Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

4

Cálculo II

Sucesiones y series de funciones

Sucesiones de funciones

En este capítulo se van a estudiar sucesiones (f_n) y series $\sum f_n$ cuyos términos son funciones $f_n : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Por ejemplo, se verán sucesiones como $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$ donde $f_1(x) = \operatorname{sen} x$, $f_2(x) = \operatorname{sen} 2x$, $f_3(x) = \operatorname{sen} 3x, \ldots, f_n(x) = \operatorname{sen} nx, \ldots$, todas definidas en algún dominio común. Estas sucesiones (y series) de funciones se llaman sucesiones (y series) funcionales.

Aparte de presentar una mayor complejidad, una de las diferencias entre las sucesiones funcionales y las sucesiones numéricas es la existencia para las primeras de más tipos de convergencia: puntual, uniforme...

Ejemplos:

A) Se puede considerar la sucesión de funciones

$$f_1(x) = 1, \;\; f_2(x) = 1 + x, \;\; f_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}, \;\; f_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}, \ldots$$

Es evidente que en $x = 0$ la sucesión $(f_n(0))$ va tomando los valores $(1, 1, 1, \ldots)$, con lo que es convergente. Para $x = 1$ se obtiene la sucesión

$$\left(1, \;\; 1+1, \;\; 1+1+\frac{1}{2!}, \;\; 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}, \ldots\right)$$

cuyo límite es e.

B) La sucesión de funciones

$$f_1(x) = x, \;\; f_2(x) = 1 - x, \;\; f_3(x) = x, \;\; f_4(x) = 1 - x, \;\; f_5(x) = x, \ldots$$

converge sólo para $x = 1/2$. Para cualquier otro valor x, la sucesión

$$(f_n(x)) \;=\; (x, \; 1-x, \; x, \; 1-x, \; x, \; 1-x, \ldots)$$

no converge: la diferencia de términos consecutivos es $|1 - x - x| = |1 - 2x|$, que no tiende a cero.

25 · 03 · 2026

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

C) La sucesión de funciones

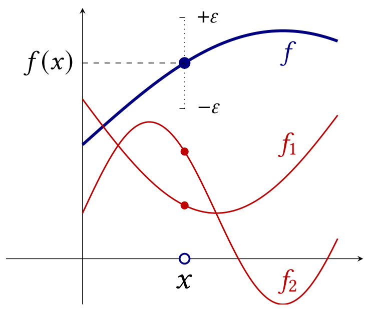
$$f_1(x) = 1,\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = x^2,\ f_4(x) = x^3, \ldots$$

converge para algunos valores de x, como $x = 0$, $x = 0.79$ o $x = 1$, pero no converge para otros, como $x = -1$ o $x = 6$.

D) Hay sucesiones de funciones que no convergen en ningún punto, como las funciones constantes $f_n(x) = n$.

Definición. Se consideran las funciones $f_n : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Se dice que la sucesión (f_n) *converge puntualmente* a la función $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ si en cada $x \in A$ la sucesión $(f_n(x))$ converge a $f(x)$, es decir, si

$$\forall x \in A,\ f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$



Esto significa que

$$\forall x \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \nu \in \mathbb{N}\ :\ n > \nu\ \Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)|\ <\ \varepsilon.$$

En la definición queda claro que el valor ν depende de x y de ε. Es frecuente escribir $\nu_{x,\varepsilon}$ en lugar de ν para resaltar esta dependencia.

La convergencia puntual se denota mediante $f_n \xrightarrow{p} f$. Debería ser $(f_n) \xrightarrow{p} f$, pero por comodidad se utiliza la primera forma.

Suele ser fácil comprobar que una sucesión converge puntualmente. Para ver que $f_n \xrightarrow{p} f$ en A se trata de comprobar que para cualquier $x \in A$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Ejemplo. La sucesión de funciones $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = 1 + x$, $f_3(x) = 1 + x + x^2, \ldots$ ¿Converge puntualmente en $[0, 1)$? Se trata de comprobar si para cada $x \in [0, 1)$ los valores que van tomando las funciones en ese punto convergen a algún valor.

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$\cdots$
$x = 0$	1	1	1	$\cdots \longrightarrow 1$
$x = \frac{1}{2}$	1	$1 + \frac{1}{2}$	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	$\cdots \longrightarrow 2$
$x = \frac{8}{10}$	1	$1 + \frac{8}{10}$	$1 + \frac{8}{10} + \frac{8^2}{10^2}$	$\cdots \longrightarrow 5$

Para cada $x \in [0, 1)$ se trata de comprobar si existe $\lim_{n\to\infty} \left(1 + x + x^2 + \cdots + x^n\right)$. La respuesta es afirmativa. Ese valor es la suma de una serie geométrica de razón x (que es una serie sumable si $|x| < 1$)

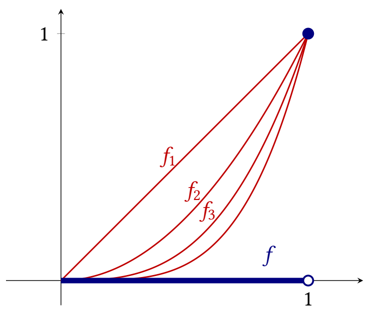
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + x + x^2 + \cdots + x^n\right) = \frac{1}{1 - x}.$$

Luego la sucesión (f_n) converge puntualmente en $[0,1)$ a la función $f(x) = 1/(1-x)$.

Ejemplos: **a**) La sucesión de funciones $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1-x$, $f_3(x) = x$, $f_4(x) = 1-x$, …no converge puntualmente. **b**) La sucesión $f_n(x) = n$ tampoco. **c**) En cambio, en el intervalo $[0,+\infty)$ la sucesión $f_n(x) = x/n$ converge puntualmente a la función $f = 0$.

Ejemplo. La sucesión de funciones

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = x^3,\ f_4(x) = x^4, \dots$$



es decir,

$$f_n : x \in [0,1] \longrightarrow f_n(x) = x^n \in \mathbb{R}$$

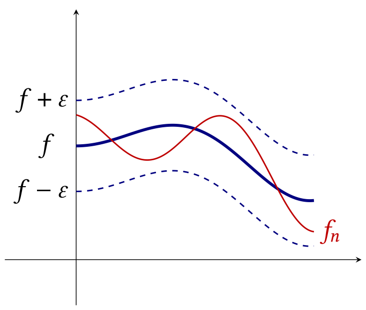
converge puntualmente a la función

$$f : x \in [0,1] \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 1 \\ 0 & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

La convergencia puntual se prueba fácilmente:

- si $0 \le x < 1$ entonces $f_n(x) = x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 = f(x)$;
- si $x = 1$ entonces $f_n(x) = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 = f(1)$.

Este ejemplo muestra funciones continuas (y diferenciables) cuyo límite puntual no lo es. Hace falta añadir algo a la convergencia puntual para poder asegurar que el carácter continuo de las funciones involucradas no se pierde en el paso al límite.



Definición. La sucesión (f_n) *converge uniformemente* a f en A si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists \nu \in \mathbb{N}\ :\ n > \nu \ \Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (\forall x \in A).$$

En la definición se observa que ν sólo depende de ε, y es válido para cualquier $x \in A$.

La convergencia uniforme se denota $f_n \xrightarrow{u} f$. Gráficamente significa que en cada *banda* que rodea a f de radio ε (delimitada por las funciones $f \pm \varepsilon$) están todas las gráficas de las funciones f_n a partir de un índice.

La convergencia uniforme $f_n \xrightarrow{u} f$ se puede escribir de varias formas, que son todas equivalentes:

a) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \nu \in \mathbb{N}\ :\ n > \nu \ \Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (\forall x \in A),$

b) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \nu \in \mathbb{N}\ :\ n > \nu \ \Rightarrow\ \sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$, donde $\delta_n = \sup |f_n - f| = \sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|,$

d) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \nu \in \mathbb{N}\ :\ n > \nu \ \Rightarrow\ f_n \in B(f, \varepsilon),$

donde $B(f,\varepsilon)$ es la banda que rodea a f de radio ε:

$$
\begin{aligned}
B(f,\varepsilon) &= \{g : A \longrightarrow \mathbb{R} \;:\; f-\varepsilon \;\le\; g \le f+\varepsilon\} \\
&= \{g : A \longrightarrow \mathbb{R} \;:\; f(x)-\varepsilon \;\le\; g(x) \;\le\; f(x)+\varepsilon \;\; (\forall x \in A)\} \\
&= \{g : A \longrightarrow \mathbb{R} \;:\; |g(x)-f(x)| \;\le\; \varepsilon \;\; (\forall x \in A)\} \\
&= \{g : A \longrightarrow \mathbb{R} \;:\; \sup_{x\in A} |g(x)-f(x)| \;\le\; \varepsilon\}
\end{aligned}
$$

La convergencia puntual y la convergencia uniforme pueden expresarse como

$$
\begin{aligned}
f_n \xrightarrow{p} f \text{ en } A \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x)-f(x) = 0 \quad (\text{para cada } x \in A), \\
f_n \xrightarrow{u} f \text{ en } A \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \delta_n = 0 \quad (\delta_n = \sup_{x\in A} \big|f_n(x)-f(x)\big|).
\end{aligned}
$$

Es evidente que $f_n \xrightarrow{u} f \;\Rightarrow\; f_n \xrightarrow{p} f$ (y por tanto no puede haber dos límites distintos). La prueba es sencilla:

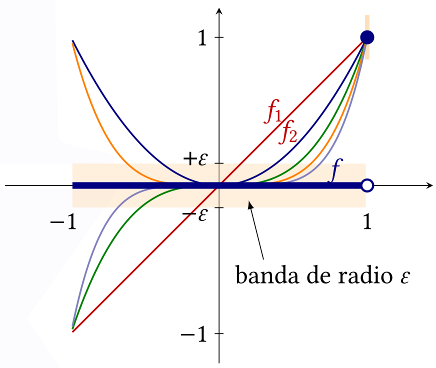
$$
\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} \big|f_n(x)-f(x)\big| = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \big|f_n(x)-f(x)\big| = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} f_n(x)-f(x) = 0
$$

en cada $x \in A$. En el lenguaje $\varepsilon - \nu$, la convergencia uniforme es la convergencia puntual en la que *además* puede elegirse el mismo valor ν para todos los valores $x \in A$.

Sin embargo, existen sucesiones que convergen puntualmente pero no uniformemente. Si $f_n \xrightarrow{p} f$, la sucesión (f_n) puede ser o no uniformemente convergente; pero, en caso de serlo, su único posible límite uniforme es precisamente el límite puntual f.

Ejemplo. La sucesión de funciones $f_n(x) = x^n$ converge puntualmente en $(-1,\ 1]$ a la función

$$
f : x \in (-1,1] \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 1, \\ 0 & \text{si} \quad x < 1. \end{cases}
$$



Por otra parte, $f_n \overset{u}{\not\longrightarrow} f$. Esto es fácil de ver, ya que $\delta_n = 1$ para todo n. Otra forma de comprobarlo: si f se rodea con una banda de radio ε, en esa banda no está la gráfica de ninguna función f_n (en esa banda deberían estar todas salvo una cantidad finita de ellas para tener la convergencia uniforme).

Cómo comprobar la convergencia uniforme. De la definición se sigue que $f_n \xrightarrow{u} f$ en A si y sólo si $\delta_n = \sup_{x\in A} |f_n(x)-f(x)| \longrightarrow 0$ para $n \to \infty$. Esta comprobación no suele ser difícil: se calcula el límite puntual de (f_n), si existe. Después se halla el valor máximo de la función $f_n - f$. Este valor máximo se puede encontrar haciendo la derivada e igualando a 0, o también por simple observación cuando las funciones son sencillas,… Si ese valor máximo tiende a cero, entonces hay convergencia uniforme. En otro caso, no. Unos ejemplos (varios pueden verse con más detalle en las hojas de ejemplos y ejercicios) de sucesiones de funciones:

a) $f_n(x) = (-1)^n x$ no converge puntualmente en ningún intervalo. Por tanto tampoco converge uniformemente.

b) $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} nx}{n}$ converge uniformemente (y por tanto puntualmente) a la función $f = 0$. Los cálculos son muy sencillos.

c) $f_n(x) = \dfrac{x+n}{n}$ converge puntualmente a la función constante $f = 1$ en $[0, +\infty)$. Sin embargo no converge uniformemente.

d) $f_n(x) = nx(1-x)^n$ converge puntualmente en $[0,1]$ a la función $f = 0$. La función $f_n - f$ alcanza el valor máximo en $x = 1/(n+1)$. Ese valor máximo es $\max\limits_{x\in[0,1]}(f_n - f) = (\frac{n}{n+1})^{n+1} \to 1/e$, para $n \to \infty$, y no tiende a cero. Por tanto, f_n no converge uniformemente. Cálculos similares prueban que la sucesión $g_n(x) = nx^n(1-x)$ converge puntualmente a $f = 0$ pero no uniformemente.

e) $f_n(x) = x^n(1-x)$ converge puntualmente a la función $f = 0$ en $[0,1]$. Eso es fácil de comprobar. Para ver la convergencia uniforme se calcula el valor máximo de $f_n - f$. Este valor se alcanza en $x = n/(1+n)$ y por tanto es $\max\limits_{x\in[0,1]}(f_n - f) = (\frac{n}{n+1})^n \frac{1}{n+1}$. Como este valor tiende a 0 para $n \to \infty$, se tiene que f_n converge uniformemente a 0.

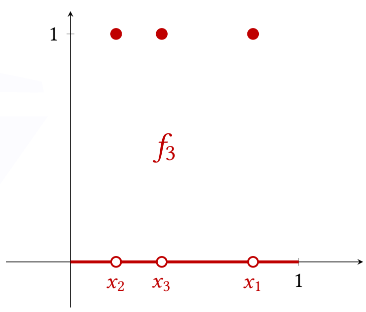
f) $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$ y $g_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$ convergen puntual y uniformemente a la función $f = 0$ en $[0, +\infty)$. Es un buen ejercicio dibujar las gráficas de estas funciones f_n y g_n para entender mejor qué ocurre.

Ejemplo. Las funciones

$$f_n : x \in [0,1] \longrightarrow f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 1/n \\ 0 & \quad\;\; \text{resto} \end{cases}$$

convergen puntualmente a la función $f = 0$, pero no uniformemente. La convergencia puntual es sencilla de comprobar: si $x \in [0,1]$, entonces todos los valores $f_n(x)$ son iguales a cero, salvo en un sólo caso: $f_n(1/n) = 1$. Que no convergen uniformemente se sigue del hecho que f_n vale 1 en un punto en el que f vale 0.

Ejemplo. Si denotamos a los números racionales de $[0,1]$ como $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ (esto puede hacerse ya que los racionales forman un conjunto numerable), las funciones



$$f_n : x \in [0,1] \longrightarrow f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = x_1, \dots, x_n \\ 0 & \quad\;\; \text{resto} \end{cases}$$

convergen puntualmente a la función de Dirichlet

$$f : x \in [0,1] \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Esto es fácil de comprobar:

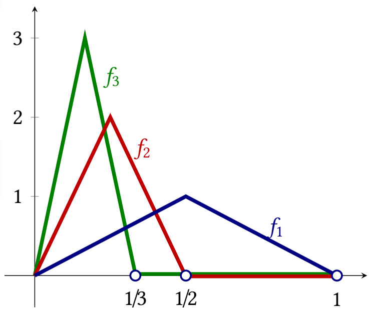
- si $x \in [0,1]$ es racional, entonces $x = x_k$ para un cierto k y así $f_n(x) = 1$ para $n \geq k$;
- si $x \in [0,1]$ es irracional entonces $f_n(x) = 0$ para todo n.

Por otra parte, es fácil comprobar que la convergencia no es uniforme: basta notar que f_n toma el valor 0 en muchos valores racionales mientras que f vale 1 en todos esos valores.

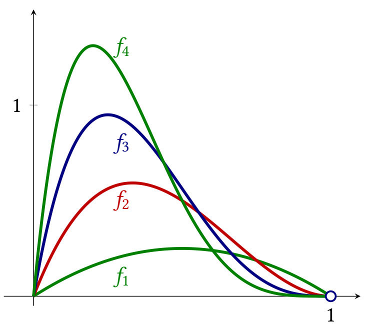
Además, este ejemplo muestra que las funciones f_n pueden ser Riemann-integrables (son continuas casi siempre), pero el límite puntual no lo es (es una función esencialmente discontinua).

[Con la integral de Lebesgue no ocurren estas «anomalías». Si una sucesión (f_n) de funciones Lebesgue integrables convergen puntualmente a una función f en A, bajo hipótesis no demasiado fuertes se puede asegurar que esta última función f es integrable y además $\int_A f_n \to \int_A f$. Se conocen como teoremas de la convergencia monótona y convergencia dominada y marcan una gran diferencia entre la integral de Riemann y la de Lebesgue.]

Ejemplo (joroba deslizante y creciente). Se consideran las funciones f_n cuyas gráficas son triángulos de área $1/2$, tal y como se muestra en la figura de la derecha.
Estas funciones convergen puntualmente a la función $f = 0$. Todas son Riemann integrables. Sin embargo, ni siquiera en este caso la integral del límite (puntual) es el límite de las integrales, ya que $\int_0^1 f_n = \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero $\int_0^1 f = 0$, es decir, para el límite puntual se tiene



$$\frac{1}{2} = \lim_n \int_0^1 f_n \neq \int_0^1 \lim_n f_n = \int_0^1 f = 0.$$



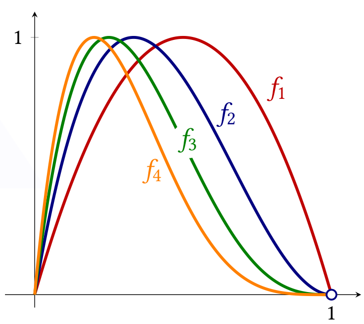
Ejemplo (otra joroba deslizante y creciente). La sucesión de funciones $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$ converge puntualmente a $f(x) = 0$ en $[0,1]$. Sin embargo

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = n^2 \int_0^1 x(1-x)^n\,dx = n^2 \int_0^1 (1-t)t^n\,dt$$

$$= \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2}{n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Esto prueba otra vez que el límite de las integrales no es igual a la integral del límite (en la convergencia puntual). Las operaciones *integración* y *límite puntual* no pueden ser intercambiadas.

Ejemplo (joroba deslizante no creciente). La gráfica muestra funciones f_n, todas acotadas por el mismo valor, que convergen puntualmente a la función 0, pero que no convergen uniformemente. Se puede hacer una construcción parecida utilizando funciones cuyas gráficas sean triángulos, similar a los de la gráfica del ejemplo anterior sólo que todos con la misma altura.
Estas funciones no convergen uniformemente. El único límite uniforme posible es el límite puntual $f = 0$, pero $\max(f_n - f) = 1$ para todo n.



Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Propiedades fundamentales de la convergencia uniforme

Teorema (convergencia uniforme y continuidad). *El límite uniforme de funciones continuas es una función continua: si cada f_n es continua y $f_n \xrightarrow{u} f$ entonces f es continua.*

Demostración. Sean $f_n, f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con f_n continua y $f_n \xrightarrow{u} f$. Se trata de ver que f es continua en cada $a \in A$, es decir, que se verifica $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Si $x \in A$ se puede escribir

$$|f(x) - f(a)| \;\le\; |f(x) - f_n(x)| \;+\; |f_n(x) - f_n(a)| \;+\; |f_n(a) - f(a)|,$$

donde n puede ser cualquiera. Por tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} |f(x) - f(a)| \;&\le\; \lim_{x\to a} |f(x) - f_n(x)| \;+\; \lim_{x\to a} |f_n(x) - f_n(a)| \;+\; \lim_{x\to a} |f_n(a) - f(a)| \\ &\le\; \delta_n + 0 + \delta_n,\end{aligned}$$

donde $\delta_n = \sup |f_n - f|$. Por la convergencia uniforme se tiene $\lim_{x\to a} |f(x) - f(a)| = 0$, es decir, f es continua en a. □

Otra demostración alternativa: como $\delta_n = \sup |f_n - f|$, entonces $f_n - \delta_n \le f \le f_n + \delta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $x \in A$, entonces

$$f_n(x) - \delta_n \;\le\; f(x) \;\le\; f_n(x) + \delta_n.$$

Tomando límite cuando $x \to a$ se tiene

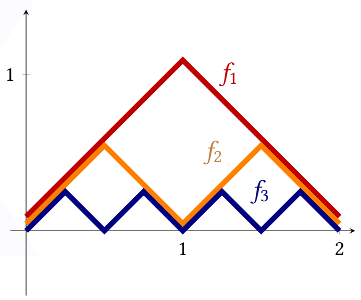
$$f_n(a) - \delta_n \;\le\; \lim_{x\to a} f(x) \;\le\; f_n(a) + \delta_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por último, si $n \to \infty$, entonces $f_n(a) \to f(a)$, $\delta_n \to 0$ y, en consecuencia,

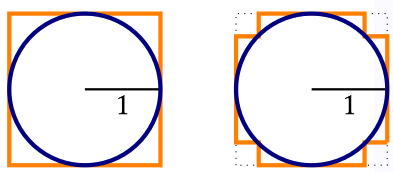
$$\lim_{x\to a} f(x) \;=\; f(a).$$ □

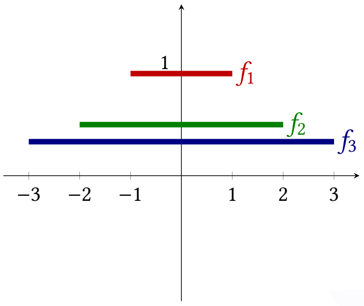
La convergencia uniforme conserva la continuidad y, como se verá más adelante, otras propiedades de las funciones f_n. Sin embargo hay ejemplos que delimitan hasta dónde llega esta conservación de propiedades mediante la convergencia uniforme.

Ejemplo. Las funciones f_n representadas tienen todas sus gráficas con la misma longitud (igual a $2\sqrt{2}$) y convergen uniformemente a una función (la función cero) cuya gráfica tiene una longitud distinta (igual a 2).
La longitud de las gráficas no se conserva mediante la convergencia uniforme. Un engaño frecuente consiste en convencer al lector o al oyente que estas longitudes sí se conservan mediante el paso al límite, y así $2\sqrt{2} = \text{long}(f_n) \to 2$, con lo que aparentemente se demuestra que $\sqrt{2} = 1$.



Un ejemplo similar se utiliza para «probar» que $\pi = 4$, haciendo converger recintos de longitud 8 (en color naranja se han dibujado los dos primeros) hacia un círculo de radio 1 (en azul). Aparentemente se llega a que 2π es el límite de esas longitudes, y por tanto $\pi = 4$.





Ejemplo. Las funciones

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/n & \text{si} \quad |x| \le n \\ 0 & \text{si} \quad |x| > n \end{cases}$$

convergen uniformemente a la función 0. Se verifica además que

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \;=\; 2 \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Este ejemplo muestra que con la convergencia uniforme no se da siempre que la integral del límite sea el límite de las integrales:

$$f_n \xrightarrow{u} f \quad \text{y} \quad 2 \;=\; \lim \int_{\mathbb{R}} f_n \;\neq\; \int_{\mathbb{R}} \lim_n f_n \;=\; \int_{\mathbb{R}} 0 \;=\; 0.$$

Teorema (convergencia uniforme e integrabilidad Riemann). *Si $f_n \xrightarrow{u} f$ en $[a,b]$ y cada f_n es acotada y $f_n \in \mathscr{R}[a,b]$, entonces $f \in \mathscr{R}[a,b]$ y además*

$$\left(\int_a^b f_n\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f.$$

Se suele expresar también como

$$\int_a^b \lim_u f_n \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Se podría representar este teorema mediante el diagrama siguiente: si cada f_n es Riemann integrable entonces tambien lo es f y las integrales convergen a la integral de f:

$$\begin{array}{ccc} f_n & \xrightarrow{\quad u \quad} & f \\ \downarrow & & \downarrow \\ \int_a^b f_n & \xrightarrow{\qquad} & \int_a^b f \end{array}$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como $f_n \xrightarrow{u} f$, entonces es trivial comprobar que f es una función acotada. Para probar que $f \in \mathscr{R}[a,b]$ se trata de encontrar una partición $P \in \mathscr{P}[a,b]$ para la cual se verifique $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

Sea $\delta_n = \sup |f_n - f|$. Es evidente que $f_n - \delta_n \le f \le f_n + \delta_n$, y así se tiene

$$L(f_n - \delta_n, P) \;\le\; L(f,P) \;\le U(f,P) \;\le\; U(f_n + \delta_n, P).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} U(f,P) - L(f,P) &\le U(f_n+\delta_n,P) - L(f_n-\delta_n,P) \\ &= \sum_k M_k(f_n+\delta_n)\,\Delta_k \;-\; \sum_k m_k(f_n-\delta_n)\,\Delta_k \\ &= \sum_k \big(M_k(f_n)+\delta_n\big)\,\Delta_k \;-\; \sum_k \big(m_k(f_n)-\delta_n\big)\,\Delta_k \\ &= U(f_n,P) - L(f_n,P) + 2\delta_n(b-a). \end{aligned}$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Por la convergencia uniforme se elige n suficientemente grande para que $2\delta_n(b-a) < \varepsilon/2$. Para ese n, la función f_n es integrable y existe una partición P con $U(f_n, P) - L(f_n, P) < \varepsilon/2$. En total $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$ y $f \in \mathscr{R}[a, b]$.

Por último

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| \le \int_a^b |f_n - f| \le \delta_n(b-a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

y se termina la demostración. □

La integral de Riemann necesita hipótesis fuertes para pasar al límite: éste debe ser uniforme y sobre un intervalo acotado. En un contexto mucho más amplio, la integral de Lebesgue, que extiende a la integral de Riemann y que permite integrar muchas más funciones, permite hacer el paso al límite con hipótesis más débiles.

Teorema (convergencia dominada de Lebesgue). *Si cada f_n es Lebesgue integrable en A, $f_n \xrightarrow{p} f$ y existe una función g Lebesgue integrable en A con $|f_n| \le g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces f es Lebesgue integrable y* $\lim \int_A f_n = \int_A \lim f_n$.

En el último ejemplo visto, la menor función g que verifica $|f_n| \le g$ para todo n es una función escalonada cuya área en todo $\mathbb{R}$ es infinita. No existe entonces una función integrable que domine a las funciones f_n y no puede aplicarse por tanto este teorema de Lebesgue.

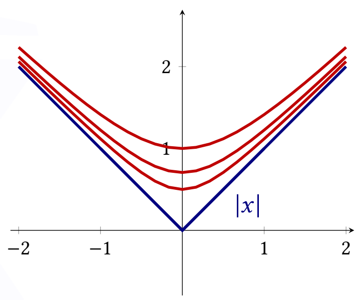
¿Y la convergencia uniforme y derivabilidad? ¿Cabe esperar algún resultado positivo en algún sentido? Por ejemplo, si las funciones f_n son derivables y $f_n \xrightarrow{u} f$. ¿debe ser f derivable? Y si lo es, ¿debe cumplirse que $f_n' \xrightarrow{u} f'$ o al menos $f_n' \xrightarrow{p} f'$?

$$\begin{tikzcd} f_n \arrow[r, "u"] \arrow[d, "'"'] & f \arrow[d, "'"] \\ f_n' \arrow[r, "u"] & f' \end{tikzcd}$$

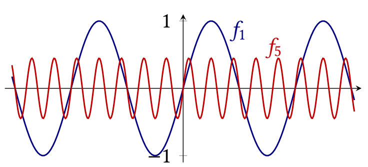
La respuesta a ambas cuestiones es no, como muestran los ejemplos siguientes. En otras palabras, aunque todas las funciones f_n sean derivables y converjan uniformemente, puede ocurrir que la función $\lim_u f_n$ no sea derivable. Y en el caso que lo sea, en general se tiene

$$\left(\lim_n f_n\right)' \neq \lim_n f_n'.$$

Ejemplos. **a**) Las funciones $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$, representadas en color rojo en la gráfica de la derecha, son diferenciables y convergen uniformemente a la función $f(x) = |x|$, que no es diferenciable. Este ejemplo cierra cualquier posibilidad sobre un teorema (similar al probado para la continuidad) del tipo convergencia uniforme y derivabilidad.



En las hojas de ejemplos y ejercicios puede verse cómo justificar la convergencia uniforme de estas funciones.



b) Las funciones $f_n(x) = (\operatorname{sen} nx)/\sqrt{n}$ son todas diferenciables y convergen uniformemente a la función cero (en la gráfica se han representado sólo f_1 y f_5). Sus derivadas son las funciones $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$, que no convergen ni siquiera puntualmente.

c) Las funciones constantes $f_n(x) = n$ cumplen $f_n' \xrightarrow{u} 0$, aunque (f_n) no converge ni siquiera puntualmente.

Estos ejemplos dejan claro que la derivación y la convergencia uniforme no tienen mucho en común. Sin embargo, sí existe un resultado sobre el paso a primitivas, que suele enunciarse como *convergencia uniforme y derivabilidad* y que podría llamarse *convergencia uniforme y primitivas.* Para su enunciado y demostración conviene definir el carácter de Cauchy de una sucesión, tanto puntual como uniforme.

Definición. Dadas las funciones $f_n : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que (f_n) es puntualmente de Cauchy si en cada punto $x \in A$ la sucesión $(f_n(x))$ es de Cauchy. Es decir, si

$$\forall x \in A,\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \ : \ n, m > \nu \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Se dice que (f_n) es uniformemente de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \ : \ n, m > \nu \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (\forall x \in A.)$$

(en este caso el valor ν es el mismo para todos los valores $x \in A$)

Al igual que ocurre con las sucesiones de números reales, una sucesión de funciones es puntualmente de Cauchy si y sólo si es puntualmente convergente. Y una sucesión es uniformemente de Cauchy si y sólo si es uniformemente convergente.

Teorema (convergencia uniforme y derivabilidad). *Sea f_n diferenciable en $[a, b]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si la sucesión de funciones derivadas converge uniformemente, $f_n' \xrightarrow{u} g$, y existe un valor $c \in [a, b]$ en el que $\big(f_n(c)\big)$ es convergente, entonces la sucesión f_n converge uniformemente a una función f derivable, $f_n \xrightarrow{u} f$, y además $f' = g$, es decir,*

$$\Big(\lim_n f_n\Big)' = \lim_n f_n'.$$

$$\begin{tikzcd} f_n \arrow[r, "u"] & f \\ f_n' \arrow[u] \arrow[r, "u"] & g \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Este resultado indica otra forma de probar que una sucesión (f_n) converge uniformemente: mirando qué hacen sus derivadas. Si las funciones derivadas convergen uniformemente $f_n' \xrightarrow{u} g$ y para algún valor $\big(f_n(c)\big)$ es convergente, entonces $f_n \xrightarrow{u} f$ y además $f' = g$.

Demostración. Se trata de probar que (f_n) es uniformemente de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$. La clave de la demostración está en la desigualdad

$$|f_n(x) - f_m(x)| \ \leq \ |(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(c)| \ + \ |(f_n - f_m)(c)|.$$

Por el teorema del valor medio del cálculo diferencial existe $z \in A$ que verifica

$$|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(c)| \ = \ |(f_n - f_m)'(z)| \cdot |x - c| \ \leq \ |(f_n - f_m)'(z)| \cdot |b - a|.$$

Por hipótesis (f_n') es uniformemente convergente y por tanto uniformemente de Cauchy. Luego existe $\nu_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|(f_n - f_m)'(z)| \ \leq \ \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

para $n, m > \nu_1$.

Además, $(f_n(c))$ es convergente, luego es de Cauchy y por tanto existe $\nu_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|(f_n - f_m)(c)| \ \leq \ \frac{\varepsilon}{2}$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

para $n, m > \nu_2$.

En total, si $n, m > \max\{\nu_1, \nu_2\}$ entonces

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(c)| + |(f_n - f_m)(c)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por tanto (f_n) es uniformemente de Cauchy y así existe el límite uniforme, $f_n \xrightarrow{u} f$. Se trata de probar que f es diferenciable y $f' = g$. La demostración es la desigualdad siguiente

$$\left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - g(x)\right| \leq \left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x}\right| + \left|\frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} - f_n'(x)\right| + \left|f_n'(x) - g(x)\right|.$$

Sea entonces $\varepsilon > 0$.

De nuevo por el teorema del valor medio del cálculo diferencial, existe un valor $z \in A$ para el cual

$$\left|\frac{f_m(y) - f_m(x)}{y - x} - \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x}\right| \leq \left|f_m'(z) - f_n'(z)\right| \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

y así

$$\left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

de donde

$$\left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x}\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para n suficientemente grande.

Por hipótesis $f_n' \xrightarrow{u} g$ y por tanto

$$\left|f_n'(x) - g(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para n suficientemente grande.

Se elige entonces n suficientemente grande para que se cumplan las dos estimaciones anteriores. Por hipótesis, f_n es diferenciable y así, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} - f_n'(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

si $|x - y| < \delta$.

Por tanto

$$\left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - g(x)\right| < \varepsilon$$

para $|x - y| < \delta$ y así f es diferenciable y $f' = g$. □

Ejemplo (que muestra que este teorema es cierto solo en intervalos acotados). Las funciones $f_n(x) = x/n$ cumplen las condiciones del teorema, ya que $(f_n(0))$ es convergente y sus derivadas $f_n'(x) = 1/n$ convergen uniformemente a 0 en $\mathbb{R}$. Sin embargo (f_n) no es uniformemente convergente en $\mathbb{R}$, aunque sí lo es en cada intervalo acotado.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Ejemplo Las funciones $f_n(x) = x/n + n^2$ tienen como derivadas a $f_n'(x) = 1/n$, y estas derivadas convergen uniformemente a 0 en $\mathbb{R}$. Sin embargo $(f_n(c))$ no converge en ningún valor $c \in \mathbb{R}$ y el teorema no puede aplicarse.

Ejemplo. Para estudiar la convergencia uniforme de la sucesión $f_n(x) = x - n\cos(x/n^2) + n$ se puede mirar la convergencia puntual y después la convergencia uniforme (probando cómo son esos δ_n). También se puede hacer utilizando este teorema anterior:

a) La sucesión de funciones
$$f_n'(x) = 1 + \frac{1}{n}\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{n^2}$$
converge uniformemente a la función $g(x) = 1$ en $[0, 2\pi]$. Para comprobar esto basta considerar que $\sup_{x\in[0,2\pi]} |f_n'(x) - g(x)| \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ si $n \longrightarrow \infty$. Total, $f_n' \xrightarrow{u} g$ en dicho intervalo.

b) La sucesión $(f_n(0))$ es convergente (es la sucesión $(0, 0, 0, \dots)$)

Por tanto $f_n \xrightarrow{u} f$ en $[0,\ 2\pi]$, donde f es una función que verifica $f' = 1$. Luego $f(x) = x + C$. Como $f(0) = \lim_n f_n(0) = 0$, entonces $f(x) = x$.

Ejercicio: probar directamente esta última convergencia $f_n \xrightarrow{u} f$ en $[0,\ 2\pi]$.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Series de funciones

Dada una sucesión de funciones (f_n), donde $f_n : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, se habla de la serie $\sum_n f_n$ como la sucesión de sumas parciales $(f_1,\ f_1+f_2,\ f_1+f_2+f_3,\dots)$, y se escribe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \;=\; (f_1,\ f_1+f_2,\ f_1+f_2+f_3,\dots) \;=\; f_1+f_2+f_3+f_4+\dots$$

Según que esta sucesión de sumas parciales sea convergente (puntual o uniformemente) se dice que la serie es sumable (puntual o uniformemente).

Ejemplo. Si $f_n(x) = x^n$ para todo $n = 0,1,2,\dots$, la serie es la sucesión $(1, 1+x, 1+x+x^2,\dots)$, y se escribe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \;=\; (1,\ 1+x,\ 1+x+x^2,\dots) \;=\; 1+x+x^2+x^3\dots \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Ejemplo. Si $f_1(x) = x,\ f_2(x) = 1-x,\ f_3(x) = x,\ f_4(x) = 1-x,\dots$ la serie es la sucesión de funciones $(x, 1, 1+x, 2, 2+x, 3, 3+x\dots)$, que se suele escribir como

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \;=\; (x,\ 1,\ 1+x,\ 2,\ 2+x,\ 3,\ 3+x\dots) \;=\; x+(1-x)+x+(1-x)+\dots$$

Definición. Se dice que $\sum_n f_n$ es puntualmente (uniformemente) sumable si la sucesión de sumas parciales $(f_1,\ f_1+f_2,\ f_1+f_2+f_3,\dots)$ es puntualmente (uniformemente) convergente.

El límite puntual o uniforme de esta sucesión de sumas parciales, cuando exista, se llama suma puntual o uniforme de la serie.

Se dice que $\sum_n f_n$ es absolutamente sumable (puntual o uniformemente) si $\sum_n |f_n|$ es sumable (puntual o uniformemente)

Los resultados ya vistos para sucesiones se trasladan ahora para series (puesto que son sucesiones de sumas parciales).

Teorema (sumabilidad uniforme y continuidad). *Si cada f_n es continua y $\sum_n f_n$ es uniformemente sumable, con suma f, entonces f es continua.*

Demostración. Como cada f_n es continua entonces todas las sumas parciales $f_1+\dots+f_n$ también son continuas y convergen uniformemente a f. Por el teorema ya visto para sucesiones, $f = \sum_n f_n = \lim_n (f_1+\dots+f_n)$ es continua. □

Teorema (sumabilidad e integrabilidad Riemann). Si cada $f_n \in \mathscr{R}[a,b]$ y $\sum_n f_n$ es uniformemente sumable, con suma f, entonces $f \in \mathscr{R}[a,b]$ y además

$$\int_a^b f \;=\; \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n.$$

Demostración. Si cada f_n es Riemann integrable en $[a,b]$ entonces todas las sumas parciales $f_1+\dots+f_n$ también lo son y convergen uniformemente a f. Por el teorema ya visto para sucesiones, f es Riemann integrable y

$$\int_a^b f = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} (f_1 + \ldots + f_n) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b (f_1 + \ldots + f_n)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n$$

(la última igualdad es la definición de suma de una serie: el límite de las sumas parciales). □

Teorema (sumabilidad uniforme y derivabilidad). *Sea f_n diferenciable en $[a, b]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si la serie $\sum_n f_n'$ es uniformemente sumable con suma igual a g, y si existe $c \in [a, b]$ tal que $\sum_n f_n(c)$ es sumable, entonces $\sum_n f_n$ es sumable, su suma es una función derivable f que además verifica $f' = g$, es decir,*

$$\left(\sum_n f_n\right)' = \sum_n f_n'.$$

Demostración. Como cada f_n es diferenciable entonces también lo son las funciones $f_1 + \ldots + f_n$ que forman la sucesión de sumas parciales. Por hipótesis, la sucesión $(f_1 + \ldots + f_n)' = f_1' + \ldots + f_n'$ converge uniformemente a g y existe c para el que la sucesión $(f_1(c) + \ldots + f_n(c))$ es convergente. Por el teorema ya visto sobre convergencia uniforme y primitivas, la sucesión $f_1 + \ldots + f_n$ converge uniformemente a una función derivable f, cuya derivada es $f' = g$. □

Hay dos tipos especialmente importantes de series de funciones: las series de potencias y las series trigonométricas.

A) Las series de potencias, que tiene una expresión de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots$$

(es un polinomio infinito escrito en potencias de $(x - a)$).

Las funciones que se pueden escribir como series de potencias son muy regulares (donde estén definidas): son continuas, integrables y se pueden derivar infinitas veces.

B) Las series trigonométricas son de la forma

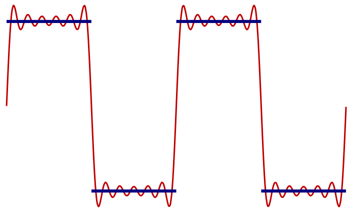
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx\right) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + a_2 \cos 2x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \ldots$$

(es un polinomio trigonométrico infinito). A veces aparecen sólo expresadas con la función coseno: si $\operatorname{tg} \varphi = B/A$ entonces

$$A \cos z + B \operatorname{sen} z = A\left(\cos z + \frac{B}{A} \operatorname{sen} z\right) = A\left(\cos z + \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} \operatorname{sen} z\right)$$
$$= \frac{A}{\cos\varphi} (\cos\varphi \cos z + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} z) = \frac{A}{\cos\varphi} \cos(\varphi - z)$$

Esta cadena de igualdades dice que las combinaciones lineales de senos y cosenos del mismo argumento pueden escribirse sólo como un coseno, o como un seno. Por este motivo a veces las series trigonométricas aparecen de forma distinta.

Las funciones que pueden escribirse como series trigonométricas son una clase muy amplia, prácticamente cualquier función imaginable. El teorema de Carleson, demostrado en 1965, prueba que la serie de Fourier (trigonométrica) de una función de L^2 converge en casi todo punto a la función. (L^2 es un espacio inmenso de funciones, que se verá en cursos posteriores.)
En este curso no se estudiarán series trigonométricas. En `http://es.wikipedia.org/wiki/Serie_de_Fourier`, por ejemplo, pueden verse ejemplos sobre este tipos de series.



Función escalonada y serie de Fourier (hasta grado 4)

Series de potencias. Funciones analíticas

Una serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \;=\; c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots$$

se llama serie de potencias centrada en $a \in \mathbb{R}$ y con coeficientes $c_0, c_1, c_2, \ldots$ Dependiendo de cómo sean estos valores serán las propiedades de la serie: dónde está definida, cómo es la sumabilidad uniforme,...

Ejemplos. **1**) La serie de potencias $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$ está centrada en 0 y sus coeficientes todos son iguales a 1. Para $x = 6$ esta serie no tiene sentido, su suma es $+\infty$; sí tiene sentido para $x = 0$ (su suma sale entonces 1) y para $x = 1/2$ (su suma es 2).

2) La serie de potencias $1 + 2(x+4) + 3(x+4)^2 + 4(x+4)^3 + 5(x+4)^4 + \ldots$ está centrada en -4 y sus coeficientes son $1, 2, 3, 4, \ldots$ Para $x = 6$ o para $x = 0$ esta serie no tiene sentido, su suma es $+\infty$. En cambio, para $x = -4$ su suma es 1.

Sumabilidad puntual: radio de sumabilidad

Para una serie $\sum_n c_n (x-a)^n$ cabe preguntarse para qué valores de x tiene sentido, es decir, cuál es el dominio de definición de $f(x) = \sum_n c_n (x-a)^n$ o, dicho de otra forma, en qué valores x la serie es puntualmente sumable. Evidentemente la serie es sumable para $x = a$ y en ese caso la suma es c_0. Pero, ¿qué ocurre para otro valores? Es posible que para puntos próximos a $x = a$ se obtenga la sumabilidad. Por ejemplo, para $x = a + 1$ la serie es $\sum c_n$ y para $x = a + 2$ la serie que se obtiene es $\sum_n c_n 2^n$. ¿Son sumables éstas dos últimas series? Está claro que la respuesta depende de cómo sean los coeficientes c_n.

Para el estudio de la sumabilidad puntual de la serie de potencias se utiliza el criterio de la raíz, ya visto para series numéricas. Para cada x la serie $\sum_n c_n (x-a)^n$ verifica:

- si $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n (x-a)^n|} \;<\; 1$ entonces la serie es absolutamente sumable,
- si $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n (x-a)^n|} \;>\; 1$ entonces la serie no es sumable,
- si $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n (x-a)^n|} \;=\; 1$ entonces la serie puede ser sumable o no y hay que estudiar este caso por separado.

Como

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n (x-a)^n|} \;=\; |x-a| \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

se puede definir

$$r = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \right)^{-1}$$

($r = 0$ si este limsup $= +\infty$, y $r = +\infty$ si este limsup $= 0$) y expresar lo anterior como

- si $|x - a| < r$ entonces la serie $\sum_n c_n(x - a)^n$ es absolutamente sumable
- si $|x - a| > r$ entonces la serie $\sum_n c_n(x - a)^n$ no es sumable
- si $|x - a| = r$, es decir, para $x = a \pm r$, entonces la serie puede ser sumable o no y hay que estudiar este caso por separado

El valor r se llama *radio de sumabilidad o de convergencia* de la serie. Indica el intervalo $(a-r,\ a+r)$ en el cual la serie está definida. Si $x \in (a-r,\ a+r)$ (es decir, si $|x-a| < r$) entonces $\sum_n c_n(x - a)^n$ es absolutamente sumable. Si $|x - a| > r$ entonces la serie es no sumable. Para los valores $x = a - r$ y $x = a + r$ hay que comprobar cómo es el carácter de la serie, sumable o no.

Ejercicio. El radio de sumabilidad puede calcularse también utilizando el criterio del cociente. El resultado es el mismo (ver las hojas de problemas de Cálculo I). Puede probarse que si r es el radio de sumabilidad de una serie $\sum c_n(x - a)^n$ y $c_n \neq 0$ entonces

$$\liminf_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \ \leq\ r\ \leq\ \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| .$$

Ejemplos de cálculo del radio de sumabilidad:

1) La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

está centrada en $a = 0$. Su radio de sumabilidad es

$$r^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1.$$

Por tanto, la serie está bien definida (es absolutamente sumable) en el intervalo $(-1,\ 1)$.

Es no sumable en $[-1, 1]^c$ (es decir, en los puntos que cumplen $|x| > 1$).

Puede ser sumable o no en los bordes del intervalo. En $x = 1$ la serie es $1 + 1 + 1 + \dots$, que es no sumable. En $x = -1$ la serie es $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ que tampoco es sumable.

A veces, como en este caso, se puede expresar el límite puntual de la serie mediante alguna función conocida. Esto no es lo normal, aunque en este ejemplo, como se trata de una serie geométrica, es conocido que

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots \longrightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x},$$

(sumabilidad puntual en $(-1, 1)$).

2) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{n} = x-4+\frac{(x-4)^2}{2}+\frac{(x-4)^3}{3}+\dots$$

está centrada en $a=4$. Su radio de sumabilidad es

$$r^{-1} = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

La serie es sumable en el intervalo $(4-1,\ 4+1)=(3,\ 5)$, es decir, en los puntos que cumplen $|x-4|<1$.

Es no sumable si $|x-4|>1$. Son los puntos de $[3,5]^c=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$.

Para $|x-4|=1$, es decir, en los extremos $x=3$ y $x=5$ hay que ver cómo es la serie. Para $x=3$ la serie es $\sum_n(-1)^n\frac{1}{n}$, que es sumable. Para $x=5$ no es sumable, ya que la serie que se obtiene es $\sum_n\frac{1}{n}$.

3) La serie $\displaystyle\sum_{n=6}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ tiene radio de sumabilidad $r=1$. Además, también es sumable en los bordes del intervalo. La serie es sumable en $[-1,\ 1]$ y es no sumable fuera de él.

4) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^3x^n$ tiene radio de sumabilidad $r=1$. En los bordes del intervalo no es sumable. La serie es sumable en $(-1,\ 1)$ y es no sumable en el resto.

5) La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}2^n(x+5)^n$ tiene radio de sumabilidad $r=1/2$. Como está centrada en $a=-5$, la serie es sumable en el intervalo $(-5.5,\ -4.5)$. En los bordes del intervalo y en el resto de puntos es no sumable.

6) La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}}{2^n}(x-1)^n$$

tiene radio de sumabilidad $r=2$. Por tanto es sumable en el intervalo $(-1,\ 3)$. No es sumable en ningún otro sitio: ni en los bordes del intervalo ni fuera de él.

7) La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n!\,x^n$ tiene radio de sumabilidad $r=0$. Sólo tiene sentido en $x=0$. No es una serie, es un engaño.

8) La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ tiene radio de sumabilidad $r=+\infty$. Es una serie sumable en todo $\mathbb{R}$. Ya se vio (problemas de Cálculo I) que esta serie verifica para todo $x\in\mathbb{R}$

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Sumabilidad (o convergencia) uniforme de una serie de potencias. Consecuencias

El último ejemplo plantea unas cuestiones sobre series de potencias. Si una serie es sumable en algún intervalo, ¿su suma es alguna función conocida? O también, dada una función f,

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

¿podemos encontrar una serie de potencias que coincida con f en algún intervalo? Más adelante se tratarán estas cuestiones.

De momento hemos visto que cada serie de potencias $\sum_n c_n(x-a)^n$ está bien definida (es sumable) para cada $x \in (a-r,\ a+r)$ (y posiblemente en los bordes del intervalo), donde r es el radio de sumabilidad. Dicho de otra forma, la serie es sumable puntualmente

$$\sum_n c_n(x-a)^n \;=\; \big(c_0,\ c_0 + c_1(x-a), \ldots\big) \;\xrightarrow{\ p\ }\; f(x) = \sum_n c_n(x-a)^n$$

para cada $x \in (a-r,\ a+r)$. Y no hay sumabilidad puntual en $[a-r,\ a+r]^c$.

Como $f(x) = \lim\big(c_0,\ c_0 + c_1(x-a),\ c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2,\ \ldots\big)$, entonces f es el límite puntual de una sucesión de funciones polinómicas, que por tanto son continuas, diferenciables, y también integrables en cada intervalo de longitud finita. Cabe esperar que f herede esas propiedades, aunque la sumabilidad puntual no asegura nada.

Pero, ¿qué se puede decir sobre la sumabilidad uniforme de la serie de potencias? La sumabilidad uniforme implica la sumabilidad puntual, y por tanto, sólo puede darse dentro del intervalo de sumabilidad $(a-r,\ a+r)$, ampliable eventualmente a los extremos del intervalo.

La comprobación de que $\delta_n = \sup_{x\in A} \left|f(x) - (c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n)\right| \longrightarrow 0$ en algún conjunto $A \subset (a-r, a+r)$ no es fácil. En lugar de esto se utiliza una herramienta más sencilla de aplicar.

Criterio M (mayorante) de Weierstrass. *Sean $f_n : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones acotadas, es decir, $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo n y para todo $x \in A$. Si la serie $\sum M_n$ es sumable, entonces $\sum f_n$ es absolutamente uniformemente sumable en A.*

Demostración. Para cada $x \in A$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ es sumable: basta usar el método de comparación. Por tanto $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ es sumable (se trata de sumabilidad puntual) y su suma es $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Si $x \in A$ se tiene

$$\big|f(x) - \big(f_1(x) + \ldots + f_n(x)\big)\big| \;=\; \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\Big| \;\leq\; \sum_{k=n+1}^{\infty} \big|f_k(x)\big| \;\leq\; \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k.$$

Como la serie $\sum M_n$ es sumable, entonces $\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \to 0$, y por tanto $\sum f_n$ es uniformemente sumable, con suma f. □

Este criterio puede aplicarse a cualquier tipo de serie $\sum f_n$, ya sean de potencias o de cualquier otro tipo. Basta saber encontrar cotas M_n para cada una de las funciones $|f_n|$ tales que la serie $\sum M_n$ sea sumable. Se consigue así que la serie $\sum f_n(x)$ esté mayorada por la serie $\sum M_n$, de ahí el nombre del criterio. Hallar constantes M_n con estas condiciones no siempre es posible, aunque a veces…

Ejemplos: **1**) la serie

$$\sum_n \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$$

verifica

$$\left|\frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}\right| \;\leq\; \frac{1}{n^2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Esa desigualdad es evidente pues $|\operatorname{sen} nx| \leq 1$. Como $\sum 1/n^2$ es sumable, la serie de partida es absolutamente uniformemente sumable en todo $\mathbb{R}$.

2) Lo mismo puede aplicarse a la serie

$$\sum_n \frac{3 + n\cos x}{1 + n^3}.$$

Para cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\left|\frac{3 + n\cos x}{1 + n^3}\right| \leq \frac{3 + n}{1 + n^3}$$

y la serie

$$\sum_n \frac{3 + n}{1 + n^3}$$

es sumable (un buen ejercicio de repaso de Cálculo I). Por tanto, la serie

$$\sum_n \frac{3 + n\cos x}{1 + n^3}$$

es absolutamente uniformemente sumable en todo $\mathbb{R}$.

Aplicación de este criterio M en las series de potencias. En el caso de una serie $\sum c_n(x-a)^n$ de potencias, este criterio M siempre se puede aplicar y así se consigue establecer la sumabilidad uniforme de la serie. Dada una serie $\sum_n c_n(x-a)^n$ con radio de sumabilidad $r > 0$, se elige un número s verificando $0 < s < r$. Para cada $x \in [a-s, a+s]$ (es decir $|x-a| \leq s$) se tiene que

$$|c_n(x-a)^n| \leq |c_n|s^n.$$

La serie $\sum_n |c_n|s^n$ es sumable: esto es evidente tras aplicar el criterio de la raíz, ya que

$$\limsup_n \sqrt[n]{|c_n|s^n} = s \cdot \limsup_n \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{s}{r} < 1.$$

Se puede aplicar entonces el criterio M, y así $\sum_n c_n(x-a)^n$ es absolutamente uniformemente sumable en $[a-s,\ a+s]$. En resumen

Corolario. *Si* $\sum_n c_n(x-a)^n$ *es una serie con radio de sumabilidad* $r > 0$*, entonces para cada* $0 < s < r$ *la serie es absolutamente uniformemente sumable en* $[a-s,\ a+s]$.

En total, en el intervalo $x \in (a-r,\ a+r)$ se tiene

$$\sum_n c_n(x-a)^n = \big(c_0,\ c_0 + c_1(x-a), \dots\big) \xrightarrow{p} f(x) = \sum_n c_n(x-a)^n.$$

Después de aplicar este criterio M se tiene además

$$\sum_n c_n(x-a)^n = \big(c_0,\ c_0 + c_1(x-a), \dots\big) \xrightarrow{u} f(x) = \sum_n c_n(x-a)^n$$

en cada $[a-s,\ a+s]$, donde $0 < s < r$. La función $f(x)$ es límite uniforme de la sucesión de sumas parciales $\big(c_0,\ c_0 + c_1(x-a), \dots\big)$, que son todas funciones continuas, diferenciables e integrables en $(a-r,\ a+r)$.

Corolario. Para una serie $\sum_n c_n(x-a)^n$ con radio de sumabilidad $r > 0$ se tiene

1) La función $f : x \in (a-r,\ a+r) \longrightarrow f(x) = \sum_n c_n(x-a)^n$ es continua.

2) f es indefinidamente diferenciable en $(a-r,\ a+r)$ y

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n &&= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots\\
f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\,c_n(x-a)^{n-1} &&= c_1 + 2\,c_2(x-a) + 3\,c_3(x-a)^2 + 4\,c_4(x-a)^3 + \dots\\
f''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,c_n(x-a)^{n-2} &&= 2\,c_2 + 3{\cdot}2\,c_3 + 4{\cdot}3\,c_4(x-a)^2 + 5{\cdot}4\,c_5(x-a)^3 + \dots\\
&\vdots
\end{aligned}$$

y todas tienen el mismo radio de sumabilidad (el de f). Como consecuencia, se tiene que $f^{(n)}(a) = n!\,c_n$ para $n = 0, 1, 2\dots$

3) f es integrable en cada $[a,\ x]$ (o en cada $[x,\ a]$ si $x < a$) contenido en el intervalo de sumabilidad, y su primitiva es también una serie de potencias con el mismo radio de sumabilidad

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x \Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-a)^n\Big)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^x (t-a)^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}.$$

Demostración. **1)** f es el límite uniforme en $[a-s,\ a+s]$ de funciones continuas (las sumas parciales de la serie son funciones polinómicas) y así f es continua en cada intervalo $[a-s,\ a+s]$ con $0 < s < r$. Por tanto f es continua en $(a-r,\ a+r)$.

2) Sea $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$ la serie que resulta de derivar la serie original $\sum_n c_n(x-a)^n$ término a término. Ambas series tienen el mismo radio de sumabilidad, ya que

$$\limsup_n \sqrt[n]{n|c_n|} = \limsup_n \sqrt[n]{|c_n|}$$

(recuérdese que $\limsup_n \sqrt[n]{n} = 1$). Luego g es el límite uniforme de la sucesión de sumas parciales derivadas, es decir, de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$. Aplicando el teorema ya conocido sobre sumabilidad uniforme y primitivas, resulta que f es derivable y $f' = g$. Esta última igualdad puede escribirse también como

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}.$$

El mismo argumento sirve para probar que $f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-a)^{n-2}$, etcétera.

Como

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots\\
f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1} = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \dots\\
f''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-a)^{n-2} = 2c_2 + 3\cdot 2c_3(x-a) + 4\cdot 3c_4(x-a)^2 + \dots
\end{aligned}$$

Departamento de Matemáticas Universidad de Extremadura

entonces $f(a) = c_0$, $f'(a) = c_1$, $f''(a) = 2c_2$,... y en general, $f^{(n)}(a) = n!\, c_n$.

3) A causa de la sumabilidad uniforme, se puede integrar término a término en el intervalo de sumabilidad. Si $x \in (a-r, a+r)$, como la serie es uniformemente sumable en $[a, x]$ y sus sumandos son funciones integrables, la función suma f es integrable en $[a, x]$ y además

$$\int_a^x f(t)\, dt \;=\; \int_a^x \Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-a)^n\Big)\, dt \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^x (t-a)^n\, dt \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1},$$

que tiene el mismo radio de sumabilidad. □

Ejemplo. La serie $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ tiene radio de sumabilidad $r = 1$. Por tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \;=\; 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \;\xrightarrow{p,u}\; f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

La sumabilidad puntual es en el intervalo $(-1,\ 1)$ y la uniforme en cualquier intervalo cerrado contenido en él. Además, es conocido (otro repaso de Cálculo I) que la serie es una serie geométrica de razón x. Por tanto, puede escribirse

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \;=\; 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \;\xrightarrow{p,u}\; f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \;=\; \frac{1}{1-x}.$$

Los resultados ya vistos dicen que cualquier derivada y cualquier primitiva de esta función es una serie de potencias con el mismo radio de sumabilidad, es decir, una serie de potencias en el intervalo $(-1,\ 1)$. Por ejemplo, derivando término a término se consigue

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\Big)' \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \;=\; 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots \;\xrightarrow{p,u}\; f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \;=\; \frac{1}{(1-x)^2}.$$

De forma similar, el cálculo de una primitiva F de f es sencillo

$$\int_0^x f \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \;=\; x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots \;\xrightarrow{p,u}\; F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \;=\; -\log(1-x).$$

Las derivadas y primitivas (de cualquier orden) tienen todas el mismo radio de sumabilidad, por tanto, todas están definidas en el intervalo $(-1,\ 1)$. La igualdad

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots \;=\; -\log(1-x)$$

es válida para $-1 < x < 1$. Incluso puede ampliarse (ver el teorema de Abel más adelante) para el caso $x = -1$ y se obtiene

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \;=\; \log 2.$$

Ejemplo. Utilizando la serie derivada anterior se puede escribir (para $|x| < 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n \;=\; x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots \;=\; x\,(1 + 2x + 3x^2 + \ldots) \;=\; x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Como caso particular, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{1}{2^n} \;=\; \frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\ldots \;=\; 2.$

Ejemplo. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^n n!}$$

tiene radio de sumabilidad $r=+\infty$. Por tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^n n!} \xrightarrow{p,u} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^n n!}$$

en $\mathbb{R}$.

Su derivada f' y su primitiva F son sencillas de calcular:

$$f'(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n^{n-1} n!}, \qquad F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1) n^n n!},$$

ambas definidas en $\mathbb{R}$. Se pueden calcular sus derivadas y primitivas de cualquier orden, aunque es muy posible que en este ejemplo no se conozca una función elemental con la que representar a la función f (o a alguna de sus derivadas o primitivas), como sí pasaba en el ejemplo anterior.

Funciones analíticas

El corolario último dice que una serie de potencias $\sum_n c_n(x-a)^n$ con radio positivo, cuya suma es f en los alrededores de a, es decir, en $(a-r,\ a+r)$, es exactamente la serie de Taylor de f alrededor de a

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \;=\; f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots$$

Esta serie de Taylor de f es la serie cuya sucesión de sumas parciales son los polinomios de Taylor de f en a.

La función f es continua y diferenciable indefinidamente. Este resultado da a entender que una función f que sea indefinidamente diferenciable genera una serie de potencias $\sum_n c_n(x-a)^n$, donde $c_n = f^{(n)}(a)/n!$, que coincide con la propia función. El siguiente ejemplo muestra que esto no es necesariamente cierto.

Ejemplo. La función $f(x)=e^{-x^{-2}}$ para $x\neq 0$ y $f(0)=0$, es indefinidamente diferenciable en $a=0$ (ya se ha visto esto en Cálculo I). Además, $0=f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=\ldots$ Por tanto, se puede formar la serie de potencias alrededor de $a=0$ y se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \;=\; 0+0+0+\ldots \;=\; 0$$

y por tanto la función f y su serie de Taylor no coinciden en ningún punto, salvo en $x=0$.

Ejemplo. La función $f(x)=e^x$ es indefinidamente diferenciable en $\mathbb{R}$ y $1=f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=\ldots$ Se considera la serie de potencias alrededor de $a=0$ (cuyo radio es $r=+\infty$)

$$g(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \;=\; 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$$

¿Deben coincidir f y g? Desde luego sí que lo hacen en el punto $a = 0$. ¿Y en algún intervalo? Hay motivos que se verán más adelante para asegurar la igualdad $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para este ejemplo en particular se puede utilizar el hecho de que ambas funciones coinciden con su propia derivada:

$$f'(x) = e^x = f(x), \qquad g'(x) = 0 + 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \; = \; g(x).$$

Como consecuencia, las dos funciones f y g deben ser iguales: al ser $g' = g$ la función $F(x) = g(x)/e^x$ verifica

$$F'(x) \; = \; \frac{g'(x)e^x - g(x)e^x}{e^{2x}} \; = \; 0,$$

y F es constante. Como además $g(0)/e^0 = 1$, esa constante es igual a 1, es decir $g(x) = e^x$ para todo x.

Definición. Se dice que $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es *analítica* en $a \in \mathring{A}$ si en algún intervalo $(a-\delta,\ a+\delta)$ la función f es la suma de una serie de potencias centrada en a, es decir, si

$$f(x) \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \qquad \big(\forall\, x \in (a-\delta,\ a+\delta)\big).$$

Si f es analítica en a, es decir, en algún intervalo se tiene $f(x) = \sum_n c_n(x-a)^n$, ya se ha visto que debe cumplirse $c_n = f^{(n)}(a)/n!$

Se dice que una función es analítica en un conjunto abierto si es analítica en cada uno de sus puntos. Y se dice que una función es analítica si lo es en todo su dominio (que es además un conjunto abierto).

Ejemplos. 1) Ya se ha visto que la función $f(x) = e^x$ es analítica en $a = 0$. Y es posible repetir el argumento utilizado para probar fácilmente que es analítica en cualquier otro $a \in \mathbb{R}$. Se trata de una función analítica en $\mathbb{R}$. Por ejemplo, para $a = 1$ se pueden repetir los mismos cálculos y hacer la serie de potencias centrada en $a = 1$,

$$g(x) \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!}(x-1)^n \; = \; e\Big(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} + \ldots\Big)$$

cuyo radio es $r = +\infty$. De forma similar a como se ha hecho antes se puede probar que $e^x = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Alternativamente se puede aprovechar lo que ya se conoce y entonces

$$g(x) \; = \; e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x-1)^n \; = \; e \cdot e^{x-1} \; = \; e^x.$$

Como consecuencia se ha probado además que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!}(x-1)^n \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n,$$

es decir,

$$e\Big(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} + \ldots\Big) \; = \; 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Probar directamente esta última igualdad es un buen ejercicio de cálculo de series, viendo que el término de grado 0 de ambos lados son iguales; y los de grado 1, los de 2,...

2) Ya se ha probado que $f(x) = 1/(1-x)$ es analítica es $a = 0$ y la serie de potencias que coincide con f en algún intervalo $(a-r, a+r)$ es

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Esta igualdad es cierta en $(a-1, a+1) = (-1, 1)$. ¿Y si se cambia el punto a? Por ejemplo, para $a = 2$, ¿hay alguna serie que coincida con f en algún intervalo $(2-r, 2+r)$. La única serie que puede hacer esto es (y es un ejercicio fácil calcular cómo son estas derivadas que intervienen)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(x-2)^n = -1 + (x-2) - (x-2)^2 + (x-2)^3 + \ldots$$

Esta serie tiene radio de sumabilidad $r = 1$, por tanto es sumable en el intervalo $(1, 3)$. En los bordes del intervalo también puede estudiarse la sumabilidad, pero no es relevante para lo que se está probando ahora. Se trata de una serie geométrica, cuyo primer término es -1 y su razón es $-(x-2)$. Por tanto es sumable en el intervalo $(1, 3)$ a la función

$$-1 + (x-2) - (x-2)^2 + (x-2)^3 + \ldots = \frac{-1}{1-(-(x-2))} = \frac{-1}{1+x-2} = \frac{1}{1-x}.$$

Esto dice que $f(x) = 1/(1-x)$ también es analítica en $a = 2$ y cuál es la serie que coincide con ella en un intervalo centrado en $a = 2$.

Esta idea (sumar series geométricas) sirve probar que $f(x) = 1/x$ es analítica en $a = 3$:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{3-(3-x)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{3-x}{3}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3-x}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}(x-3)^n,$$

con radio de sumabilidad $r = 3$.

De la misma forma se tiene que $f(x) = \frac{1}{x-8}$ es analítica en $a = 2$:

$$\frac{1}{x-8} = -\frac{1}{6-(x-2)} = -\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{6^n}(x-2)^n.$$

En general, una función del tipo $f(x) = \frac{1}{x-a}$ es analítica en todos los puntos b distintos de a, ya que:

$$\frac{1}{x-a} = \frac{1}{b-a-(b-x)} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{b-x}{b-a}} = \frac{1}{b-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-b)^n}{(a-b)^n},$$

una serie de potencias centrada en b con radio $r = |a-b|$.

3) Cualquier serie de potencias (con radio de sumabilidad mayor que cero y definida en su intervalo de sumabilidad) es analítica en su centro. Por ejemplo, la función

$$f(x) = 1 + x + x^2 + 3x^3 + x^4 + 5x^5 + x^6 + 7x^7 + \ldots$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

está definida en $(-1,\ 1)$ y es analítica en $a = 0$.

4) La función $f(x) = |x|$ no es analítica en $a = 0$, ya que ni siquiera es derivable en dicho punto. Sin embargo, sí es analítica es $a = 1$. En todo el intervalo $(0, 2)$, que rodea al punto $a = 1$, la serie de Taylor de la función $f(x) = |x|$ es $f(1) + f'(1)(x-1) = x$. La función coincide con su serie de Taylor en $(0, 2)$ y por tanto es analítica en $a = 1$. También lo es en $a = 4$, $a = 15$ y en cualquier $a \neq 0$.

5) La función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

sólo es derivable una vez en 0. Es una función analítica en todos los puntos, salvo en el 0. Por ejemplo, en $a = 1$ la función es analítica y $x^2 = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2$.

El teorema de aproximación de Weierstrass, que no se va a ver en este curso, prueba que cada función continua $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es el límite uniforme de funciones polinómicas, es decir, existen polinomios P_n que verifican $(P_n) \xrightarrow{u} f$. En otras palabras, en cada banda de radio ε que rodee a la función f hay alguna función polinómica. Ser una función analítica exige además que esos polinomios sean de cierta forma: su serie de Taylor.

Propiedades de la funciones analíticas (ver las hojas de ejemplos y ejercicios sobre estos resultados).

1) Ya se ha visto que la derivada y la primitiva de una función analítica en a también es una función analítica en a.

2) Si f es analítica en a, es decir, $f(x) = \sum c_n(x-a)^n$ en $(a-r,\ a+r)$, entonces también es analítica en cada $b \in (a-r,\ a+r)$, y se puede escribir f como una serie de potencias centrada en b, es decir, $f(x) = \sum d_n(x-b)^n$ para $x \in (b-r',\ b+r')$

3) Dadas dos funciones analíticas $f(x) = \sum c_n(x-a)^n$ y $g(x) = \sum d_n(x-a)^n$ en el punto a, las funciones suma, producto y cociente* son analíticas en el intervalo común a ambas, y se tiene

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(c_n + d_n)(x-a)^n \\ (f \cdot g)(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{j+k=n} c_j d_k\Big)(x-a)^n \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-a)^n. \end{aligned}$$

Se entiende que para el cociente g no se anula en todo el intervalo común. Los coeficientes α_n pueden calcularse a partir de la igualdad $\sum c_n(x-a)^n = \left(\sum d_n(x-a)^n\right)\cdot\left(\sum \alpha_n(x-a)^n\right)$. Así, igualando el término independiente en cada lado, el de grado 1 en $(x-a)$,...

$$\alpha_0 = \frac{c_0}{d_0}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{d_0}\left(c_1 - \frac{c_0 d_1}{d_0}\right), \quad \text{etcétera.}$$

4) La composición de funciones analíticas es una función analítica.

¿Cómo saber si una función es analítica?

A modo de resumen, los resultados ya vistos sobre series de potencias son:

a) Cada serie de potencias define una función cuyo dominio es el intervalo de sumabilidad $(x-r, x+r)$ (posiblemente ampliado hasta la frontera) dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n.$$

b) A causa de la sumabilidad uniforme, se puede integrar término a término en el intervalo de sumabilidad. Si $x \in (a-r, a+r)$ entonces

$$\int_a^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^x (t-a)^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1},$$

que tiene el mismo radio de sumabilidad.

c) La función f tiene derivada de cualquier orden, que se obtiene derivando término a término,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$$

y nuevamente el radio de sumabilidad es el mismo.

d) Como consecuencia, $f^{(n)}(a) = n!\,c_n$ y por tanto la función original es

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

¿Puede escribirse cualquier función como una serie de este tipo? La primera respuesta evidente es no. Hace falta, como paso previo que la función sea indefinidamente derivable en a. ¿Es esto suficiente para asegurar que una función se pueda escribir como serie de potencias? Otra vez la respuesta es no: ya se ha visto un ejemplo de función no nula cuyo valor en un punto y todas sus derivadas en ese punto valen 0.

Cabe preguntarse entonces la siguiente cuestión: si en algún intervalo $(a-r,\ a+r)$ una función $f : (a-r,\ a+r) \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable indefinidamente se puede formar la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

que se llama serie de Taylor de f en a. ¿Qué hace falta para asegurar la igualdad

$$f(x) \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n?$$

El teorema global de Taylor (puede verse en los apuntes de Cálculo I) establece que para cada x y cada n existe un valor z comprendido entre a y x que verifica

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-a)^n.$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Luego una condición necesaria y suficiente para que la serie de Taylor converja a $f(x)$ es que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-a)^n \;=\; 0.$$

A veces puede resultar complicado comprobar que este límite es cero, ya que el valor z no es conocido y el término $f^{(n)}(z)$ puede resultar difícil de manejar.

Sin embargo, si se conoce que la función f y sus derivadas son acotadas por un mismo número, $|f^{(n)}(z)| \leq M$ para todo z y para todo n, entonces es evidente que el límite anterior es 0, ya que entonces

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-a)^n\right| \;\leq\; \lim_{n\to\infty} \left|\frac{M(x-a)^n}{n!}\right| \;=\; 0.$$

La misma conclusión resulta con una condición más débil y, por tanto, más fácil de aplicar: si existe M tal que $|f^{(n)}(z)| \leq M^n$ para todo z, entonces el límite anterior es 0, pues

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-a)^n\right| \;\leq\; \lim_{n\to\infty} \left|\frac{M^n(x-a)^n}{n!}\right| \;=\; 0.$$

Este resultado puede resumirse así:

Teorema (condición suficiente para ser analítica en un punto). *Sea f indefinidamente diferenciable en un entorno abierto V de a. Si existe una constante M tal que $|f^{(n)}(x)| \leq M^n$ para cada $x \in V$ y para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$ entonces*

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

para todos los puntos $x \in V$ (es decir, f es analítica en un entorno de a). La misma conclusión si existe una constante M tal que $|f^{(n)}(x)| \leq M$ para cada $x \in V$ y para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$

Ejemplos de funciones analíticas

1) Las funciones polinómicas son analíticas. Esto es evidente. Cada función polinómica

$$f(x) \;=\; c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n$$

coincide con su serie de Taylor en todo $\mathbb{R}$. Es una serie finita centrada en $a = 0$ y se puede expresar centrada en cualquier otro punto

$$f(x) \;=\; f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$

Por ejemplo

$$f(x) \;=\; 1 + x - x^2 \;=\; -11 - 7(x-4) - (x-4)^2 \;=\; -5 + 5(x+2) - (x+2)^2.$$

Otra forma de ver que cada función polinómica f es analítica es aplicar el teorema anterior: las derivadas de un polinomio verifican $f^{(n)}(x) = 0$ para cualquier x a partir de un valor n en adelante (por ejemplo, un polinomio grado 7 tiene derivadas de orden $8, 9, \ldots$ iguales a cero).

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

2) La función exponencial e^x es analítica. Se trata de una función indefinidamente diferenciable y por tanto puede ser analítica. La serie de Taylor de $f(x) = e^x$ centrada en $a = 0$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

ya que $1 = f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots$ El radio de sumabilidad de esta serie es $r = +\infty$. Se trata entonces de una serie absoluta y uniformemente sumable en todo compacto de $\mathbb{R}$. Para comprobar si esta serie coincide o no con la función e^x se utiliza el teorema global de Taylor:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^z}{n!} x^n$$

donde z es un valor intermedio entre 0 y x. Sólo falta comprobar si

$$\frac{e^z}{n!} x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Esto es evidente, sin más que notar que si $0 \leq z \leq x$ entonces

$$\frac{e^z}{n!} x^n \leq \frac{e^x x^n}{n!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En el caso $x \leq z \leq 0$ se tiene $e^z \leq 1$ y la conclusión es la misma. Por tanto, la función $f(x) = e^x$ es entera (analítica con radio $r = +\infty$) y

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por ejemplo, la derivada es (se deriva la serie término a término)

$$(e^x)' = 0 + 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = e^x.$$

Se puede utilizar este resultado para probar que $f(x) = e^x$ es analítica en cualquier $a \in \mathbb{R}$:

$$e^{x-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} \Rightarrow e^x = e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

3) Las funciones trigonométricas $\operatorname{sen} x$ **y** $\cos x$ **son analíticas**. La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es indefinidamente diferenciable. La serie de Taylor es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

ya que los valores de f y sus derivadas son

$$f(x) = \operatorname{sen} x, \quad f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\operatorname{sen} x, \quad f'''(x) = -\cos x$$

y así cíclicamente. Luego en $a = 0$ los valores son $0,\ 1,\ 0,\ -1$ de forma cíclica.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

El radio de sumabilidad es $r = +\infty$. Luego la serie absoluta y uniformemente sumable en cada compacto de $\mathbb{R}$. Para comprobar si esta serie coincide con la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ se aplica el teorema global de Taylor:

$$\operatorname{sen} x \;=\; x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{\pm(\operatorname{sen} \mid \cos)z}{n!} x^n.$$

Como además

$$\left| \frac{\pm(\operatorname{sen} \mid \cos)z}{n!} x^n \right| \;\leq\; \left| \frac{x^n}{n!} \right| \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \; 0$$

la función coincide con la serie en todo $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{sen} x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \;=\; x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

y se trata de una función entera (analítica en todo $\mathbb{R}$).

Para la función $\cos x$ se puede hacer el mismo razonamiento: calcular sus derivadas, su serie de Taylor,... Pero puede hacerse de forma más sencilla derivando la función seno y la serie que coincide con ella:

$$\cos x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1) x^{2n}}{(2n+1)!} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \;=\; 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^8}{8!} + \ldots$$

y la igualdad se da en todo $x \in \mathbb{R}$. La función $\cos x$ es también entera y la serie tiene radio de sumabilidad $r = +\infty$.

4) La función logaritmo es analítica. Se considera la función $f(x) = \log x$. Como no está definida en 0 se puede hacer la serie de Taylor en $a = 1$, por ejemplo. Por comodidad se considera la función $f : (-1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log(1 + x)$, y se hace el desarrollo en $a = 0$.

Los valores de f y sus derivadas son

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
f(x) & = & \log(1+x) & f(0) & = & 0 \\
f'(x) & = & \dfrac{1}{(1+x)} & f'(0) & = & 1 \\
f''(x) & = & \dfrac{-1!}{(1+x)^2} & f''(0) & = & -1! \\
f^{(3)}(x) & = & \dfrac{2!}{(1+x)^3} & f^{(3)}(0) & = & 2! \\
f^{(4)}(x) & = & \dfrac{-3!}{(1+x)^4} & f^{(4)}(0) & = & -3! \\
 & \vdots & & & \vdots &
\end{array}$$

Por tanto, la serie de Taylor es

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \ldots \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

Es una serie cuyo radio de sumabilidad es $r = 1$. Luego la serie es absoluta y uniformemente sumable en el intervalo $(-1, 1)$. En $x = +1$ también es sumable y no lo es en $x = -1$.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Pero no es sencillo ver que para todo $x \in (-1,1]$, si z es un valor intermedio entre 0 y x, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^n(z)}{n!}x^n \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(1+z)^n}x^n \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+z}\right)^n \;=\; 0.$$

Esto puede demostrarse para ciertos valores de x utilizando las siguientes desigualdades

- Si $0 < x < 1$ entonces $0 \le \dfrac{x}{1+z} < x < 1$ y así $\left(\dfrac{x}{1+z}\right)^n \longrightarrow 0.$
- Si $-1/2 \le x < 0$ entonces $-1 \le \dfrac{x}{1+x} < \dfrac{x}{1+z} < x$ y por tanto $\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{x}{1+z}\right)^n \longrightarrow 0.$

En resumen, la serie de Taylor es sumable con suma $\log(1+x)$ y por tanto es una función analítica en el intervalo $(-1/2, 1)$. También lo es en $(-1,1)$ aunque aún no se ha probado. Se hará a continuación por un método más simple.

En $x = 1$ también es una serie sumable y su suma es

$$\log 2 \;=\; 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

En realidad esta igualdad debería justificarse; suele hacerse utilizando un teorema de Abel: si una función y una serie coinciden en un intervalo y la serie es sumable en un extremo del intervalo entonces la función y la serie coinciden también en ese extremo.

Teorema (del límite de Abel). Si se tiene

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

para $x \in (a-r, a+r)$ y la serie es sumable en $x = a+r$ (podría ser en el otro extremo) entonces $\lim_{x\to(a+r)^-} f(x)$ existe y se tiene

$$\lim_{x\to(a+r)^-} f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n.$$

Para la función logaritmo anterior $f(x) = \log(1+x)$ también se podría haber procedido de otra forma. Se calcula la serie de su derivada y después, integrando, se calcula la serie de la función original. Este procedimiento se utiliza si se conoce la serie de la función derivada (o de la primitiva).
En este caso $f'(x) = 1/(1+x)$ y esta función es conocida como una serie de potencias: es la fórmula de la suma de una progresión geométrica de razón $-x$, que tiene sentido para $|x| < 1$, es decir, tiene radio $r = 1$:

$$f'(x) \;=\; \frac{1}{1+x} \;=\; 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \ldots \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

Integrando (la constante de integración sale $C = 0$ ya que $f(0) = 0$)

$$f(x) \;=\; \log(1+x) \;=\; x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n,$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

y el radio de sumabilidad es el mismo.
De la misma forma, se podría escribir la serie que define la primitiva de $\log(1+x)$.

Esta idea permite conocer la serie de Taylor de una función siempre que se conozca la serie de Taylor de alguna derivada o alguna primitiva suya. Además, el radio de sumabilidad se mantiene.

Las operaciones habituales con funciones analíticas dan funciones analíticas. Las sumas, restas, productos, cocientes y composición de funciones analíticas son analíticas (con la restricción de siempre). Por tanto, todas las funciones elementales son analíticas.

Esto permite encontrar las series de Taylor de funciones como $\operatorname{sen} x^2$, ya que

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

y así

$$\operatorname{sen} x^2 = x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120} - \frac{x^{14}}{5040} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

También se puede calcular

$$e^x \operatorname{tg} x = x + x^2 + \frac{5x^3}{6} + \frac{x^4}{2} + \frac{41x^5}{120} + \frac{71x^6}{360} + \ldots$$

Ahora es posible, integrando término a término, encontrar una primitiva de $\operatorname{sen} x^2$ o $e^x \operatorname{tg} x$:

$$\int \operatorname{sen} x^2\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^{11}}{1320} - \frac{x^{15}}{75600} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}.$$

Algunos ejemplos más. Ya se ha dicho que las funciones analíticas se mantienen por las operaciones usuales (suma, resta, composición,...) Las funciones elementales siguientes son análiticas, y algunas de ellas son enteras (el radio es infinito).

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ \operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

En los tres casos el radio de sumabilidad es ∞ y las funciones son enteras: la sumabilidad se tiene para todo $x \in \mathbb{R}$. Esto permite hacer el desarrollo centrado en otro punto a, por ejemplo,

$$e^x = e^a e^{x-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a (x-a)^n}{n!}$$

o también el cálculo de primitivas de funciones como e^{x^2}

$$\int_0^x e^{t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{t^{2n}}{n!}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}.$$

Una serie de potencias se puede calcular conociendo la serie de potencias de su derivada o de su primitiva. Por ejemplo,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (|x| < 1)$$

es la suma de términos de una progresión geométrica de razón x, que es sumable si $|x| < 1$, permite conocer

$$\log(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (|x| < 1).$$

Además, a partir de la fórmula de la suma de una serie geométrica se puede escribir,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n && (|x-1| < 1)\\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n && (|x| < 1)\\
\frac{1}{1+x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} && (|x| < 1)
\end{aligned}$$

y por tanto, se pueden conocer mediante integración directa las series de algunas funciones logarítmicas y trigonométricas, ya que

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

y por tanto,

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (|x| < 1).$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
\log x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1} && (|x-1| < 1)\\
\log(1+x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} && (|x| < 1).
\end{aligned}$$

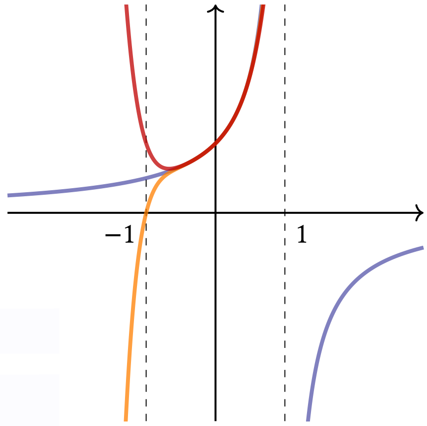
Incluso se ha visto que esta última igualdad puede ampliarse al punto extremo del intervalo de sumabilidad ($x = 1$) para obtener la conocida fórmula

$$\log 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Para pensar. Ya se ha visto que la serie $1+x+x^2+x^3+\dots$ tiene sentido sólo para $|x|<1$. Es una serie geométrica y por tanto

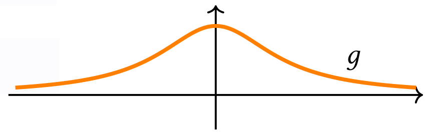
$$1+x+x^2+x^3+\dots \xrightarrow{u} f(x)=\frac{1}{1-x}.$$

La expresión de la izquierda sólo tiene sentido para $|x|<1$. La de la derecha para $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
Se han representado $1+x+x^2+\dots+x^6$ (en rojo), $1+x+x^2+\dots+x^7$ (naranja), y $f(x)=1/(1-x)$ (azul).



Algo parecido ocurre con la serie $1-x^2+x^4-x^6+x^8+\dots$ cuyo radio de sumabilidad es 1 y (es también una serie geométrica)

$$1-x^2+x^4-x^6+x^8+\dots \xrightarrow{u} g(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$



Esta función g está definida en todo $\mathbb{R}$, mientras que la serie sólo lo está en el intervalo $(-1,1)$.

Puede leerse en [Spivak, Cálculo infinitesimal, pág.707] el siguiente fragmento: «La serie de Taylor de g viene dada por

$$g(x)=\frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-x^6+x^8+\dots$$

Si $|x|\geq 1$, la serie de Taylor no es sumable. ¿Por qué? ¿Qué obstáculo invisible impide que la serie de Taylor se extienda más allá de -1 y 1?» Más adelante se muestra la respuesta a esta pregunta, que incluye resultados sobre de funciones complejas.

Ejemplos finales: **1**) La función

$$\sqrt{x}=e^{\log\sqrt{x}}=e^{\frac{1}{2}\log x}$$

es analítica en $(0,+\infty)$ ya que en ese intervalo lo son las dos funciones, exponencial y logarítmica, que intervienen. Sin embargo, encontrar la serie de Taylor de $\sqrt{x}$ en cada $a>0$ no es tarea fácil. Ni tampoco es fácil probar, utilizando esa serie, que la función es analítica. Por ejemplo, la serie de Taylor en $a=1$ de $f(x)=\sqrt{x}$ coincide en el intervalo $(0,2)$ con la función, es decir,

$$\sqrt{x}=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{1}{16}(x-1)^3-\frac{5}{128}(x-1)^4+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}(x-1)^n$$

donde

$$\binom{1/2}{0}=1,\ \binom{1/2}{1}=\frac{1}{2},\ \binom{1/2}{2}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}=-\frac{1}{8},\ \binom{1/2}{3}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}=\frac{1}{16},\ \text{etc.}$$

Como consecuencia, se puede aproximar el valor de $\sqrt{1.5}$

$$\sqrt{1.5}\simeq 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{5}{128}\left(\frac{1}{2}\right)^4+\frac{7}{256}\left(\frac{1}{2}\right)^5=1.2249755859375\dots$$

2) Para la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n\, 5^n}$$

es fácil comprobar que su intervalo de sumabilidad es $[0, 10)$. Además, como

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{n-1}}{5^n} = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-5}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{10-x}.$$

Luego la serie original es la primitiva de esta expresión que vale 0 en $x = 5$. Por tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n\, 5^n} = \log \frac{5}{10-x}.$$

3) *Suma numérica utilizando series de potencias.* Para calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, 2^n}$$

se considera la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\, 2^n}.$$

Se trata de calcular $f(1)$. Es fácil ver que $f'(x) = \frac{1}{2-x}$. Luego f es la primitiva de esta expresión que vale 0 en $x = 0$. Así, $f(x) = \log \frac{2}{2-x}$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, 2^n} = f(1) = \log 2.$$

4) *Otra suma numérica utilizando series de potencias.* Es posible calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

En este caso se define la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, x^{n-1}}{2^n},$$

y el problema se traduce en calcular $f(1)$. Una primitiva de f es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = \frac{x}{2-x} + C,$$

y así $f(x) = \left(\frac{x}{2-x}\right)' = \frac{2}{(2-x)^2}$. Por tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = f(1) = 2.$$

Ejercicios. Usando esta misma técnica se puede comprobar que

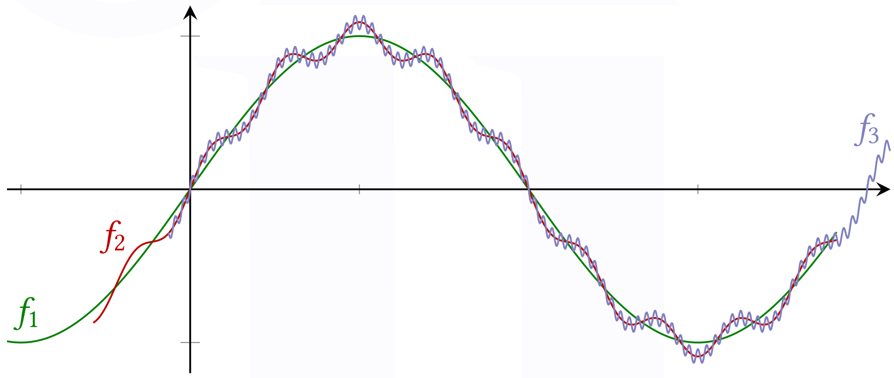
a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} = -\log(1-a), \quad \sum_{n=1}^{\infty} n\, a^n = \frac{a}{(1-a)^2}$ (en ambos casos para $|a| < 1$).

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n^4}{n!} = 16e, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n^2}{(n+1)n!} = 2e-2.$

Una curiosidad: funciones continuas no derivables en ningún punto. Es fácil definir funciones continuas que no sean derivables en un punto, o en unos cuantos puntos. Por ejemplo, $f(x) = |x| + |x-1|$ es continua en $\mathbb{R}$, pero no es diferenciable en $x = 0$ y $x = 1$. Utilizando series se pueden conseguir funciones continuas que cada vez oscilen más. Por ejemplo $f_1(x) = \operatorname{sen} x$ oscila a lo largo de toda la recta real; $f_2(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(9x)/11$ es una función que oscila mucho más *alrededor* de la función $\operatorname{sen} x$. Los números 9 y 11 se han elegido con la intención de conseguir una función que oscile mucho pero que tenga poca amplitud.

Las gráficas de

$$f_1(x) = \operatorname{sen} x, \quad f_2(x) = \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen}(9x)}{11}, \quad f_3(x) = \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen}(9x)}{11} + \frac{\operatorname{sen}(79x)}{21}$$



se van *enroscando* cada vez más cada una alrededor de la anterior. Si se eligen bien estos números que aparecen $9, 11, 79, 21, \ldots$ y añadiendo más términos, se puede conseguir como límite (suma de una serie) una función continua que no puede derivarse en ningún punto. Esta función es similar a la función de Darboux descrita más adelante.

En 1872, Weierstrass encontró la forma de definir una función con tales propiedades, continua y sin derivada en cada punto. Su expresión es:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

donde $0 < b < 1$, a es un número impar y $ab > 1 + 3\pi/2$, es decir, b es pequeño y a suficientemente grande para que la gráfica tenga muchas oscilaciones que no se repitan. Como $|b^n \cos(a^n \pi x)| \leq b^n$ y la serie $\sum b^n$ es sumable, se tiene que f es la suma de una serie absoluta y uniformemente sumable en $\mathbb{R}$. Por tanto f es una función continua en $\mathbb{R}$. Sin embargo, f no admite derivada en ningún punto.

Sobre esa misma época, Darboux encuentra la función

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}((n+1)!\, x)}{n!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

y Cellérier la función

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(a^n x)}{a^n} \qquad (x \in \mathbb{R}, a > 1000)$$

ambas continuas y no derivables en ningún punto.

En todos estos ejemplos, las funciones son límite uniforme de funciones que son continuas y derivables infinitas veces. Un ejemplo más de la relación entre sumabilidad uniforme y derivabilidad.

Relación entre funciones trigonométricas y exponenciales. De los desarrollos de las funciones e^x, $\mathrm{sen}\, x$ y $\cos x$,

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ \mathrm{sen}\, x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

se puede comprobar que

$$e^{ix} = \cos x + i\, \mathrm{sen}\, x.$$

Esta fórmula es válida para todo $x \in \mathbb{R}$. En particular, para $x = \pi$ se obtiene

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

que se conoce como *fórmula de Euler.*

Además, las funciones trigonométricas $\cos x$ y $\mathrm{sen}\, x$ son la parte real e imaginaria de la función exponencial e^{ix}.

Todavía más: como $e^{-ix} = \cos x - i\, \mathrm{sen}\, x$, entonces

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \mathrm{sen}\, x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}.$$

Aproximación de π con series. Números tan especiales como π pueden aparecer como suma de series, como puede verse en `http://en.wikipedia.org/wiki/Basel_problem`:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$