer el cambio $e^x = t, dx = dt/t$.

E) Función racional en $\operatorname{sen} x$ **y** $\cos x$

Es una expresión del tipo

$$\int R\left[\operatorname{sen} x, \cos x\right] dx$$

y se puede convertir en una integral racional con alguno de los siguientes cambios:

- Si $R\left[\operatorname{sen} x, \cos x\right] dx$ es impar en $\cos x$ se hace $\operatorname{sen} x = t$
- Si $R\left[\operatorname{sen} x, \cos x\right] dx$ es impar en $\operatorname{sen} x$ se hace $\cos x = t$
- Si $R\left[\operatorname{sen} x, \cos x\right] dx$ es par en $\operatorname{sen} x, \cos x$ se hace $\operatorname{tg} x = t$
- En cualquier caso funciona el cambio $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Este se aplica sólo cuando no es posible ninguno de los otros, y se tiene

$$\operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

Ejemplo: mediante el cambio $\operatorname{sen} x = t$, se tiene $\cos x\, dx = dt$, $\cos x = \sqrt{1-t^2}$ y así

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{(1+t)(1-t)} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1-t}$$

$$= \log \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}} = \log\left(\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}\right) = \log\left(\frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) + C$$

Ejemplo: para hacer

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\operatorname{sen}^3 x + 2\cos^2 x \operatorname{sen} x}$$

se pueden utilizar los cuatro cambios mencionados. Eligiendo el primero, $\operatorname{sen} x = t$, $\cos x dx = dt$ se tiene

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\operatorname{sen}^3 x + 2\cos^2 x \operatorname{sen} x} = \int \frac{dt}{t^3 + 2(1-t^2)t} = \int \frac{dt}{2t - t^3}$$

que es racional con raíces reales simples.

Otras integrales útiles: productos de senos y cosenos

Son integrales del tipo

$$\int \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx.$$

Para realizar el cálculo se transforman utilizando algunas relaciones trigonométricas. Como

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(A+B) &= \operatorname{sen} A\cos B + \operatorname{sen} B\cos A\\ \operatorname{sen}(A-B) &= \operatorname{sen} A\cos B - \operatorname{sen} B\cos A\end{aligned}$$

al sumar se obtiene

$$\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B) = 2\operatorname{sen} A\cos B$$

y así

$$\int \operatorname{sen} A\cos B = \frac{1}{2}\int [\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)]$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned}\cos(A+B) &= \cos A\cos B - \operatorname{sen} A\operatorname{sen} B\\ \cos(A-B) &= \cos A\cos B + \operatorname{sen} A\operatorname{sen} B\end{aligned}$$

y al sumar y al restar se obtiene

$$\begin{aligned}\cos(A+B) + \cos(A-B) &= 2\cos A\cos B\\ \cos(A+B) - \cos(A-B) &= -2\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B\end{aligned}$$

y por tanto

$$\int \cos A\cos B = \frac{1}{2}\int \big[\cos(A+B) + \cos(A-B)\big]$$

$$\int \operatorname{sen} A\operatorname{sen} B = \frac{1}{2}\int \big[-\cos(A+B) + \cos(A-B)\big]$$

Ejemplos:

$$\int \operatorname{sen} 3x\cos 4x\,dx = \frac{1}{2}\int \big[\operatorname{sen} 7x + \operatorname{sen}(-x)\big]dx = \frac{-\cos 7x}{14} + \frac{\cos x}{2} + C$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int \big[\cos 2x + \cos 0\big]dx = \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{x}{2} + C$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int \big[-\cos 2x + \cos 0\big]dx = \frac{-\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{x}{2} + C$$

Ejercicios interesantes.

a) Es fácil comprobar que $\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{1}{1+2x+2x^2}$, es decir

$$\int \frac{1}{1+2x+2x^2}\,dx = \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1} + C.$$

Por otra parte, utilizando métodos de integración conocidos, se obtiene

$$\int \frac{1}{1+2x+2x^2}\,dx = \int \frac{2\,dx}{2+4x+4x^2} = \int \frac{2\,dx}{1+(1+2x)^2} = \operatorname{arctg}(1+2x) + C.$$

¿Hay dos primitivas distintas de la función $\frac{1}{1+2x+2x^2}$?

b) Se puede calcular la primitiva de $x\sqrt{x+1}$ de dos formas distintas:

1) Por partes (haciendo $u = x,\ dv = \sqrt{x+1}$) y se obtiene

$$\int x\sqrt{x+1}\ dx = \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} + C.$$

2) Con el cambio de variable $u = \sqrt{x+1}$, y entonces

$$\int x\sqrt{x+1}\ dx = -\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} + C.$$

¿Otra función con dos primitivas distintas?

Nota. El teorema de descomposición en fracciones simples puede verse en

Juan A. Navarro, *Álgebra conmutativa básica*, UEx (2014)
Sección 5.2 Fracciones Racionales, pág. 86
► `https://matematicas.unex.es/~navarro/acb.pdf`