5

Cálculo II

El espacio $\mathbb{R}^n$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

20 · 04 · 2022

El espacio $\mathbb{R}^n$. Distancia y norma

En este capítulo se va a estudiar el espacio

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \overset{(n}{\cdots} \times \mathbb{R} = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \ : \ x_i \in \mathbb{R} \ \ (1 \le i \le n) \right\}$$

con las operaciones usuales

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} = \ & (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \\ \lambda \mathbf{x} = \ & \lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n), \end{aligned}$$

donde $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. El elemento neutro de la suma se escribe como $\mathbf{0} = (0, \overset{(n}{\ldots}, 0)$.

Se trata de un espacio vectorial de dimensión n. Una base de este espacio, que se conoce como base canónica, es $\{(1, 0, \ldots, 0),\ (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)\}$. En el caso $n = 1$ se trata además de un cuerpo.

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$ se tiene $(3, 5) + 4(2, -1) = (3, 5) + (8, -4) = (11, 1)$. La base canónica está formada por los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

A diferencia de lo que ocurre en $\mathbb{R}$, los espacios $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots$ no tienen un orden compatible con las operaciones. No hay supremo ni ínfimo de un conjunto acotado. Hay que revisar entonces todas las propiedades que tiene $\mathbb{R}$ en las que aparece el orden; y todas las propiedades que se demuestran utilizando el supremo o el ínfimo de algún conjunto.

Definición. Se llama *norma* o módulo de $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ al número

$$\|\mathbf{x}\| = \|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\ .$$

Para el caso $n = 1$ se tiene $\|x\| = \sqrt{x^2} = |x|$, es decir, el valor absoluto de $x \in \mathbb{R}$. Para el elemento $(2, 5) \in \mathbb{R}^2$ la norma es $\|(2, 5)\| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$.

Esta norma verifica las mismas propiedades que el valor absoluto en $\mathbb{R}$.

La aplicación $\vert\ \vert : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ verifica	La aplicación $\Vert\ \Vert : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ verifica
1) $\vert x\vert \geq 0$, y $\vert x\vert = 0 \Leftrightarrow x = 0$	1) $\Vert\mathbf{x}\Vert \geq 0$, y $\Vert\mathbf{x}\Vert = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$
2) $\vert x+y\vert \leq \vert x\vert + \vert y\vert$	2) $\Vert\mathbf{x}+\mathbf{y}\Vert \leq \Vert\mathbf{x}\Vert + \Vert\mathbf{y}\Vert$
3) $\vert x \cdot y\vert = \vert x\vert \cdot \vert y\vert$	3) $\Vert\lambda\mathbf{x}\Vert = \vert\lambda\vert \cdot \Vert\mathbf{x}\Vert$
para $x, y \in \mathbb{R}$.	para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

La demostración de las propiedades 1) y 3) es muy simple. Para probar 2) se hace

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2\sum_{i=1}^n x_i y_i \\
&\leq \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2\Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i=1}^n y_i^2\Big)^{1/2} \\
&= \left(\Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{i=1}^n y_i^2\Big)^{1/2}\right)^2 = (\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|)^2.
\end{aligned}$$

Se ha utilizado la desigualdad

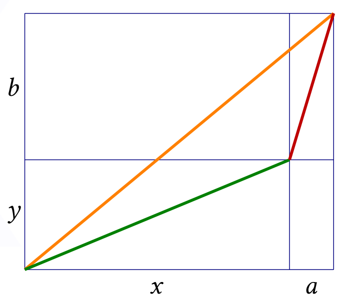
$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i=1}^n y_i^2\Big)^{1/2}, \qquad (\dagger)$$

que se suele escribir como $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \leq \|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|$, donde $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ se conoce como *producto escalar*. La demostración es sencilla sin más que elevar ambos miembros al cuadrado y simplificar. Una prueba alternativa, más corta y elegante, consiste en escribir

$$0 \leq \sum_{i=1}^n (x_i + t y_i)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + t^2\sum_{i=1}^n y_i^2 + 2t\sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

(es una suma de cuadrados y por tanto es positiva). Se trata de un polinomio de grado 2 en t que es siempre positivo. Por tanto su discriminante debe ser menor o igual que cero. Esa condición del discriminante es justamente la desigualdad ($\dagger$) anterior, conocida como desigualdad de Cauchy-Schwarz[1]. Así termina la prueba de 2), que se conoce como desigualdad triangular o de Minkowski

Por ejemplo, para vectores con dos coordenadas (x, y) y (a, b), utilizando el teorema de Pitágoras y el hecho de que cada lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos



$$\begin{array}{ccccc}
\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2} & \leq & \sqrt{x^2+y^2} & + & \sqrt{a^2+b^2} \\
\|(x,y)+(a,b)\| & \leq & \|(x,y)\| & + & \|(a,b)\|.
\end{array}$$

De ahí viene el nombre de desigualdad triangular.

El valor absoluto en $\mathbb{R}$ y la norma en $\mathbb{R}^n$ definen la distancia entre sus elementos, que se llama distancia inducida por la norma (por el valor absoluto en el caso de $\mathbb{R}$).

[1] Es un caso particular (si el exponente es 2) de una más general, conocida como desigualdad de Hölder.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Para $x, y \in \mathbb{R}$ se define

$$d(x,y) = |x-y|$$

y verifica
1) $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2) $d(x,y) \;\leq\; d(x,z) + d(z,y) \quad (z \in \mathbb{R})$
3) $d(x,y) \;=\; d(y,x)$

Para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se define

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}$$

y verifica
1) $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq 0$, $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$
2) $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \;\leq\; d(\mathbf{x},\mathbf{z}) + d(\mathbf{z},\mathbf{y}) \quad (\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n)$
3) $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \;=\; d(\mathbf{y},\mathbf{x})$

El concepto de intervalo en $\mathbb{R}$, por ejemplo un intervalo centrado en un punto $a \in \mathbb{R}$ como $(a-r,\ a+r)$, se puede extender para el caso $\mathbb{R}$ sin más que notar que

$$(a-r,\ a+r) \;=\; \{x \in \mathbb{R} \;:\; |x-a| < r\} \;=\; \{x \in \mathbb{R} \;:\; d(x-a) < r\}.$$

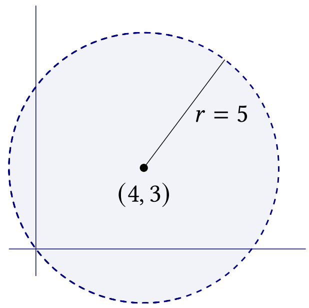
La generalización del concepto de intervalo se llama *bola*.

Definición. La bola (abierta y cerrada) de centro $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$ es el conjunto

$$B(\mathbf{a}, r) \;=\; \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \;:\; \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < r\}$$

$$B[\mathbf{a}, r] \;=\; \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \;:\; \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| \leq r\}$$

Ejemplo: en $\mathbb{R}^2$ la bola abierta de centro $(4,3)$ y radio 5 es el conjunto

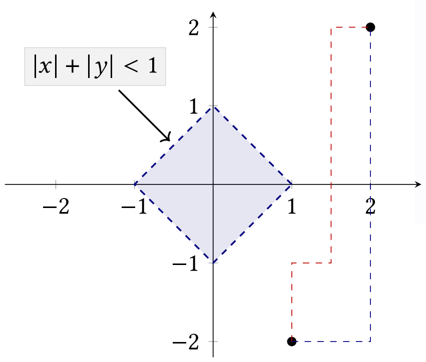


$$\begin{aligned} B\big((4,3),\,5\big) \;&=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \|(x,y) - (4,3)\| < 5\} \\ &=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} < 5\} \end{aligned}$$

La ecuación $(x-4)^2 + (y-3)^2 < 5^2$ representa todos los puntos, sin el borde, del círculo de radio 5 centrado en $(4,3)$.

Con la distancia usual que se ha definido en $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots$ las bolas son círculos, esferas,... Son las generalizaciones del concepto de intervalo en $\mathbb{R}$.

Ejemplos de otras normas. Se pueden definir otras normas, y por tanto otras distancias, en $\mathbb{R}^2$ (extensible a $\mathbb{R}^n$), como

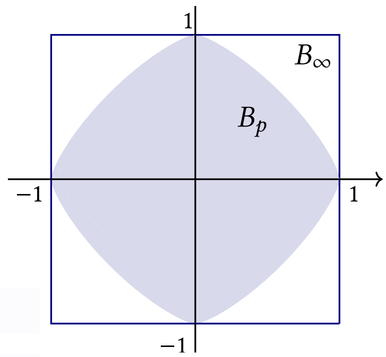


$\|(x,y)\|_1 \;=\; |x| + |y|$, cuya distancia asociada o inducida es $d\big((x,y),\,(a,b)\big) \;=\; |x-a| + |y-b|$. Esta distancia entre dos puntos ya no es la línea recta que los une; se trata de medir el movimiento horizontal más el vertical para llegar de un punto a otro (por este motivo se llama también Manhattan norm o Taxicab norm). Por ejemplo $d\big((1,-2),\,(2,2)\big) \;=\; |1-2| + |-2-2| \;=\; 5$.
Para esta norma, la bola $B((0,0),\,1)$ está formada por los puntos (x,y) que verifican $|x| + |y| < 1$, que es el cuadrado sombreado en el dibujo.

El borde del cuadrado lo forman los puntos que cumplen $|x| + |y| = 1$. La ecuación $|x| + |y| \leq 1$ representa al interior más el borde.

También se definen para $1 \leq p < +\infty$

$$\|(x, y)\|_p = \left(|x|^p + |y|^p\right)^{1/p}$$
$$\|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|,\ |y|\}$$

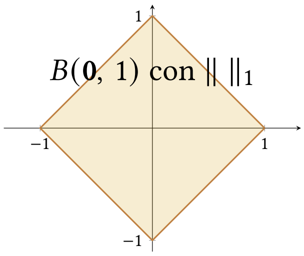


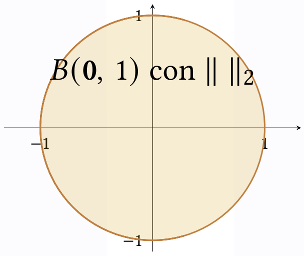
que definen las distancias correspondientes, cuyas bolas $B((0,0),\ 1)$ se han representado (una sombreada y otra no) en el dibujo con los nombres B_p y B_∞. Se trata de los conjuntos de puntos (x, y) que cumplen $|x|^p + |y|^p < 1$ para la primera norma, y que cumplen $\max\{|x|,\ |y|\} < 1$ para la segunda.

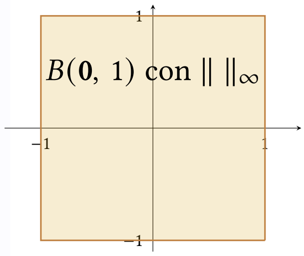
Las bolas B_p comienzan siendo un cuadrado para $p = 1$. A medida que p crece se van expandiendo, para $p = 2$ es un círculo, y siguen curvándose, hasta parecerse cada vez más a B_∞, que es otro cuadrado.

Propiedades topológicas de $\mathbb{R}^n$

En todo este capítulo utilizaremos siempre la norma $\|\ \|_2$, que se conoce como *norma usual*. Las propiedades topológicas en $\mathbb{R}^n$ son las mismas si se utiliza una u otra. La diferencia es utilizar bolas redondas en lugar de bolas cuadradas o de otras formas.



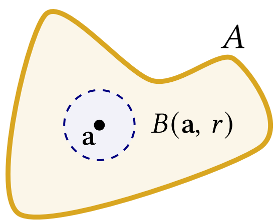




Definición. Sean $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ y $A \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que

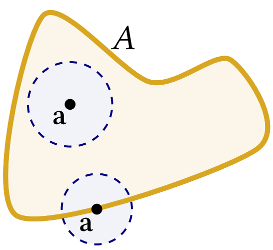
- $\mathbf{a}$ es un punto interior de A, y se escribe $\mathbf{a} \in \mathring{A}$, si existe alguna bola $B(\mathbf{a},\ r)$ contenida en A. Por tanto

$$\exists\, r > 0\ :\ B(\mathbf{a},\ r) \subset A.$$



En ese caso, $\mathbf{a} \in B(\mathbf{a},\ r) \subset A$, y entonces $\mathbf{a} \in A$. Es decir, los puntos interiores de A hay que buscarlos dentro de A. Esta propiedad puede expresarse como $\mathring{A} \subset A$.

Como ejemplo, es fácil probar que todos los puntos de una bola abierta $B(\mathbf{a}, r)$ son puntos interiores.



- $\mathbf{a}$ es un punto adherente a A, y se escribe $\mathbf{a} \in \overline{A}$, si toda bola $B(\mathbf{a},\ r)$ contiene puntos de A. Se puede escribir como

$$B(\mathbf{a},\ r) \cap A \neq \varnothing \quad \forall r > 0.$$

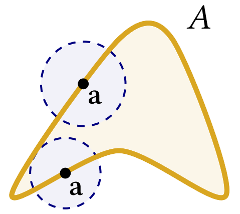
En particular, si $\mathbf{a} \in A$ entonces $\mathbf{a} \in \overline{A}$, es decir, $A \subset \overline{A}$.

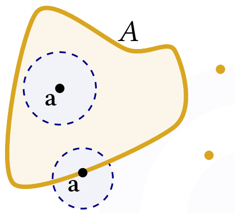
Como ejemplo, puede probarse que $\overline{B(\mathbf{a}, r)} = B[\mathbf{a}, r]$.

• **a** es un punto frontera de A, y se escribe $\mathbf{a} \in \partial A$, si toda bola $B(\mathbf{a}, r)$ contiene puntos de A y puntos de A^c. Se puede escribir como

$$B(\mathbf{a}, r) \cap A \neq \varnothing, \; B(\mathbf{a}, r) \cap A^c \neq \varnothing \quad \forall r > 0.$$

En resumen, $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.





• **a** es un punto de acumulación de A, y se escribe $\mathbf{a} \in A'$, si toda bola $B(\mathbf{a}, r)$ contiene puntos de A distintos de **a**. Se puede escribir como

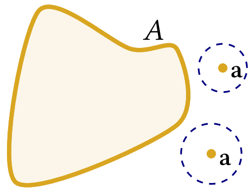
$$\big(B(\mathbf{a}, r) \setminus \{\mathbf{a}\}\big) \cap A \neq \varnothing \quad \forall r > 0.$$

En particular, si $\mathbf{a} \in A'$ entonces $\mathbf{a} \in \overline{A}$, es decir, $A' \subset \overline{A}$.

• **a** es un punto aislado de A, y se escribe $\mathbf{a} \in A^s$, si existe alguna bola $B(\mathbf{a}, r)$ cuya intersección con A es sólo el punto **a**. Se puede escribir como

$$\exists r > 0 \; : \; B(\mathbf{a}, r) \cap A = \{\mathbf{a}\}.$$

En particular, cada punto de A es aislado o es de acumulación: $A^s \subset A \subset A' \cup A^s$.

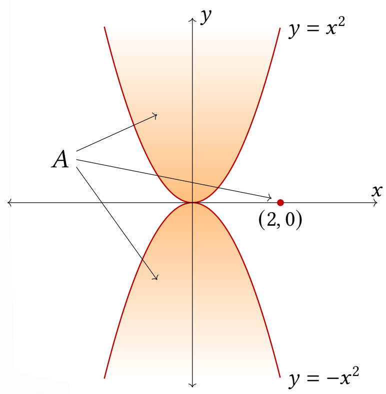


En el caso de $\mathbb{R}$ todas las definiciones son idénticas, sólo que se cambia la bola $B(\mathbf{a}, r)$ centrada en **a** por el intervalo $(a - r, a + r)$ centrado en a.

Ejemplos. a) En $\mathbb{R}^2$ se considera el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < -x^2\} \cup \{(2, 0)\}$$

tal y como se muestra a la derecha. Todos los puntos, salvo el $(2, 0)$ que es aislado, son interiores. La frontera del conjunto está formada por $(2, 0)$ y los puntos de las gráficas de las funciones $y = x^2$ y $y = -x^2$. La adherencia de A es la unión de A y su frontera.



b) En $\mathbb{R}^2$ los puntos de la recta $x + y = 1$ forman un conjunto de interior vacío. Es un conjunto en el que todos los puntos son frontera.

c) En $\mathbb{R}^2$, el conjunto

$$A = \{(x, y) : x > 0\} \cup \{(x, y) : y = 0\}$$

verifica

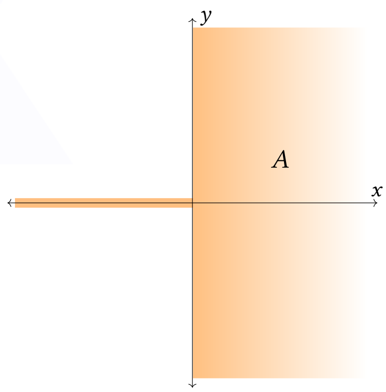
a) $\mathring{A} = \{(x, y) : x > 0\}$,

b) $\overline{A} = \{(x, y) : x \geq 0\} \cup \{(x, y) : y = 0\}$,

c) $\partial A = \{(x, y) : x = 0\} \cup \{(x, y) : y = 0, x < 0\}$,

d) $A' = \overline{A}$,

e) $A^s = \varnothing$.



Departamento de Matemáticas Universidad de Extremadura

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Proposición. *Para $A \subset \mathbb{R}^n$ se tiene*

a) $\overline{A} = A \cup \partial A = A \cup A' = A^s \cup A'$

b) Hay casos en los que $A \subset A'$ y casos en los que $A' \subset A$. Por ejemplo, cada conjunto A finito verifica $A' = \varnothing \subset A$. Para otros conjuntos sin puntos aislados, como $A = B(\mathbf{a},\ r)$, se tiene $A \subset A' = B[\mathbf{a},\ r]$.

c) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \partial A^c$

d) $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$ (todos distintos, en general)

e) $A \cup A^c = \mathbb{R}^n, \quad A \cap A^c = \varnothing$

f) $\mathring{A} = \overline{A} \Leftrightarrow [A = \mathbb{R}^n$ o $A = \varnothing]$ (más adelante, al estudiar conjuntos conexos se verá que si $\mathring{A} = \overline{A}$ entonces $\mathbb{R}^n = \mathring{A} \cup (\mathring{A})^c = \mathring{A} \cup (\overline{A})^c$, una unión disjunta de abiertos, que es imposible salvo que alguno sea vacío)

Definición. Se dice que $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto si verifica alguna de las condiciones equivalentes:

a) $A = \mathring{A}$

b) A^c es cerrado, es decir, $A^c = \overline{A^c}$

c) A es unión de bolas abiertas

La familia de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$ se llama *topología* (o topología usual, para distinguirla de otras topologías). Esta familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ verifica

a) $\mathbb{R}^n$ y $\varnothing$ son abiertos,

b) la unión de conjuntos abiertos es abierta, y

c) la intersección finita de conjuntos abiertos es abierta.

En general, la intersección de abiertos no tiene porqué ser un conjunto abierto, como muestra el ejemplo

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B\left(\mathbf{a},\ \frac{1}{n}\right) = \{\mathbf{a}\},$$

una familia de abiertos cuya intersección no lo es.

Definición. Se dice que $A \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado si verifica alguna de las condiciones equivalentes:

a) $A = \overline{A}$

b) A^c es abierto, es decir, $A^c = \mathring{A^c}$

La familia de subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^n$ verifica

a) $\mathbb{R}^n$ y $\varnothing$ son cerrados,

b) la intersección de conjuntos cerrados es cerrada, y

c) la unión finita de conjuntos cerrados es cerrada.

En general, la unión de cerrados no tiene porqué ser un conjunto cerrado, como muestra el ejemplo

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B\left[\mathbf{a},\ \frac{n-1}{n}\right] = B(\mathbf{a},\ 1),$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

una familia de cerrados cuya unión no lo es.

En $\mathbb{R}^n$, al igual que en $\mathbb{R}$, se cumplen las leyes de De Morgan

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c, \qquad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c.$$

Ejemplos (de conjuntos abiertos y conjuntos cerrados):

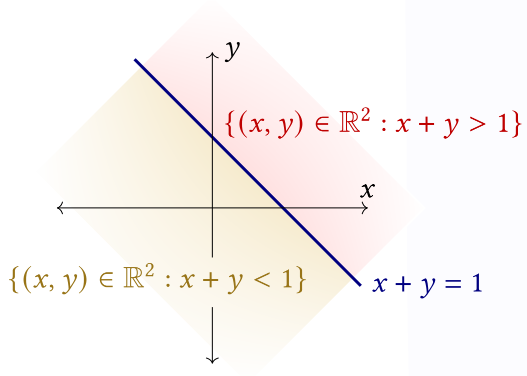
a) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy=0\}$ es un conjunto cerrado (se trata del conjunto formado por los dos ejes X e Y)

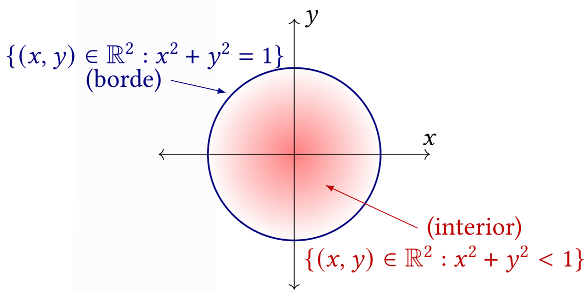
b) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y=1\}$ es un conjunto cerrado. Es una recta.

c) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y>1\}$ es un conjunto abierto. Es uno de los semiplanos abiertos que define la recta $x+y=1$.

d) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$ es un conjunto cerrado. Su interior está formado por los puntos que cumplen $x^2+y^2<1$; su adherencia por los puntos que cumplen $x^2+y^2=1$.

e) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=x^2+y\}$ es un conjunto cerrado. También lo es si se cambia el signo $=$ por $\leq$ o $\geq$. Y es abierto si se cambia el signo $=$ por $<$ o $>$.





Ejercicios. Sean $A\subset\mathbb{R}^n$, $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$ y $r>0$. Entonces

a) Toda bola $B(\mathbf{a},r)$ es un conjunto abierto. Toda bola $B[\mathbf{a},r]$ es un conjunto cerrado.

b) $\mathring{A}$ es abierto y $\overline{A}$ es cerrado. Por tanto, no tiene sentido hacer “el interior del interior” o “la adhrencia de la adherencia”, ya que $\mathring{\mathring{A}}=\mathring{A}$ y $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$.

c) $\mathring{A}$ es el mayor abierto contenido en A. En otras palabras, si F es abierto y $F\subset A$, entonces $F\subset\mathring{A}$.

d) $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A. Si F es cerrado y $A\subset F$, entonces $\overline{A}\subset F$.

e) Si $x\in\overline{A}\setminus\mathring{A}$, entonces $x\in\partial A$. En otros términos, $\overline{A}=\mathring{A}\cup\partial A$ (unión disjunta).

La mayoría de propiedades en $\mathbb{R}^n$ son idénticas a las que ya se conocían de $\mathbb{R}$. Hay que hacer cambios evidentes (intervalos por bolas,…) pero todas estas definiciones y resultados sobre conjuntos abiertos y cerrados son similares.

Sin embargo, en $\mathbb{R}^n$ ya no hay orden. No hay supremo de un conjunto, ni ínfimo, salvo en el caso de $\mathbb{R}$, ni por tanto teoremas relacionados con él, como el teorema fundamental del orden.

Hay otros resultados que sí se conservan cuyas demostraciones deben adaptarse para esta falta del orden, supremo,...

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ no hay ningún orden compatible con las operaciones: una relación de orden total que verifique

$$\begin{aligned} x<y &\Rightarrow x+z<y+z, \\ \lambda>0,\ x<y &\Rightarrow \lambda x<\lambda y. \end{aligned}$$

Igual que se probó en $\mathbb{C}$, se trata de un cuerpo no ordenable. No hay resultados como el teorema fundamental del orden en $\mathbb{R}^n$ pero sí otros teoremas que en $\mathbb{R}$ son equivalentes a aquél.

Lema. *Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\max\{|a|,|b|\} \le \sqrt{a^2+b^2} \le |a|+|b|.$$

(La demostración es muy simple: no hay más que elevar al cuadrado.)

Este resultado se puede expresar así: la norma de un vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ es grande o pequeña según indiquen sus coordenadas,

$$\max\{|a|,|b|\} \le \|(a,b)\| \le |a|+|b|.$$

Coordenadas pequeñas dan como resultado vectores con norma pequeña. En particular, para hacer pequeña la cantidad $\|(a, b)\|$ es necesario y suficiente hacerlo en cada coordenada. La misma idea puede aplicarse para vectores de $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, \ldots$ Por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$ se tiene

$$\max\{|a|,|b|,|c|\} \le \|(a,b,c)\| \le |a|+|b|+|c|.$$

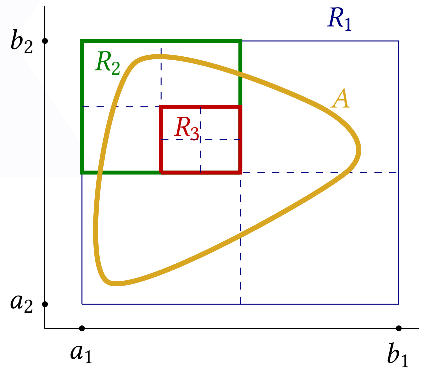
Para recordar este resultado se puede escribir

$$(x,y) \longrightarrow (0,0) \iff \begin{cases} x \longrightarrow 0 \\ y \longrightarrow 0 \end{cases}$$

y similar para tres, cuatro,... coordenadas.

Teorema (de Bolzano). *Todo conjunto infinito y acotado $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene algún punto de acumulación.* Como enunciado alternativo:

$$\textit{si } A \subset \mathbb{R}^n \textit{ es infinito y acotado} \Rightarrow A' \neq \varnothing.$$



(Por definición, $A \subset \mathbb{R}^n$ es acotado si está contenido en un rectángulo n-dimensional, $A \subset [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$.)

Demostración. El dibujo y el razonamiento se hará para el caso $A \subset \mathbb{R}^2$, para los demás es todo idéntico. Se supone que A está contenido en un rectángulo $R_1 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Al dividir en mitades cada lado de R_1, se parte el rectángulo en cuatro rectángulos.

El conjunto A es infinito, luego en alguno de esos cuatro rectángulos tiene que haber infinitos elementos de A, por ejemplo, en el rectángulo R_2 de color verde. Este rectángulo vuelve a dividirse en cuatro y en algunos de esos cuatro rectángulos tiene que haber infinitos elementos de A, ahora marcado en rojo. Se vuelve a repetir el proceso en cada rectángulo elegido. Se tiene entonces una sucesión de rectángulos que verifican $R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset \ldots$ y además todos contienen infinitos elementos de A.

En cada uno de esos rectángulos se elige un elemento de A, por ejemplo, podría ser uno de los vértices o el centro del rectángulo (si es que son elementos de A). Así, se elige $\mathbf{a}_1 = (x_1, y_1)$ elemento de A en R_1; otro elemento distinto $\mathbf{a}_2 = (x_2, y_2)$ de A en R_2, etcétera.

Se forma así una sucesión $(\mathbf{a}_n) = (x_n, y_n)$ de elementos de A. Se trata de ver que esta sucesión converge, y por tanto su límite será un elemento $\mathbf{a} \in A'$.

Para $n < m$ se tiene $\|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_m\| \leq D/2^n$, donde D es la diagonal del primer rectángulo. Esto es así porque ambos están en un rectángulo común: $\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_m \in R_n$ y la diagonal de R_n es $D/2^n$.

Por tanto $(\mathbf{a}_n)$ es de Cauchy: $\|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_m\| \longrightarrow 0$. Aplicando el lema anterior, en cada coordenada ocurre lo mismo: $|x_n - x_m| \longrightarrow 0$ y $|y_n - y_m| \longrightarrow 0$. Ambas sucesiones son de Cauchy en $\mathbb{R}$, y por tanto convergentes. Como $(x_n) \longrightarrow x$, $(y_n) \longrightarrow y$, entonces $|x_n - x| \longrightarrow 0$, $|y_n - y| \longrightarrow 0$. Se puede aplicar otra vez el lema anterior y se obtiene $\|(x_n, y_n) - (x, y)\| \longrightarrow 0$, es decir, $(\mathbf{a}_n)$ converge a $\mathbf{a} = (x, y)$. Este límite es un punto de acumulación de A. □

Teorema (Heine-Borel-Lebesgue-Bolzano-Weiertrass). *Para $A \subset \mathbb{R}^n$ son equivalentes:*

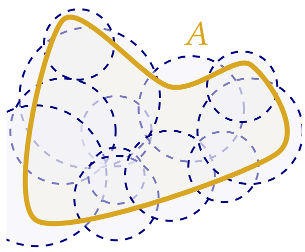
a) *A es compacto, es decir, de cada recubrimiento abierto de A se puede extraer un subrecubrimiento finito,*

b) *Todo subconjunto infinito de A tiene algún punto de acumulación en A,*

c) *A es cerrado y acotado.*

La demostración es la misma que en $\mathbb{R}$. Los mismos argumentos de aquella demostración se trasladan para un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, haciendo cambios sencillos como intervalo por bola, etc.

Gráficamente, para un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$, la compacidad significa: cada vez que se cubra A con *bolas abiertas* (un recubrimiento abierto de A), basta con una cantidad finita de ellas para seguir cubriendo al conjunto A (se puede extraer un subrecubrimiento finito). Después de este teorema la compacidad es fácil de comprobar: es equivalente a ser cerrado y acotado.



Ejemplos:

1) Todo subconjunto finito, como por ejemplo un conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ formado por dos vectores, es compacto en $\mathbb{R}^n$.

2) Todo rectángulo cerrado $A = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ es compacto.

3) $A = (0, 1) \times (0, 1]$ no es compacto en $\mathbb{R}^2$.

4) Una recta de ecuación $ax + by + c = 0$ en $\mathbb{R}^2$ es un conjunto cerrado pero no compacto.

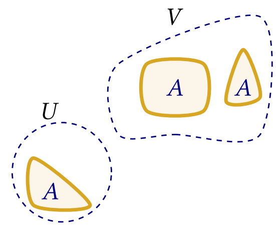
5) Cualquier subespacio vectorial no trivial de $\mathbb{R}^n$ no puede ser compacto

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Conjuntos conexos

Definición. Se dice que $A \subset \mathbb{R}^n$ es *no conexo* si existen U y V abiertos disjuntos en $\mathbb{R}^n$ tales que

$$A \cap U \neq \varnothing, \quad A \cap V \neq \varnothing, \quad A \subset U \cup V.$$



Se dice también que A es disconexo o inconexo, que A tiene trozos separados, que está roto o que está formado por varias piezas. Si existen U y V abiertos disjuntos tales que $A \subset U \cup V$ y en ambos hay elementos de A, entonces A es no conexo.

En ese caso se tiene $A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$, es decir, A está formado por trozos separados por dos conjuntos abiertos: uno se encuentra dentro de U y otro dentro de V.

Cuando no se cumple está condición de no conexo se dice que A es *conexo*. Es fácil comprobar que $A \subset \mathbb{R}^n$ es conexo si y sólo si verifica lo siguiente: dados abiertos disjuntos $U, V \subset \mathbb{R}^n$ tales que $A \subset U \cup V$, entonces se tiene $A \subset U$ o $A \subset V$.

Ejemplos:

1) En $\mathbb{R}$, los conjuntos $\{-1, 7\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ y $\{0\}^c$ son todos no conexos; pero $\mathbb{R}$ y $\{4\}$ son conexos.

2) En $\mathbb{R}^2$ cualquier rectángulo es conexo, $\{\mathbf{0}\}^c$ es conexo, cada recta es conexa.

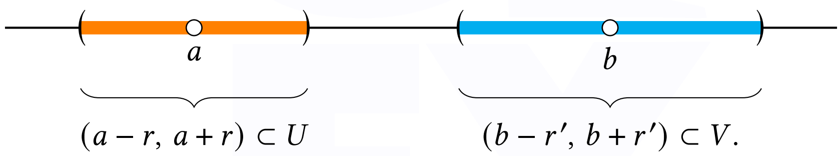
3) En $\mathbb{R}^3$ un plano como $3x + 2y - z = 7$ es conexo, y el propio espacio $\mathbb{R}^3$ es conexo.

El estudio de los conjuntos conexos es diferente en los casos de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ ($n > 1$). En el primer caso la conexión es una propiedad que sólo tienen los intervalos. En el segundo hay distintos tipos de conexiones, como la convexidad, conexión por arcos,…

A) Conjuntos conexos en $\mathbb{R}$

Teorema. $\mathbb{R}$ *es conexo.*

Demostración. Se supone que existen U y V abiertos disjuntos tales que $\mathbb{R} = U \cup V$. Sean $a \in U$ y $b \in V$ con $a < b$. Como U y V son abiertos, existen intervalos $(a - r,\ a + r) \subset U$ y $(b - r',\ b + r') \subset V$, como muestra la figura



Sea $[a, b] \cap U$ (los elementos de U que están entre a y b). Se trata de un conjunto no vacío, ya que a es un elemento suyo, y acotado superiormente, ya que b es cota superior. Por tanto existe $c = \sup \Big([a, b] \cap U \Big)$. Por tanto, si $x \in [a, b] \cap U$ entonces $x \leq c$ (ya que c es cota superior de todos ellos).

Como se ha supuesto que $\mathbb{R} = U \cup V$, tendrá que darse una de las dos situaciones siguientes: $c \in U$ o bien $c \in V$. Se trata de probar que ambas situaciones son imposibles, llegando entonces a una contradicción.

- Si $c \in U$ entonces $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset U$ para algún $\varepsilon > 0$. Pero esto es imposible, ya que c es cota superior de $[a, b] \cap U$ y a su derecha no puede haber elementos de dicho conjunto.

- Si $c \in V$ entonces $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset V$ para algún $\varepsilon > 0$. En este caso, todos los valores de $(c-\varepsilon,\ c)$ son cotas superiores de $[a,b] \cap U$, lo que niega la definición de c como la menor de las cotas superiores de dicho conjunto.

En cualquier caso se llega a una contradicción al suponer que $\mathbb{R}$ no es conexo. □

Nota. Si se supone que $\mathbb{R}$ no es conexo, es decir, $\mathbb{R} = U \cup V$, con U y V abiertos y disjuntos, entonces la aplicación $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in U \\ 1 & x \in V \end{cases}$$

es continua (porque lo es en todos los puntos), alcanza valores positivos, valores negativos y no alcanza el valor 0. Se llega entonces a un absurdo: otra prueba más de que la suposición «$\mathbb{R}$ no es conexo» es imposible.

La misma idea de la demostración del teorema sirve para probar que cualquier intervalo (abierto, cerrado,...) en $\mathbb{R}$ es conexo. Por otra parte, es evidente que si un conjunto no es un intervalo entonces no es conexo, que es justamente la implicación en sentido contrario. Recuérdese que $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo si verifica $[x, y \in I \Rightarrow\ [x,y] \subset I]$. Por tanto, si un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ no es un intervalo, entonces existen $x < z < y$ tales que $x, y \in A$ pero $z \notin A$. Luego puede escribirse $A \subset (-\infty, z) \cup (z, +\infty)$ y resulta que A no es conexo. En resumen,

Proposición. *En $\mathbb{R}$ un conjunto es conexo si y sólo si es un intervalo.*

Esto resuelve la caracterización de los conjuntos conexos en $\mathbb{R}$.

Conexión y continuidad. Los conjuntos conexos son esenciales en algunas propiedades de las funciones continuas. Por ejemplo, la función

$$f : x \in (-1,0) \cup (1,5) \ \longrightarrow\ f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ -2 & \text{si} \quad 1 < x < 5 \end{cases}$$

es continua, alcanza valores positivos y negativos, pero no alcanza el valor cero. Esto parece contradecir algún teorema conocido sobre funciones continuas.

Sea $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Es evidente que

$$A = f^{-1}(-\infty, 0) \cup f^{-1}\{0\} \cup f^{-1}(0, +\infty).$$

Si f es continua entonces $f^{-1}(-\infty, 0)$ y $f^{-1}(0,+\infty)$ son abiertos (además de disjuntos).

Si f alcanza valores positivos y negativos entonces ambos conjuntos son no vacíos.

Por tanto, si A es conexo se debe cumplir $f^{-1}\{0\} \neq \emptyset$.

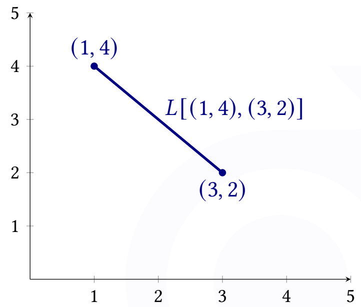
Este resultado se conoce como Teorema de Bolzano y es esencial en él la continuidad de la función involucrada y la conexión del conjunto en el que está definida. De la misma forma, es fácil probar que si $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, toma valores positivos y negativos y no alcanza el valor cero, entonces A no es conexo.

B) Conjuntos conexos en $\mathbb{R}^n$. Convexidad y conexión por poligonales y por arcos

La caracterización conseguida en $\mathbb{R}$, un conjunto es conexo si y sólo si es un intervalo, no puede extenderse a $\mathbb{R}^n$ para $n > 1$. Hay una gran variedad de conjuntos conexos en $\mathbb{R}^n$, variedad que no hay en $\mathbb{R}$.

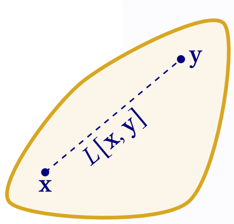
Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, al conjunto $L[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \{t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} \,:\, t \in [0,1]\}$ se le llama *segmento* que une a $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$, el segmento que a $(1,4)$ y $(3,2)$ es el conjunto

$$\begin{aligned} L[(1,4),(3,2)] &= \{t(1,4) + (1-t)(3,2) \,:\, t \in [0,1]\} \\ &= \{(3-2t,\ 2+2t) \,:\, t \in [0,1]\} \end{aligned}$$

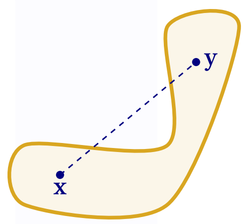


Los elementos del segmento
$$L[(1,4),(3,2)] = \{t(1,4) + (1-t)(3,2) \,:\, t \in [0,1]\}$$
se consiguen al ir dando valores a $t \in [0,1]$. Para $t = 0$, el punto del segmento es $(3,2)$. Para $t = 1/2$ se obtiene el punto medio entre $(1,4)$ y $(3,2)$, es decir $\big((1,4)+(3,2)\big)/2$. A medida que t crece se obtienen puntos más cercanos a $(1,4)$. Finalmente, para $t = 1$ se obtiene $(1,4)$.

Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es *convexo* si $L[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset A$ para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$, es decir, si cada segmento que une puntos de A está contenido en A. Se puede expresar también como A es convexo si $tA + (1-t)A \subset A$ para todo $t \in [0,1]$.



A convexo



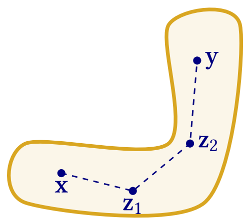
A no convexo

Por ejemplo, toda bola $B(\mathbf{x}, r)$ o todo subespacio vectorial son conjuntos convexos. No es convexo $\{\mathbf{0}\}^c$.

Se dice que A es *conexo por poligonales* si dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ existen $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n \in A$ tales que

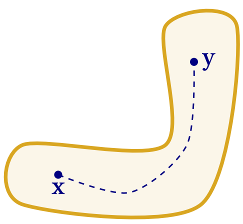
$$L[\mathbf{x}, \mathbf{z}_1] \cup L[\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2] \cup \ldots \cup L[\mathbf{z}_n, \mathbf{y}] \subset A.$$

La diferencia con la convexidad es que los puntos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ ahora se pueden unir con varios segmentos, no sólo con uno. Ambas propiedades son algebraicas.



A conexo por poligonales

En $\mathbb{R}^2$, una circunferencia o la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ son conjuntos no conexos por poligonales. En cambio, $\{\mathbf{0}\}^c$ sí lo es.



A conexo por arcos

Se dice que A es *conexo por arcos* si para cada $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ existe una curva continua $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que verifica

a) $f(a) = \mathbf{x}$, $f(b) = \mathbf{y}$,

b) $f(t) \in A$ para todo $t \in [a,b]$.

(Se trata de una curva continua contenida en A que comienza en $\mathbf{x}$ y termina en $\mathbf{y}$.)

Por ejemplo, son conjuntos conexos por arcos en $\mathbb{R}^2$ una circunferencia o la gráfica de una función continua.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Teorema. *Se tienen las implicaciones*

$$\text{convexo} \underset{a)}{\Longrightarrow} \text{conexo por poligonales} \underset{b)}{\Longrightarrow} \text{conexo por arcos} \underset{c)}{\Longrightarrow} \text{conexo}$$

y además todas son estrictas.

En la demostración se irán viendo ejemplos que muestran que ninguna de esas implicaciones es una equivalencia.

Demostración. a) Es evidente que si A es convexo entonces A es conexo por poligonales. Por otra parte, hay muchos conjuntos conexos por poligonales que no son convexos: por ejemplo en $\mathbb{R}^2$ los conjuntos $\{\mathbf{0}\}^c$ o el conjunto formado por los dos ejes X e Y.

La implicación b) es trivial: cada poligonal es una curva continua (un arco). Una circunferencia centrada en el origen y de radio 1 se puede recorrer con la curva continua

$$f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \quad (t \in [0, 1])$$

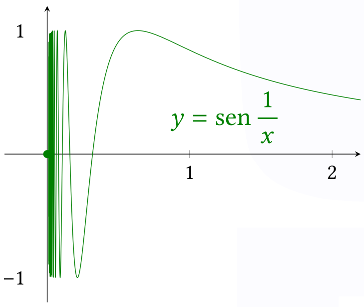
pero no mediante poligonales. Luego la implicación b) no es cierta a la inversa.

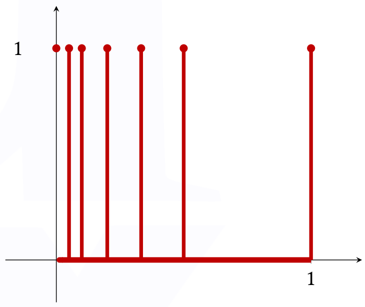
La implicación c) se prueba por reducción al absurdo. Si A no es conexo entonces existen U y V abiertos de A disjuntos ($U \cap V = \emptyset$) tales que $A = U \cup V$.

Dados $\mathbf{x} \in U \cap A$ e $\mathbf{y} \in V \cap A$, si existe $f : [a, b] \longrightarrow A \subset \mathbb{R}^n$ continua que verifica $f(a) = \mathbf{x}$ y $f(b) = \mathbf{y}$, entonces se tiene que $f[a, b] = (U \cap f[a, b]) \cup (V \cap f[a, b])$ es no conexo. Sin embargo, ya se verá más adelante en el capítulo de funciones continuas, que la imagen por una función continua de un conjunto conexo es un conjunto conexo.

Hay conjuntos conexos que no son conexos por arcos. Por ejemplo, la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} 1/x$ para $x > 0$, a la que se le añade el origen, forma un conjunto conexo pero no conexo por arcos. Este conjunto es

$$A = \{(x, \operatorname{sen} 1/x) : x > 0\} \cup \{(0, 0)\}.$$





Otro ejemplo se conoce como el *peine del topólogo*: se trata del conjunto $A \cup B \cup C$ donde

$$A = \{(0, 1)\}, \; B = (0, 1] \times \{0\}, \; C = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \times [0, 1].$$

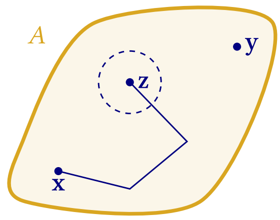
Es un conjunto conexo pero no conexo por arcos. □

Teorema. *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y conexo entonces A es conexo por poligonales.*

Demostración. Sea A un conjunto abierto no conexo por poligonales. La demostración consiste en probar que en ese caso A no es conexo. Como A no es conexo por poligonales, existen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ que no pueden unirse mediante una poligonal contenida en A. Se define

$$U = \{\mathbf{z} \in A : \mathbf{z} \text{ se puede unir con } \mathbf{x} \text{ mediante una poligonal contenida en } A\}.$$

Este conjunto es no vacío, ya que $\mathbf{x} \in U$. Además es abierto: si $\mathbf{z} \in U$ entonces existe $B(\mathbf{z}, r) \subset A$, ya que A es abierto. Cada punto de $B(\mathbf{z}, r)$ puede unirse mediante un segmento (el radio) con $\mathbf{z}$, que a su vez, puede unirse con $\mathbf{x}$ mediante una poligonal contenida en A. Por tanto, $B(\mathbf{z}, r) \subset U$ y U es abierto.



Por el mismo motivo, el conjunto

$$V = \{\mathbf{z} \in A \ : \ \mathbf{z} \text{ no se puede unir con } \mathbf{x} \text{ mediante una poligonal contenida en } A\}$$

es no vacío y abierto. Además, $U \cap V = \varnothing$ y $A = U \cup V$, y así A no es conexo. □

En este teorema es esencial que A sea abierto. Hay conjuntos conexos y no abiertos que no son conexos por poligonales.

Ejemplo: los puntos de la parábola $y = x^2$ forman en $\mathbb{R}^2$ un conjunto conexo (y también conexo por arcos) que no es conexo por poligonales. Lo mismo ocurre con los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el plano: forman un conjunto conexo pero no conexo por poligonales (al ser un conjunto no abierto esto es posible).

Sucesiones y series en $\mathbb{R}^n$

Una sucesión $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots) = (\mathbf{x}_k)_k = (x_{1k}, \ldots, x_{nk})_k$ en $\mathbb{R}^n$ esté formada por n sucesiones coordenadas. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$, una sucesión como

$$(\mathbf{x}_k) = \left(k^2, \, k+1\right)$$

está formada por dos sucesiones de números reales, una en cada componente, que se escriben como

$$x_{1k} = k^2, \quad x_{2k} = k+1.$$

La distancia en $\mathbb{R}^n$ verifica para $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

$$|u_i - v_i| \ \leq \ \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2} \ \leq \ |u_1 - v_1| + \ldots + |u_n - v_n|.$$

Por tanto, una sucesión de vectores $(\mathbf{x}_k)$ converge a un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si $d(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}) = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\| \longrightarrow 0$, que es equivalente a que ocurra en cada coordenada, es decir,

$$(\mathbf{x}_k) \longrightarrow \mathbf{a} \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} (x_{1k}) \longrightarrow a_1 \\ (x_{2k}) \longrightarrow a_2 \\ \qquad \ldots \\ (x_{nk}) \longrightarrow a_n \end{cases}$$

En resumen, $(\mathbf{x}_k)$ es convergente a un elemento $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\| < \varepsilon$ para $k > \nu$. Equivalentemente, si cada sucesión coordenada (x_{ik}) converge a la coordenada a_{ik} de $\mathbf{a}$.

Por ejemplo, la sucesión de $\mathbb{R}^2$

$$\left(\frac{6n^2 - 1}{3n^2 + 15n}, \ \frac{1}{n}\right)$$

converge a $(2,\ 0)$.

De la misma forma, una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es de Cauchy si y sólo si cada componente lo es: $(\mathbf{x}_k)$ es de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $\|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_q\| < \varepsilon$ para $p, q > \nu$. Equivalentemente, si cada sucesión coordenada (x_{ik}) es de Cauchy en $\mathbb{R}$.

La definición de valor de adherencia es la misma que en $\mathbb{R}$. La diferencia es que ya no se puede hablar de límite superior e inferior, ya que no hay orden y por tanto no cabe hablar del mayor y menor valor de adherencia de una sucesión.

Similarmente a como ocurre en $\mathbb{R}$, se puede hablar de una serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k = \sum_{k=1}^{\infty} (x_{1k}, \dots, x_{nk})$$

como la sucesión de sumas parciales $\left(\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2,\ \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3, \dots\right)$ y por tanto se puede hablar de su convergencia (sumabilidad) o carácter de Cauchy de dicha sucesión.

Evidentemente, una serie $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$ es sumable, con suma $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si es sumable cada serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_{ik}$ con suma a_i.

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$,

- la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2^n}\right)$ no es sumable,
- la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{n^2}\right)$ sí lo es; su suma es $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{n^2}\right) = \left(1, \frac{\pi^2}{6}\right)$.

Como consecuencia de todo lo dicho, el estudio de sucesiones y series en $\mathbb{R}^n$ se reduce (se hace en cada coordenada) al estudio de sucesiones y series en $\mathbb{R}$.