Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

6 Cálculo II

Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$
Límites y continuidad

14 · 03 · 2023

En este capítulo se van a estudiar funciones $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ donde A es un conjunto en $\mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ y así

$$f(\mathbf{x}) = \big(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})\big) = \big(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)\big).$$

Se dice que las componentes o coordenadas de f son las funciones $f_i : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ con $1 \leq i \leq n$.

Ejemplo: la función

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} = (x,\ y) & \rightsquigarrow & (x,\ y,\ x - y) \end{array}$$

puede escribirse como $f = (f_1,\ f_2,\ f_3)$ donde

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{R} \\ (x,\ y) & \rightsquigarrow & x \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbb{R} \\ (x,\ y) & \rightsquigarrow & y \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f_3} & \mathbb{R} \\ (x,\ y) & \rightsquigarrow & x - y \end{array}$$

y así

$$f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}),\ f_2(\mathbf{x}),\ f_3(\mathbf{x})) = (x,\ y,\ x - y).$$

Las operaciones de $\mathbb{R}^m$ como suma y producto por escalares inducen operaciones en el conjunto de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Sin embargo, ya no hay una multiplicación cuyo resultado sea una función (salvo en el caso $m = 1$).

Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : B \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, para cada $\mathbf{x} \in A \cap B$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se definen

$$\begin{aligned} (f + g)(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \\ (\lambda \cdot f)(\mathbf{x}) &= \lambda \cdot f(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

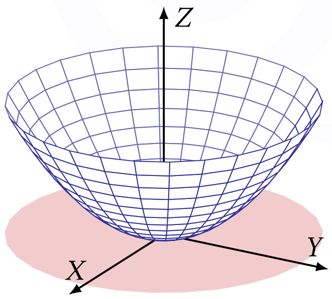
Con estas operaciones, el conjunto de funciones $\mathscr{F}(A \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \{f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m\}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y, salvo algún caso trivial como A un conjunto unitario, es de dimensión infinita.

Para una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de este espacio,

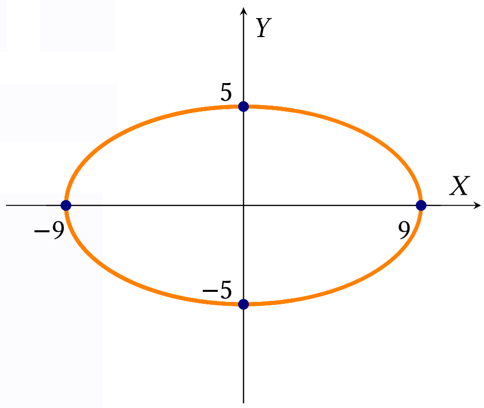
a) el número de variables que intervienen es n,
b) el número de componentes o coordenadas es m,
c) al conjunto A se le llama dominio,
d) $f(A)$ se llama imagen de f y es un subconjunto de $\mathbb{R}^m$,
e) la gráfica de f es $G_f = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \ : \ \mathbf{x} \in A\}$, un subconjunto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$

En algunos casos se representa la gráfica de la función; en otros, se representa el conjunto imagen. Este último tiene menos información, pero en muchos casos es suficiente para hacerse una idea de cómo es la función.

En cualquier caso, estas funciones se pueden representar, con la gráfica o con el conjunto imagen, sólo para valores pequeños de n y m: o bien $m \leq 3$, o bien $n + m \leq 3$. En otro caso no hay representación.

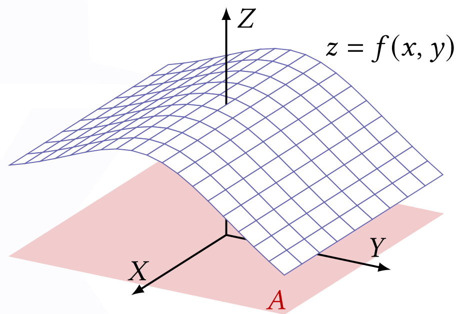


La función $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, donde A es el conjunto sombreado en el plano XY, dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$ tiene su gráfica en $\mathbb{R}^3$. Esa gráfica es una superficie cuya ecuación es $z = x^2 + y^2$ y se llama paraboloide de revolución.



La función $f : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, donde $f(t) = (9 \cos t, \ 5 \operatorname{sen} t)$ tiene su gráfica en $\mathbb{R}^3$. Se representa su conjunto imagen que es una elipse en $\mathbb{R}^2$. Es una curva. Su gráfica también es una curva, pero está en $\mathbb{R}^3$.

La gráfica de una función $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una superficie en $\mathbb{R}^3$ que tiene como ecuación $z = f(x, y)$. Según sea la expresión de la función así será el aspecto de dicha superficie. En cualquier caso, esta gráfica está formada por los puntos (x, y, z) donde $z = f(x, y)$, es decir, la gráfica son puntos que están encima (si la función es positiva) de los puntos de A. Es una transformación del conjunto A.



Las funciones $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se llaman vectoriales si $m > 1$. En caso contrario se llaman escalares. Se dice que son de varias variables si $n > 1$. Así, $f : A \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ es una función vectorial (tiene 4 componentes) de 3 variables.

Las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^m$ se llaman curvas en $\mathbb{R}^m$ (con la única excepción del caso $m = 1$) y para ellas se representa, cuando se puede, el conjunto imagen.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

A pesar de la gran variedad de funciones que se van a tratar (algunas son curvas, otras superficies,...) se pueden estudiar propiedades como la continuidad para todas ellas a la vez. Esta es la ventaja de haber definido distancia en $\mathbb{R}^n$, conjuntos abiertos y cerrados,...

Límites de funciones de varias variables

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y sea $\mathbf{a}$ un punto de acumulación de A. Se dice que $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ es el límite de f en $\mathbf{a}$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \;:\; \mathbf{x} \in A,\; 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \;\Rightarrow\; \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < \varepsilon,$$

donde

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| &= \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2} \\ \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| &= \sqrt{(f_1(\mathbf{x}) - b_1)^2 + \ldots + (f_m(\mathbf{x}) - b_m)^2}\,. \end{aligned}$$

Se escribe

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \;=\; \mathbf{b}.$$

o cualquiera de sus variantes

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \;=\; \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \Big(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})\Big) \;=\; \Big(\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f_m(x_1, \ldots, x_n)\Big).$$

Es evidente que f tiene límite en $\mathbf{a}$ si y sólo si cada f_i lo tiene. Basta recordar la desigualdad ya vista

$$|f_i(\mathbf{x}) - b_i| \;\le\; \sqrt{(f_1(\mathbf{x}) - b_1)^2 + \ldots + (f_m(\mathbf{x}) - b_m)^2} \;\le\; |f_1(\mathbf{x}) - b_1| + \ldots + |f_m(\mathbf{x}) - b_m|$$

con la cual se deduce que

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \;=\; \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) \;=\; b_i \quad (\forall\, 1 \le i \le m).$$

En resumen,

$$\Big(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})\Big) \to (b_1, \ldots, b_m) \;\Leftrightarrow\; f_1(\mathbf{x}) \to b_1, \ldots, f_m(\mathbf{x}) \to b_m.$$

Ejemplo: La función

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} = (x,\ y) & \rightsquigarrow & (x,\ y,\ x - y), \end{array}$$

que puede escribirse como $f = (f_1,\ f_2,\ f_3)$, verifica

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \to (2,4)} f(x,y) &= \lim_{(x,y) \to (2,4)} (x,\ y,\ x - y) \;=\; \left(\lim_{(x,y) \to (2,4)} x,\ \lim_{(x,y) \to (2,4)} y,\ \lim_{(x,y) \to (2,4)} x - y\right) \\ &= (2, 4, -2). \end{aligned}$$

En definitiva, el límite de una función se reduce al cálculo en cada una de sus componentes. Por tanto, el estudio de límites de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es una consecuencia del correspondiente estudio de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Se siguen manteniendo las propiedades del álgebra de límites para la suma para el producto por escalares. Además, si $m = 1$, también se verifica que el límite de un producto es el producto de los límites (para $m > 1$ no hay producto de funciones).

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Sin embargo, ya no cabe hablar de límite superior ni límite inferior, ya que en $\mathbb{R}^m$ no hay orden. Por otra parte, si $n > 1$, la expresión $\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{a}$ significa que $\mathbf{x}$ se aproxima al punto $\mathbf{a}$: esto puede ocurrir por la izquierda, por la derecha, por debajo, en diagonal,... Hay infinitas formas de aproximar $\mathbf{x}$ hacia $\mathbf{a}$. Ya no se habla de límites laterales, como en el caso de funciones definidas en $\mathbb{R}$.

En lo que sigue se tratarán funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$: se pueden dibujar, se evita el uso de subíndices,... Los resultados que se obtienen se extienden automáticamente para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$.

Además, se estudian límites en el origen, es decir, para $\mathbf{a} = (0,0)$. Mediante una simple traslación cualquier límite en otro punto se puede convertir en un límite en el origen. Si $(x,y) \longrightarrow (a,b)$ se consideran $x' = x - a,\ \ y' = y - b$ y entonces

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \;=\; \lim_{(x',y')\to(0,0)} f(x'+a,\ y'+b) \;=\; \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x+a,\ y+b).$$

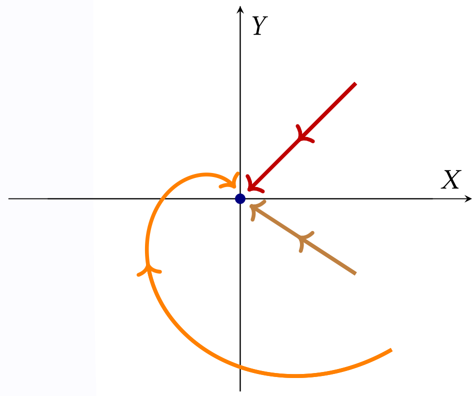
Por ejemplo, si $f(x,y) = x + y^2$ entonces (haciendo $x' = x - 1,\ \ y' = y - 3$)

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} f(x,y) \;=\; \lim_{(x,y)\to(1,3)} x+y^2 \;=\; \lim_{(x',y')\to(0,0)} (x'+1)+(y'+3)^2 \;=\; \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+1)+(y+3)^2.$$

Límites y límites direccionales

Es evidente que si para una función $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ existe el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \;=\; b$$



entonces también existe y vale lo mismo independientemente de la forma en que (x,y) se aproxime a $(0,0)$: puede ser en línea recta, recorriendo una curva como una espiral, de forma aleatoria,... Hay infinitas posibilidades, no sólo por la izquierda o por la derecha como en el caso de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Se puede hacer $(x,y) \longrightarrow (0,0)$ según la dirección del eje X. En ese caso, habría que elegir $x \longrightarrow 0,\ \ y = 0$. Para esos valores se tendría

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) \;=\; b.$$

También se puede hacer $(x,y) \longrightarrow (0,0)$ según la dirección de la diagonal (flecha de color rojo en la gráfica de arriba). En ese caso, habría que elegir $x = y \longrightarrow 0$, y se obtendría

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) \;=\; b.$$

Estos límites según aproximaciones mediante líneas rectas se llaman límites direccionales. Se elige una dirección, es decir, un vector (u,v) y se toma $(x,y) = t(u,v)$ para $t \longrightarrow 0$. Así, el límite direccional según la dirección (u,v) es

$$\lim_{t\to 0} f(tu, tv).$$

Si la función f tiene límite en $(0,0)$ entonces tiene límites direccionales en todas las direcciones y todos ellos coinciden. Esto representa una condición necesaria, aunque no suficiente para la existencia del límite. Además, si f tiene límite en $(0,0)$ entonces también tiene límite según direcciones de cualquier tipo (rectas, curvas,...) que se aproximen a $(0,0)$.

Si existe el límite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = b$	$\Longrightarrow$	Para cada (u,v) existe el límite direccional, y todos coinciden $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(tu,tv) = b$

En los límites direccionales solo interviene una variable y su cálculo suele ser sencillo. Si alguno no existe, o no coinciden entre ellos, entonces el límite global no existe. Si todos existen y coinciden entre ellos, el límite global puede existir o no; pero si existe, su valor es el mismo que el de los límites direccionales. Conviene resaltar que la implicación anterior no es una equivalencia, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. El siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+3y^2}$$

no existe. Según la dirección del eje X (se eligen puntos $(x,0)$ con $x\longrightarrow 0$ o alternativamente, se eligen puntos $t(1,\ 0)$ con $t\longrightarrow 0$) el valor es

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-0}{x^2+3\cdot 0} = 1 = \lim_{t\to 0} \frac{t^2-0}{t^2+3\cdot 0}.$$

Según la dirección del eje Y (se eligen puntos $(0,\ y)$ con $y\longrightarrow 0$ o alternativamente, se eligen puntos $t(0,\ 1)$ con $t\longrightarrow 0$) el valor es

$$\lim_{y\to 0} \frac{0-y^2}{0+3y^2} = -\frac{1}{3} = \lim_{t\to 0} \frac{0-t^2}{0+3t^2}.$$

Con esto ya es suficiente: el límite no existe.

Aunque no es necesario, se puede comprobar que el límite según las direcciones $y=kx$ depende del valor de k: varía entonces según sea k, y por tanto el límite global no existe. Al elegir $y=kx$ y $x\longrightarrow 0$, se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+3y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-k^2x^2}{x^2+3k^2x^2} = \frac{1-k^2}{1+3k^2},$$

que depende de cómo sea k. Esto dice que el límite global no existe.

De forma alternativa, se puede comprobar que los límites según las direcciones (u,v), es decir sobre los puntos de la forma $t(u,v)$ dependen de la elección del vector (u,v):

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2u^2-t^2v^2}{t^2u^2+3t^2v^2} = \frac{u^2-v^2}{u^2+3v^2}.$$

Como consecuencia, el límite global no puede existir.

Ejemplo. Para calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

se estudian primero los límites cuando $(x,y)\longrightarrow(0,0)$ según ciertas direcciones rectas.

Si $(x, y) \longrightarrow (0, 0)$ en la dirección del eje X entonces $y = 0,\ x \longrightarrow 0$, y por tanto, sobre esos puntos

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 0}{x^4 + 0^2} = 0.$$

También se puede hacer calculando los valores de la función sobre los puntos $t(1, 0)$ para $t \longrightarrow 0$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2 \cdot 0}{t^4 + 0^2} = 0.$$

Esto muestra cuál es el único candidato posible para el valor del límite global, si es que existe.

Si $(x, y) \longrightarrow (0, 0)$ en la dirección del eje Y entonces $x = 0,\ y \longrightarrow 0$, y entonces, sobre esos puntos

$$\lim_{y\to 0} \frac{0^2 y}{0^4 + y^2} = 0.$$

De no haber coincidido con el anterior, el límite global no existiría.

Si $(x, y) \longrightarrow (0, 0)$ en la dirección de la diagonal $y = x$ entonces $x = y \longrightarrow 0$. Sobre esos puntos

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 x}{x^4 + x^2} = 0.$$

También se podría haber hecho eligiendo los puntos de la diagonal, que son puntos $t(1, 1)$ con $t \longrightarrow 0$, sobre los cuales la función verifica

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2 \cdot t}{t^4 + t^2} = 0.$$

En general, si $(x, y) \longrightarrow (0, 0)$ en la dirección de la recta $y = kx$ entonces $y = kx,\ x \longrightarrow 0$, y así, sobre esos puntos

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 kx}{x^4 + k^2 x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx}{x^2 + k^2} = 0$$

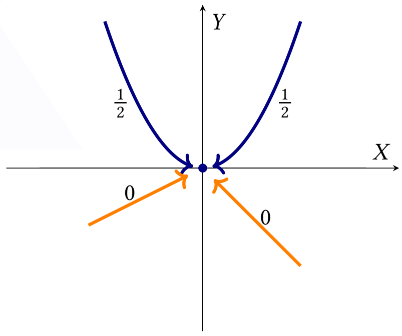
Alternativamente, para cada dirección (u, v) los límites direccionales son

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2 u^2 \cdot tv}{t^4 u^4 + t^2 v^2} = \lim_{t\to 0} \frac{tu^2 v}{t^2 u^4 + v^2} = 0.$$

En definitiva todos los límites direccionales dan el mismo valor 0, lo que da a entender que es posible que el límite global de la función en $(0, 0)$ sea 0.

Sin embargo, Si $(x, y) \longrightarrow (0, 0)$ en la dirección de la parábola $y = x^2$, es decir $y = x^2$ y $x \longrightarrow 0$, en esos puntos

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 x^2}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}.$$



Según las direcciones rectas el límite debería ser 0. Según la dirección de esta parábola el límite debe ser $1/2$. Esto dice que el límite global

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

no existe.

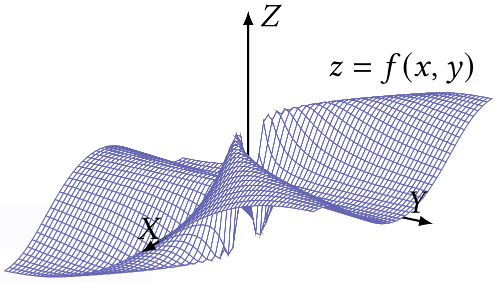
Ejercicio. Dibujar la gráfica de esta función

$$f(x,\ y)\ =\ \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$$

para ver qué hace en los puntos próximos al origen. Por ejemplo, se puede escribir

```
plot (x^2 * y)/(x^4 + y^2 )
```

en la ventana de la página de Google.



En resumen, la condición necesaria pero no suficiente para que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = b$ es que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,\varphi(x)) = b$ para toda curva $y = \varphi(x)$ que pase por $(0,0)$. Sin embargo, esta comprobación no es posible: existen infinitas curvas que pasan por el origen. Por este motivo, para calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ se calculan primero los límites direccionales. Si alguno no existe o entre ellos hay algunos que no coinciden, entonces el limite global no existe. Si todos existen y coinciden, es posible que el límite global sea igual a ese valor. En ese caso se intenta probar si el límite según alguna curva da un valor distinto, como en el ejemplo anterior. Si todos (direcciones rectas y curvas) dan el mismo hay que probar entonces que dicho valor es el límite, utilizando la definición $\varepsilon-\delta$ de límite. También se pueden utilizar otras técnicas, como comparación con otros límites conocidos, cambio a coordenadas polares, el teorema de los multiplicadores de Lagrange,...

Ejemplo. Para calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

se estudian primero los límites direccionales.

En la dirección del eje X sale 0. Luego o el límite es 0 o no existe. En la dirección del eje Y también sale 0. Sin embargo, en la dirección de la diagonal (recta $y = x$) el límite sale $1/2$. Por tanto, dicho límite no existe.

Ejemplo. El límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y+e^x-1}{x+y}$$

no existe. Todos los límites direccionales dan el mismo valor 1. Sin embargo, según la parábola $y = x^2 - x$ (con $x \longrightarrow 0$) se obtiene (aplicando la regla de L'Hôpital)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x-1+e^x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x-1+e^x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2+e^x}{2} = 3/2.$$

La explicación de por qué se elige esa parábola $y = x^2 - x$ no es sencilla, y muestra que el cálculo de límites en varias variables puede no ser sólo una consecuencia del cálculo de los límites direccionales.

Ejemplo. Se puede comprobar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0.$$

Todos los límites direccionales dan como resultado el valor 0. Eligiendo algunas curvas que se aproximen a $(0,0)$, también se obtienen límites que dan el valor 0. ¿Será verdad entonces que

$$(x,y) \longrightarrow (0,0) \;\Rightarrow\; \frac{x^3}{x^2+y^2} \longrightarrow 0?$$

En otras palabras, ¿será verdad que

$$\left| \frac{x^3}{x^2+y^2} \right| \;<\; \varepsilon$$

si (x,y) está suficientemente próximo a $(0,0)$, es decir, si $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$?

Dado $\varepsilon > 0$ se elige $\delta = \varepsilon$ y así

$$|x| \;\le\; \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon \;\Rightarrow\; \left| \frac{x^3}{x^2+y^2} \right| \;\le\; \left| \frac{x^3}{x^2} \right| \;=\; |x| \;<\varepsilon$$

y el límite es 0.

Altenativamente, se puede utilizar la comparación

$$0 \;\le\; \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x^3}{x^2+y^2} \right| \;\le\; \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x^3}{x^2} \right| \;=\; \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| \;=\; 0.$$

Otra más: se pueden utilizar coordenadas polares y fácilmente se comprueba que dicho límite es cero.

El teorema del los multiplicadores de Lagrange (que se verá más adelante) se puede utilizar para comprobar cuál el valor máximo que puede alcanzar x^3 si $x^2+y^2=\delta^2$. Ese máximo se alcanza en el punto $x=\delta$, $y=0$, y por tanto,

$$\frac{x^3}{x^2+y^2} \;\le\; \frac{\delta^3}{\delta^2} \;=\; \delta,$$

que muestra de otra forma que

$$\frac{x^3}{x^2+y^2}$$

se hace pequeño si (x,y) tiende a $(0,0)$.

Ejemplo. Para calcular el límite

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$$

se comienza con los límites direccionales.

Según el eje X, es decir, según los puntos $x \longrightarrow 0$, $y=z=0$, el valor del límite es 0. También es ese valor 0 según el eje Y, según la diagonal. Incluso es 0 si nos acercamos al origen sobre puntos del plano XY, es decir, puntos (x,y,z) con $z=0$ y $x,y \longrightarrow 0$ (esto último ya no es un límite direccional).

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Todo parece indicar que el límite global es 0. Para probarlo basta recordar una desigualdad ya vista: $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (y lo mismo con $|y|$ y $|z|$), y por tanto

$$\left| \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} \right| \leq \frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

que muestra que el límite de arriba es 0.

El teorema de los multiplicadores de Lagrange es otra alternativa. El valor máximo de xyz si $x^2+y^2+z^2=\delta^2$ se alcanza para $x=y=z=\delta/\sqrt{3}$ y se llega a la misma conclusión del valor del límite:

$$\left| \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} \right| \leq \frac{\delta^3}{3^{3/2}\,\delta^2}$$

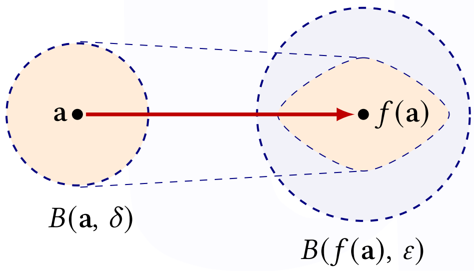
que tiende a 0 si $(x,y,z) \longrightarrow (0,0,0)$.

Más adelante se estudiarán las coordenadas polares y el teorema de los multiplicadores de Lagrange. Entonces sería conveniente una segunda lectura a estos ejemplos que se han visto.

Continuidad

Una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es continua en $\mathbf{a} \in A$ si verifica cualquiera de las condiciones equivalentes:

- $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$, que puede escribirse como «si $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$ entonces $f(\mathbf{x}) \to f(\mathbf{a})$»,
- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ : \ \mathbf{x} \in A,\ \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < \delta \ \Rightarrow\ \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\| < \varepsilon$,
- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ : \ \mathbf{x} \in A,\ \mathbf{x} \in B(\mathbf{a},\delta) \ \Rightarrow\ f(\mathbf{x}) \in B(f(\mathbf{a}),\varepsilon)$.



La primera condición $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$ dice que para las funciones continuas no es necesario el cálculo de límites: sólo hay que sustituir por el valor de la función en el punto.

Si f es continua en todos los puntos de A, se dice que f es continua.

Por definición, f es uniformemente continua si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ : \ \mathbf{x},\mathbf{y} \in A,\ \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| < \delta \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \varepsilon,$$

es decir, para cada $\varepsilon > 0$ existe un valor δ que verifica la definición de continuidad en todos los puntos de A. Al igual que ocurre para el caso de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, hay funciones continuas que no son uniformemente continuas.

Ejemplos. **a**) La función

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \rightsquigarrow & \operatorname{sen} x \end{array}$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

es continua. Para comprobar que es continua en cada punto (a, b) se utiliza el hecho de que la función $x \in \mathbb{R} \longrightarrow \operatorname{sen} x \in \mathbb{R}$ es continua, y así

$$(x, y) \to (a, b) \;\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \to a \\ y \to b \end{array} \right. \Rightarrow \operatorname{sen} x \to \operatorname{sen} a.$$

Por tanto, $(x, y) \to (a, b) \Rightarrow f(x, y) \to f(a, b)$ y se tiene que f es continua.

b) Por el mismo argumento, son continuas las funciones

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (x, y) & \rightsquigarrow & 3 + y^2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \rightsquigarrow & z + \cos z \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h} & \mathbb{R} \\ (x, y) & \rightsquigarrow & x + y \end{array}$$

Ejemplo. Se dice que $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es lipschitziana si existe alguna constante $M > 0$ para la cual se verifica

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \;\leq\; M\,\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A).$$

Es fácil comprobar que

a) $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow f(x, y) = x \in \mathbb{R}$ es lipschitziana con constante $M = 1$, ya que se verifica $|f(x, y) - f(x', y')| = |x - x'| \leq \|(x, y) - (x', y')\|$.

b) La función $f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x) = x^2 \in \mathbb{R}$ es lipschitziana en $[0, 1]$, pero no en todo $\mathbb{R}$.

c) Toda función lipschitziana es uniformemente continua y por tanto es continua.

Ya se ha visto que una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ puede escribirse como $f = (f_1, \ldots, f_m)$, donde $f_i : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ para $1 \leq i \leq m$ son las componentes de f. El límite de f en cada punto consiste en calcular el límite en cada una de sus componentes f_i, por tanto

Proposición. *La función $f = (f_1, \ldots, f_m)$ es continua en* $\mathbf{a}$ *si y sólo si $f_1, \ldots, f_m$ son continuas en* $\mathbf{a}$. *Por tanto, f es continua si y sólo si cada f_i lo es. La misma conclusión para la continuidad uniforme: f es uniformemente continua si y sólo si $f_1, \ldots, f_m$ son uniformemente continuas.*

Las funciones continuas $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ forman un espacio vectorial. Por ejemplo, $f(x, y) = x$ y $g(x, y) = y$, son funciones continuas de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Por tanto, la función suma $(f + g)(x, y) = x + y$ es continua. Cuando $m = 1$ las funciones se pueden multiplicar y el producto de funciones continuas es una función continua. Por último, si $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : B \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ son continuas, entonces ambas funciones se pueden componer y se obtiene una función $g \circ f : C \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ continua. El dominio de esta composición es $C = \{x \in A : f(x) \in B\} = A \cap f^{-1}(B)$.

Ejemplo: la composición de las funciones

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \rightsquigarrow & (x, y, y^2) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \rightsquigarrow & x + z \end{array}$$

es la función $g \circ f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow x + y^2 \in \mathbb{R}$. En este ejemplo no es posible definir la composición $f \circ g$ ni la suma $f + g$ de ambas.

Estas propiedades nos llevan a encontrar funciones continuas haciendo operaciones con funciones elementales (que son continuas). Por ejemplo, las funciones

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \rightsquigarrow & (xy, 1-z^2) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^3 \\ t & \rightsquigarrow & (t, 6, e^t) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} [0,1]\times[4,7]\subset\mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \rightsquigarrow & 1+x/y \end{array}$$

son todas continuas. Para todas ellas no existe el cálculo de límites: al ser continuas, basta sustituir por el valor de la función en el punto en cuestión. Por ejemplo, utilizando estas funciones

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = (0,\ 1), \quad \lim_{t\to 1} g(t) = (1,6,e) \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y)\to(1,5)} h(x,y) = 6/5.$$

Funciones continuas y conjuntos abiertos (o cerrados)

Una caracterización útil y manejable de una función continua, que ya se estudió para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, se mantiene idéntica para el caso de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.

Proposición. *Una función $f : A\subset\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es continua si y sólo si para todo G abierto de $\mathbb{R}^m$ se tiene que $f^{-1}(G) = \{\mathbf{x}\in A \ :\ f(\mathbf{x})\in G\}$ es abierto en A.*

Se suele decir que las aplicaciones continua *traen* abiertos en abiertos y se puede expresar así

$$f \text{ continua } \Leftrightarrow \left[\ G \text{ abierto } \Rightarrow f^{-1}(G) \text{ abierto}\ \right],$$

o mejor aún

$$f \text{ continua } \Leftrightarrow \left[\ f^{-1}(G) \text{ abierto} \Leftarrow G \text{ abierto}\ \right].$$

Demostración. Sea f continua y G abierto en $\mathbb{R}^m$. Se trata de ver que $f^{-1}(G)$ es abierto en A, es decir, que todo punto es interior. Sea $\mathbf{x}\in A\cap f^{-1}(G)$. Como $f(\mathbf{x})\in G$ y este conjunto G es abierto, existe $B(f(\mathbf{x}),\ \varepsilon)\subset G$. Como f es continua en $\mathbf{x}$ existe $B(\mathbf{x},\ \delta)$ que verifica $f\left(B(\mathbf{x},\ \delta)\right)\subset B(f(\mathbf{x}),\ \varepsilon)\subset G$ en los puntos de A. Por tanto, $A\cap B(\mathbf{x},\ \delta)\subset f^{-1}(G)$.

Recíprocamente, dado cualquier elemento $\mathbf{x}\in A$, como $G = B(f(\mathbf{x}),\ \varepsilon)$ es un abierto, entonces $f^{-1}(G)$ es un abierto que contiene a $\mathbf{x}$. Luego contiene a cierta bola $B(\mathbf{x},\ \delta)$ y por tanto f es continua en $\mathbf{x}$. □

Es evidente que puede caracterizarse la continuidad mediante conjuntos cerrados: *una función $f : A\subset\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es continua si y sólo si para todo F cerrado de $\mathbb{R}^m$ se tiene que $f^{-1}(F) = \{\mathbf{x}\in A\ :\ f(\mathbf{x})\in F\}$ es cerrado en A.* La demostración es muy simple, ya que un conjunto es cerrado si y sólo si su complementario es abierto y además

$$f^{-1}(F^c) = \{\mathbf{x}\in A\ :\ f(\mathbf{x})\in F^c\} = \{\mathbf{x}\in A\ :\ f(\mathbf{x})\notin F\} = (f^{-1}(F))^c.$$

Corolario. *Si $f : A\subset\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es continua y $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m$, el conjunto*

$$\{\mathbf{x}\in A\ :\ f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}\}$$

es un cerrado en A.

Este conjunto suele describirse abreviadamente como $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, y representa al conjunto de soluciones de dicho sistema. La demostración de que es cerrado es trivial

$$\{\mathbf{x}\in A\ :\ f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}\} = f^{-1}\{\mathbf{b}\}$$

Departamento de Matemáticas Universidad de Extremadura

y $\{\mathbf{b}\}$ es un cerrado en $\mathbb{R}^m$, por lo que $f^{-1}\{\mathbf{b}\}$ también lo es.

Si se escribe $f = (f_1, \ldots, f_m)$ y $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)$, entonces

$$\{\mathbf{x} \in A \ : \ f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}\} \ = \ \{(x_1, \ldots, x_n) \in A \ : \ f_1(x_1, \ldots, x_n) = b_1, \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n) = b_m\}$$

que se puede expresar como

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_1(x_1, \ldots, x_n) & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) & = & b_m \end{array} \right.$$

o también $f^{-1}\{\mathbf{b}\} = f_1^{-1}\{b_1\} \cap \ldots \cap f_m^{-1}\{b_m\}$, otra forma de ver que es cerrado, ya que es una intersección de conjuntos cerrados.

Este conjunto es cerrado, admitiendo que f es continua, es decir, que todas las f_i lo son. El mismo argumento muestra que también es cerrado si se cambia "=" por "≤" o "≥" en cualquiera de las ecuaciones. En cambio, si todos los que aparecen son signos "<" o ">" se obtiene un conjunto abierto. Si aparecen de los dos tipos ("≤", "≥") y ("<", ">") ya no se puede asegurar nada y, en general, se obtiene un conjunto que no es ni abierto ni cerrado.

Ejemplo. El conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 6\}$ es abierto. Este conjunto se puede escribir como $f^{-1}(-\infty, 6)$, donde f es la función $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow f(x, y) = x + y \in \mathbb{R}$. Es una función continua y por tanto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 6\} = f^{-1}(-\infty, 6)$$

es un conjunto abierto. Los conjuntos

$$\begin{array}{rcl} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \le 1\} & = & f^{-1}(-\infty, 1], \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \le x + y \le 7\} & = & f^{-1}[3, \ 7] \end{array}$$

son cerrados.

Ejemplo. Sea $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow f(x, y) = (x, x + y, y^2) \in \mathbb{R}^3$. El conjunto $f(x, y) = (7, 1, 15)$, es decir, el conjunto de puntos (x, y) que verifican

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 7 \\ x + y & = & 1 \\ y^2 & = & 15 \end{array} \right.$$

es un cerrado en $\mathbb{R}^2$. No hace falta resolver el sistema para saber que se trata de un conjunto cerrado.

Ejemplo. La ecuación $x^2 + y^2 = 1$ representa un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$. Este conjunto es una circunferencia de radio 1 centrada en el origen, y es cerrado ya que puede ponerse como $f^{-1}\{1\}$ donde $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow f(x, y) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$. En cambio, $x^2 + y^2 < 1$ representa un conjunto abierto.

El mismo argumento se puede extender: si $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ son funciones continuas, el conjunto

$$\{\mathbf{x} \in A \ : \ f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\}$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

es un cerrado en A. Este conjunto puede escribirse como

$$\left\{\begin{array}{ccc} f_1(x_1,\ldots,x_n) & = & g_1(x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f_m(x_1,\ldots,x_n) & = & g_m(x_1,\ldots,x_n) \end{array}\right.$$

La misma consideración que antes si se cambia el signo "=" por "≤", "≥", "<" o ">".

Ejemplo. En $\mathbb{R}^3$, el conjunto $3x + 2y + 7z = 6$ es un cerrado. Es un plano. El conjunto $3x + 2y + 7z \leq 6$ también es cerrado, y $3x + 2y + 7z < 6$ es abierto.

Ejemplo. En $\mathbb{R}^2$ el conjunto

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & > & 0 \\ y & \geq & 1 \end{array}\right.$$

no es ni abierto ni cerrado.

Ejemplo. El conjunto

$$\left\{\begin{array}{ccc} x^2 + y & = & 1 \\ x + 2y^3 & \leq & 4 \end{array}\right.$$

es cerrado en $\mathbb{R}^2$.

Teoremas fundamentales sobre las funciones continuas

En general, las funciones continuas no llevan abiertos en abiertos ni cerrados en cerrados. Como ya se ha visto en Cálculo I para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, la función $f(x) = x^2$ verifica $f(-1,1) = (0,1]$. La función $g(x) = 1/x$ cumple $g[1,+\infty) = (0,1]$. Y también transforma un intervalo acotado en otro que no lo es: $g(0,1) = (1,+\infty)$. En cambio hay propiedades que se mantienen al aplicar una función continua. En esta sección se verán algunas de esas propiedades.

1. Teorema. *Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es continua en A y A es compacto en $\mathbb{R}^n$, entonces $f(A)$ también es compacto en $\mathbb{R}^m$. Las funciones continuas transforman conjuntos compactos en compactos.*

Demostración. Sea A un conjunto compacto. Para ver que $f(A)$ es compacto se trata de ver que todo recubrimiento abierto de $f(A)$ admite un subrecubrimiento finito. Sea entonces $f(A) \subset \bigcup U_i$ un recubrimiento abierto de $f(A)$, donde U_i es abierto en $\mathbb{R}^m$. Como f es continua, cada $f^{-1}(U_i)$ es abierto en A. Luego $A \subset \bigcup f^{-1}(U_i)$ es un recubrimiento abierto de A. Como A es compacto, este recubrimiento admite un subrecubrimiento finito: $A \subset f^{-1}(U_{i_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(U_{i_n})$. Por tanto $f(A) \subset U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$ y $f(A)$ es compacto. □

Como caso particular, si $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y A es un conjunto compacto, entonces f alcanza el máximo y el mínimo absoluto en A: como $f(A)$ es compacto (cerrado y acotado), tiene ínfimo y supremo por ser acotado y ambos están en el conjunto por ser cerrado. Se suele enunciar así:

Corolario. *Cualquier función continua $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sobre un conjunto compacto A alcanza el máximo y el mínimo absoluto.*

Ejemplo. La función $f(x,y) = x^3 - y^2$ no tiene ni máximo ni mínimo absoluto. Esta función alcanza valores arbitrariamente grandes, por ejemplo si x es grande e $y = 0$, y valores arbitrariamente pequeños, por ejemplo si $x = 0$ e y es grande. En cambio, si consideramos la función definida en el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, una circunferencia de radio 1 centrada en el origen, entonces sí alcanza f el máximo y el mínimo absoluto.

Ejemplo. La función
$$f(x, y) = \frac{2 + \operatorname{sen} xy}{3 - \cos x^2} + x^2 \log(y^2 + 4)$$
alcanza el máximo y el mínimo absoluto en el recinto $A = [0, 1]^2$. La comprobación es simple: se trata de una función continua y un conjunto compacto.

De forma similar al caso de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ se tiene

2. Teorema. *Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es continua en A y A es compacto en $\mathbb{R}^n$, entonces f es uniformemente continua.*

La demostración es idéntica a la ya vista para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, con los cambios evidentes de valor absoluto por norma, intervalo por bola,...

3. Teorema. *Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es continua en A y A es conexo en $\mathbb{R}^n$, entonces $f(A)$ también es conexo en $\mathbb{R}^m$. Las funciones continuas transforman conjuntos conexos en conexos.*

Demostración. Si $f(A)$ no es conexo, entonces en $\mathbb{R}^m$ existen abiertos disjuntos y no vacíos, U y V, tales que $f(A) = U \cup V$. Como f es continua, los conjuntos $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son abiertos, no vacíos, disjuntos y entonces $A = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ no es conexo. $\square$

Corolario. *Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en el conjunto conexo A y existen $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$ que cumplen $f(\mathbf{a}) \cdot f(\mathbf{b}) < 0$, entonces existe $\mathbf{c} \in A$ que verifica $f(\mathbf{c}) = 0$.*

Demostración. Como A es conexo entonces $f(A)$ es conexo en $\mathbb{R}$, es decir, $f(A)$ es un intervalo. Además es un intervalo que contiene algún valor positivo y alguno negativo. Luego contiene el valor 0. $\square$

Además, si A es un conjunto no conexo, entonces se puede escribir como la unión de dos conjuntos abiertos y disjuntos, $A = U \cup V$, y se puede definir una función continua en A que alcanza valores positivos y negativos pero no alcanza el valor 0. Basta definir
$$f : \mathbf{x} \in A = U \cup V \longrightarrow f(\mathbf{x}) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad \mathbf{x} \in U \\ 1 & \text{si} \quad \mathbf{x} \in V \end{cases}$$
que es trivialmente continua.

En resumen, el teorema de Bolzano y la conexión del conjunto son propiedades que van unidas. Las imágenes continuas de conjuntos conexos, que no están rotos, son conjuntos que no están rotos.

Los teoremas anteriores se aplican a las funciones continuas. En particular a las funciones elementales en varias variables, como $f(x, y) = x + \operatorname{sen} y$, o $g(x, y, z) = ze^{x-y}, \ldots$

Ejemplo. Sea A el conjunto $x^2 + y^2 = 1$ en $\mathbb{R}^2$, es decir $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$, escrito correctamente. Se considera la función
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (x, y) & \rightsquigarrow & x^3 - y^2 \end{array}$$

que es continua (es un ejercicio sencillo comprobar esto). El conjunto A es compacto y conexo, luego $f(A)$ también lo es. Como $f(A) \subset \mathbb{R}$ entonces es un intervalo cerrado y acotado

$$f(A) = \left[\inf_{(x,y)\in A} f(x,y), \sup_{(x,y)\in A} f(x,y) \right].$$

Además, f alcanza valores positivos y negativos: $f(1,0) = 1$ y $f(-1,0) = -1$. Luego existe $(a,b) \in A$ que cumple $f(a,b) = 0$.

La función $g : (x,y) \in A \longrightarrow g(x,y) = (x+y, x-y)$ es continua y por tanto $g(A)$ es compacto y conexo en $\mathbb{R}^2$. ¿Qué conjunto es? (indicación: calcular $(x+y)^2 + (x-y)^2$ sobre los elementos $(x,y) \in A$)

Ejemplo. Lo mismo ocurre para la función $f(x,y) = xy$ definida en la frontera del cuadrado que pasa por los cuatro puntos $(\pm 1, \pm 1)$, es decir, el conjunto

$$A \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{R} \;:\; x = \pm 1 \text{ o } y = \pm 1\}.$$

La función es continua, el conjunto A es compacto y conexo y por tanto $f(A)$ también lo es.

Ejemplo. La ecuación $2\operatorname{sen}(x+y) + \sqrt{|x|+1} = 0$ tiene solución en $\mathbb{R}^2$. Para comprobarlo es suficiente encontrar elementos en los que la función $g(x,y) = 2\operatorname{sen}(x+y) - \sqrt{|x|+1}$ sea positiva en uno y negativa en otro. Se trata de una función continua definida sobre un conjunto conexo.

Por otra parte, sobre el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, la función $g(x,y)$ alcanza un máximo y un mínimo, ya que A es compacto. En otras palabras, el problema de maximizar (o minimizar) la función g sobre el conjunto A, que se escribe

$$\begin{cases} \max & 2\operatorname{sen}(x+y) + \sqrt{|x|+1} \\ \text{si} & x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

tiene solución.

Ejemplo. ¿Tiene solución la ecuación $x^2 - z^2 + e^{xy} - 72x + \cos z = 0$? Se trata de una función de tres variables $f(x,y,z) = x^2 - z^2 + e^{xy} - 72x + \cos z$ que es continua en todo $\mathbb{R}^3$. Basta encontrar algún elemento en el que f sea negativo y otro en el sea positivo. Por ejemplo, $f(0,0,0) = 2 > 0$ y $f(1,0,0) < 0$. Por tanto, la ecuación sí tiene alguna solución en $\mathbb{R}^3$: existe algún elemento solución de $f(x,y,z) = 0$.

Se puede considerar la misma función pero definida en un dominio más pequeño. Por ejemplo, si $A = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$, se puede plantear la pregunta: ¿la ecuación anterior $x^2 - z^2 + e^{xy} - 72x + \cos z = 0$ tiene alguna solución en A? Es fácil comprobar que A es un conjunto conexo (de hecho es mucho más, es convexo, ya que es una bola, $B[(0,0,0),1]$). Bastará encontrar algún elemento de A en el que $f(x,y,z) = x^2 - z^2 + e^{xy} - 72x + \cos z$ sea positiva y otro en el que sea negativa. Como $f(1,0,0) < 0$ y $f(0,1,0) > 0$, y ambos elementos están en A (es decir, $(1,0,0), (0,1,0) \in A$), entonces existe alguna solución de la ecuación $f(x,y,z) = 0$ en A.

Razonando igual, también se puede comprobar que hay una solución de la ecuación $f(x,y,z) = 0$ en la superficie de la esfera, es decir, en el conjunto $B = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Y también hay una solución en el plano de ecuación $x + y + z = 1$.